

## Cvičení 9: Optimalizace SHO

### Optimalizace systému M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ , doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Známe náklady  $c_1$  na obsluhu jednoho požadavku (resp náklady na linku obsluhy za jednotku času) a náklady  $c_2$  na údržbu prázdného systému za jednotku času. Hledáme intenzitu obsluhy  $\mu$  tak, aby funkce nákladů a ztrát

$F(\mu) = c_1\mu + c_2E(N) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$  nabývala svého minima. Minima je dosaženo pro

$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1} \lambda}$ . Optimální intenzitu obsluhy a hodnotu funkce nákladů a ztrát pro tuto

optimální intenzitu počítá funkce `opt_neomezeny_1.m`.

**Příklad 1.:** Do malé venkovské prodejny s jednou prodavačkou přichází ve všední den odpoledne průměrně 1 zákazník každé 4 minuty. Intervaly mezi příchody zákazníků mají exponenciální rozložení a doba obsluhy rovněž. Náklady na jednoho zákazníka jsou vyčísleny na 30 Kč a prostojové náklady na prodavačku činí 50 Kč/h. Najděte optimální dobu obsluhy jednoho zákazníka a zjistěte hodnotu funkce nákladů a ztrát pro tuto optimální dobu obsluhy.  
**Výsledek:** Optimální doba obsluhy zákazníka je 3 min. Pro tuto optimální dobu obsluhy činí hodnota funkce nákladů a ztrát 750 Kč.

**Příklad 2.:** Na konci montážní linky se nachází pracoviště kontroly kvality, které se skládá z prostoru na čekání palet a zkušebního pracoviště. Průměrně přichází 80 palet v průběhu osmihodinové směny. Doba mezi příchody palet má exponenciální rozložení a doba kontroly rovněž. Náklady na kontrolu jedné palety činí 100 Kč, prostojové náklady jsou 40 Kč/h. Stanovte optimální dobu kontroly jedné palety a najděte hodnotu funkce nákladů a ztrát pro optimální intenzitu obsluhy.

**Výsledek:** 5 minut, tedy za 1 h by se mělo zkontrolovat 12 palet. Funkce nákladů a ztrát nabývá hodnoty 1400.

**Příklad 3.:** V dílně dochází v průměru ke třem poruchám strojů za hodinu. Prostojové náklady stroje jsou 1000 Kč za hodinu. Můžeme volit mezi průměrným opravářem, který opravuje čtyři stroje za hodinu a stojí i s režií 500 Kč za hodinu a zkušeným opravářem, který opravuje pět strojů za hodinu a stojí i s režií 650 Kč za hodinu. Kterého z nich je výhodnější přijmout?

Návod: Rozhodněte podle funkce nákladů a ztrát.

**Výsledek:** Funkce nákladů a ztrát nabývá menší hodnoty pro zkušeného opraváře (4750 Kč) než pro průměrného opraváře (5000 Kč), je tedy výhodnější přijmout zkušeného opraváře.

### Optimalizace systému M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ , doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem  $\mu$ .

a) Známe náklady  $c_1$  na čekajícího zákazníka za jednotku času a náklady  $c_2$  na nevyužitou linku obsluhy za jednotku času. Hledáme počet linek  $n$  tak, aby kriteriální funkce

$C(n) = c_1 E(N_Q) + c_2 [n - E(N_S)]$  nabývala svého minima.

Přitom  $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$ ,  $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{a_n}{1-\rho}$ ,  $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\rho = \frac{\beta}{n}$ ,

$a_0 = \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}$ ,  $E(N_S) = n\rho$ . Podmínka stabilizace:  $n > \frac{\lambda}{\mu}$ .

Optimální počet linek a hodnotu kriteriální funkce pro tento optimální počet linek počítá funkce `opt_neomezeny_n.m`.

b) Známe náklady  $c_1$  na pobyt zákazníka v systému za jednotku času a náklady  $c_2$  na provoz jedné linky obsluhy za jednotku času. Hledáme počet linek  $n$  tak, aby kriteriální funkce

$C(n) = c_1 E(N) + c_2 n$  nabývala svého minima. Přitom  $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$ . Podmínka

stabilizace:  $n > \frac{\lambda}{\mu}$ .

Optimální počet linek a hodnotu kriteriální funkce pro tento optimální počet linek počítá funkce `opt_neomezeny_n_alt.m`.

**Příklad 4.:** V nově otevřené pobočce České spořitelny bylo rozhodnuto rezervovat pro operace s účtem Poštovní spořitelny 3 přepážky. Klienti, kteří do pobočky přicházejí kvůli těmto operacím, se řadí do jedné fronty a po uvolnění libovolné z přepážek mohou být obsluhováni. Po otevření pobočky bylo zjištěno, že v průměru přichází 68 klientů za hodinu, přičemž intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba nutná pro odbavení klienta má exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 min 24 s.

a) Za předpokladu, že náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h jsou 120 Kč a náklady na provoz jedné přepážky činí 300 Kč/h, najděte optimální počet přepážek.

b) Zjistěte, jak by se musely snížit náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h, aby byl optimální původně uvažovaný systém se třemi přepážkami.

**Výsledek:** ad a) Optimální počet přepážek je 4, ad b) Náklady na čekajícího zákazníka nesmí přesáhnout 41,56 Kč za hodinu.

**Příklad 5.:** K lékaři přicházejí v průměru 4 pacienti za hodinu, ošetření jednoho pacienta trvá v průměru 12 minut. Doba mezi příchody pacientů i doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Hodinová mzda lékaře je 500 Kč a náklady na pobyt pacienta ve zdravotnickém zařízení se odhadují na 300 Kč/h. Vyplatí se, aby byly v provozu dvě ordinace zároveň?

**Výsledek:**  $C(1) = 1700$  Kč,  $C(2) = 1285,70$  Kč. Vidíme tedy, že otevření druhé ordinace se vyplatí.