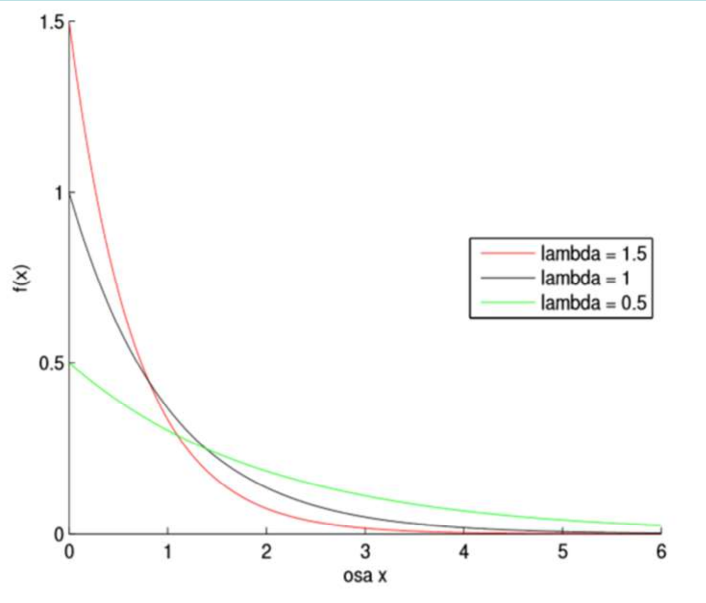
3. Exponenciální rozložení a jeho vlastnosti

3.1. Definice: Spojitá náhodná veličina X má exponenciální rozložení s parametrem $\lambda > 0$, jestliže hustota $\varphi(x)$ má tvar:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

. Zkráceně píšeme $X \sim Ex(\lambda)$.

Průběh hustoty exponenciálního rozložení pro různé hodnoty parametru λ:



3.2. Poznámka: Zkoumáme náhodnou veličinu X, která udává dobu mezi příchody dvou událostí (příchody zákazníků do fronty, příjezdy aut k benzínové čerpací stanici, příchody SMS zpráv, …). Musí být splněny tyto předpoklady:

- Události přicházejí náhodně a nezávisle na sobě.
- V jednom okamžiku může nastat nejvýše jedna událost.
- Pravděpodobnost, že v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ nastane událost, závisí pouze na h, nikoliv na t.
- Střední hodnota počtu událostí, které nastanou za časovou jednotku, je rovna $\lambda > 0$.

Lze odvodit, že:

a) distribuční funkce $\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

b) funkce přežití $\Psi(x) = 1 - \Phi(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$

c) intenzita poruchy (též riziková funkce) $\lambda(x) = -\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$

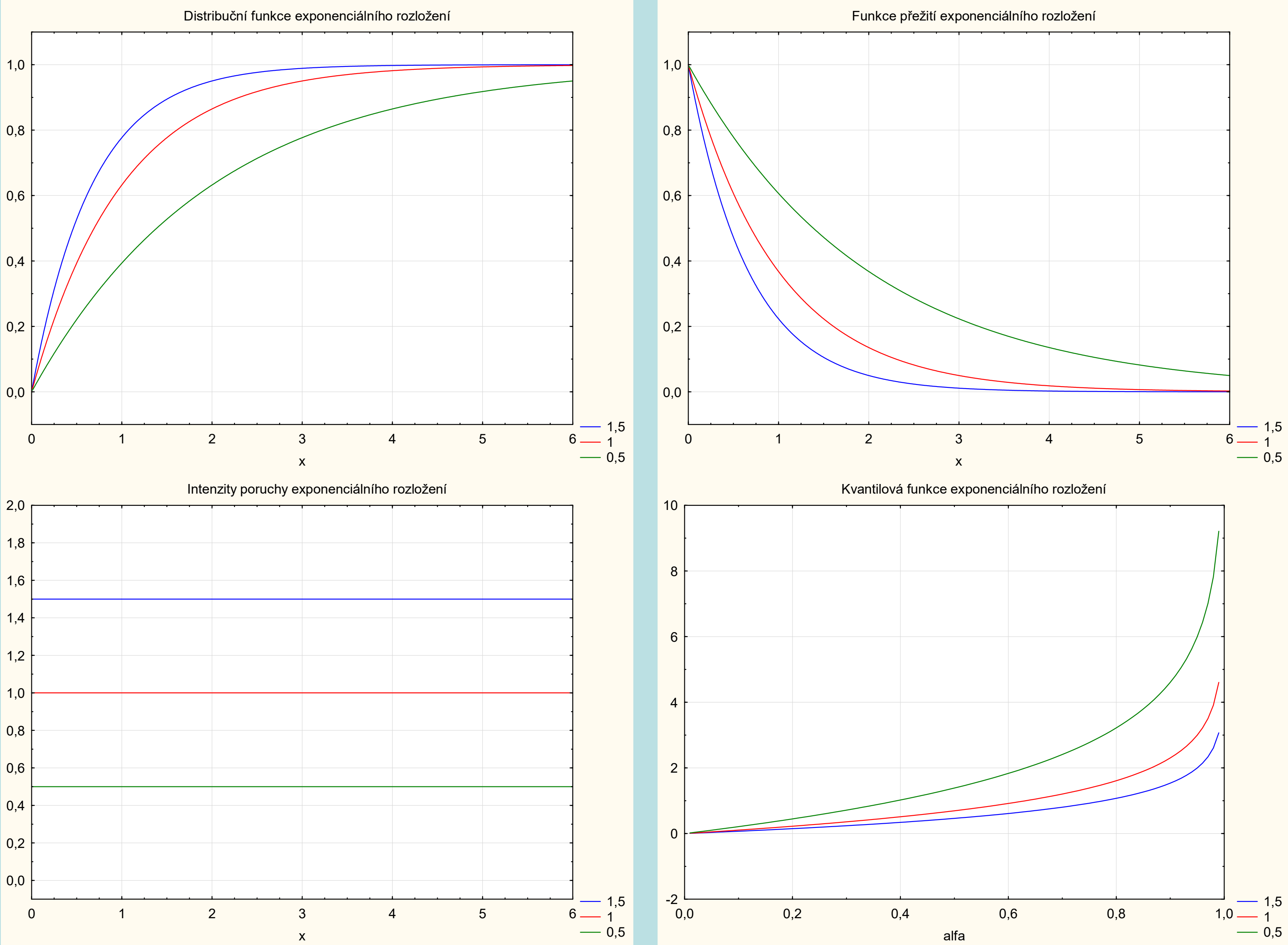
d) kvantilová funkce $\Phi^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha),\ \alpha \in (0,1)$

e) střední hodnota $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

f) rozptyl $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

g) medián $x_{0,50} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Průběhy důležitých funkcí exponenciálního rozložení



3.3. Poznámka: Exponenciální rozložení Ex(λ) je speciálním případem dvouparametrického exponenciálního rozložením Ex(A, λ), kde parametr A > 0 udává dobu, po kterou událost nemůže nastat. Hustota:

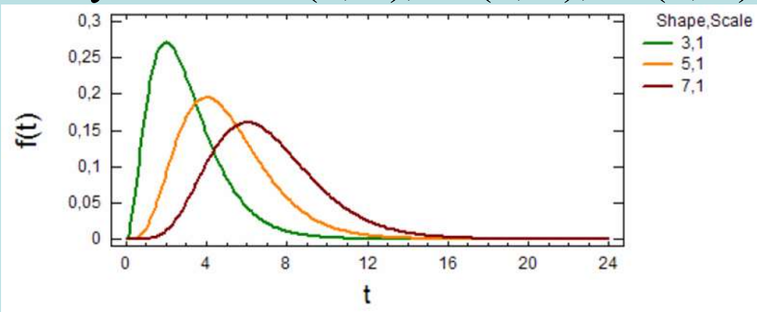
$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-A)} & \text{pro } x > A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Exponenciální rozložení je speciálním případem Erlangova rozložení Er(k, λ) pro k = 1. Náhodná veličina X s rozložením Er(k, λ) vyjadřuje souhrnnou dobu čekání na k-tý výskyt události, která se může dostavit každým okamžikem se stejnou šancí bez ohledu na dosud pročekanou dobu. Přitom $\frac{1}{\lambda}$ je střední hodnota doby čekání od výskytu předešlé události.

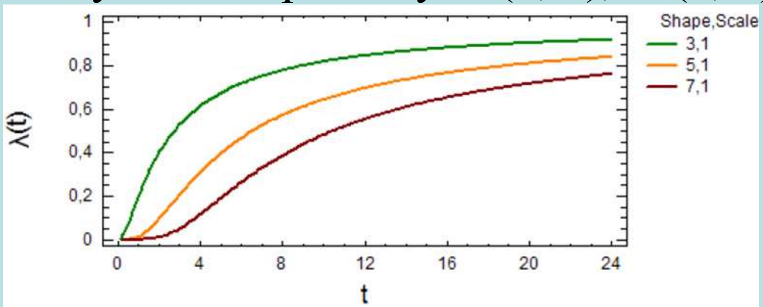
Hustota: $$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(Erlangovo rozložení je speciálním případem gama rozložení, kde první parametr je přirozené číslo.)

Grafy hustot Er(3, 1), Er(5, 1), Er(7, 1):



Grafy intenzit poruchy Er(3, 1), Er(5, 1), Er(7, 1):



Intenzita poruchy Erlangova rozložení je rostoucí funkce, proto je toto rozložení vhodné pro modelování procesů stárnutí.

3.4. Příklad (Praktické využití základních vlastností exponenciálního rozložení)

Dlouhodobým pozorováním v určité prodejně bylo zjištěno, že 40 % zákazníků je obslouženo do 3 minut. Lze předpokládat, že doba čekání se řídí exponenciálním rozložením.

a) Určete parametr λ exponenciálního rozložení.

b) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání na obsluhu.

c) Jaká je doba čekání, kterou polovina osob nepřekročí?

d) Jaké procento zákazníků bude na obsluhu čekat déle než 6 minut?

Řešení: Za časovou jednotku volíme 1 minutu.

Ad a) Je známo, že $\Phi^{-1}(0{,}4) = 3$. Přitom $\Phi^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$, tedy

$$\lambda = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\Phi^{-1}(\alpha)} = -\frac{\ln(1-0{,}4)}{3} = 0{,}1703$$

Ad b) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}1703} = 5{,}87\,\text{min} = 5\,\text{min}\,52\text{s}$

Ad c) Hledáme medián, tedy počítáme $\frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}1703} = 4{,}07\,\text{min} = 4\,\text{min}\,4\text{s}$

Ad d) $P(X > 6) = \Psi(6) = e^{-\lambda\cdot 6} = e^{-0{,}1703\cdot 6} = 0{,}36$.

Znamená to, že 36 % zákazníků bude čekat déle než 6 minut.

3.5. Věta: Nechť $X \sim Ex(\lambda)$. Pak platí: $\forall t > 0, \forall h > 0 : P(X > t + h / X > t) = P(X > h)$

Vysvětlení: Tato věta vysvětluje, proč se exponenciálnímu rozložení říká rozložení bez paměti. Jestliže náhodná veličina X udává dobu do poruchy nějakého zařízení, pak pravděpodobnost, že zařízení, které pracovalo po dobu aspoň t, bude pracovat bez poruchy aspoň po dobu t + h, je stejná jako pravděpodobnost, že zařízení bude pracovat bez poruchy po dobu aspoň h – jako kdyby „zapomnělo“ již odpracovanou dobu t.

Důkaz:

$$P(X > t + h/X > t) = \frac{P(X > t + h \wedge X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t + h)}{P(X > t)} = \frac{\Psi(t + h)}{\Psi(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} =$$

$$= \Psi(h) = P(X > h)$$

3.6. Příklad: Výrobce žárovek udává, že průměrná doba životnosti jeho žárovek je 10 000 h. V rámci své propagační kampaně chce garantovat dobu t, do níž se spálí nejvýše 3 % žárovek. Stanovte tuto dobu za předpokladu, že životnost žárovky se řídí exponenciálním rozložením.

Řešení: $X \sim Ex(\lambda)$, $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 10000 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10000}$. Hledáme t tak, aby platilo:

$$0{,}03 = P(X \le t) = \Phi(t) = 1 - e^{-\frac{t}{10000}} \Rightarrow t = -10000 \cdot \ln 0{,}97 = 304{,}6\ \mathrm{h}$$

3.7. Věta: Nechť $X \sim Ex(\lambda)$. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \lambda X \sim Ex(1)$.
(Rozložení $Ex(1)$ se nazývá standardizované exponenciální rozložení.)

Důkaz: $\Phi_*(y) = P(Y \le y) = P(\lambda X \le y) = P\left(X \le \frac{y}{\lambda}\right) = \Phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, tedy $Y \sim Ex(1)$.

3.8. Věta: Nechť $X \sim Rs(0, 1)$. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = -\ln X \sim Ex(1)$.
Důkaz:

$$\Phi_*(y) = P(Y \le y) = P(-\ln X \le y) = P\left(X \ge e^{-y}\right) = 1 - P\left(X \le e^{-y}\right) = 1 - \Phi\left(e^{-y}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

3.9. Poznámka: Vět 3.7. a 3.8. se využívá při generování realizací náhodné veličiny Y ~ $\mathrm{Ex}(\lambda)$ na počítači: vygenerujeme n náhodných čísel $x_1, \dots, x_n$ ~ Rs(0, 1) a transformujeme je vztahem $y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x_i), i = 1, \dots, n$. Čísla $y_1, \dots, y_n$ jsou realizace náhodné veličiny Y ~ $\mathrm{Ex}(\lambda)$.

3.10. Věta: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim \mathrm{Ex}(\lambda_i)$, i = 1, 2. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \min\{X_1, X_2\} \sim \mathrm{Ex}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Důkaz:

$$\Phi_*(y) = P(Y \le y) = P(\min\{X_1, X_2\} \le y) = P(X_1 \le y \vee X_2 \le y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) =$$

$$= 1 - \Psi_1(y)\Psi_2(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 y}e^{-\lambda_2 y} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} \text{pro } y > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases},$$

tedy $Y \sim \mathrm{Ex}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3.11. Poznámka: Tvrzení věty 3.10. lze zobecnit i na n stochasticky nezávislých veličin $X_1, \dots, X_n$, $X_i \sim \mathrm{Ex}(\lambda_i)$, i = 1, …, n. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\} \sim \mathrm{Ex}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

3.12. Věta: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim Ex(\lambda)$, i = 1, 2. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = X_1 + X_2 \sim Er(2, \lambda)$.

Důkaz:

Podle věty o konvoluci dostáváme:

$$\varphi_*(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1)\varphi_2(y - x_1)dx_1 = \left|x_1 > 0, y - x_1 > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < y\right| = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x_1}\lambda e^{-\lambda(y-x_1)}dx_1 =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda y}\int_0^y dx_1 = \lambda^2 y e^{-\lambda y} \text{ pro } y > 0, = 0 \text{ jinak}$$

Přitom rozložení $Er(2, \lambda)$ má hustotu $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda x)^{2-1}}{(2-1)!}\lambda e^{-\lambda x} = \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

3.13. Poznámka: Tvrzení věty 3.12. lze zobecnit i na n stochasticky nezávislých veličin

$X_1, \ldots, X_n$, $X_i \sim Ex(\lambda)$, i = 1, …, n. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Er(n, \lambda)$.

3.14. Příklad: Pro vrtání z ropné plošiny byl použit model hloubkového vrtáku se čtyřmi hlavicemi. Při poruše jedné hlavice se okamžitě začne používat další, takže se nemusí přerušit vrtání až do chvíle, kdy se pokazí poslední hlavice. Doba do poruchy hlavice se řídí exponenciálním rozložením. Výrobce udává, že průměrná doba do poruchy hlavice je 450 dnů. Předpokládáme, že hloubkový vrták pracuje nepřetržitě. Jaká je pravděpodobnost, že hloubkový vrták bude pracovat ještě po čtyřech letech provozu?

Řešení: Za časovou jednotku zvolíme 1 den. Označme X_i dobu do poruchy i-té hlavice, $X_i \sim Ex(1/450)$, $i = 1, 2, 3, 4$ a $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ celkovou dobu práce vrtáku. Podle poznámky 3.13. se celková doba práce vrtáku řídí rozložením Er(4,1/450), tedy hustota

$\varphi(y) = \dfrac{\left(\dfrac{y}{450}\right)^3}{3!} \cdot \dfrac{1}{450} e^{-\frac{y}{450}}$ pro $y > 0$. Převedeme 4 roky na dny: 4x365 + 1 = 1461 a počítáme:

$$P(Y \geq 1461) = 1 - P(Y < 1461) = 1 - \int_0^{1461} \frac{\left(\frac{y}{450}\right)^3}{3!} \cdot \frac{1}{450} e^{-\frac{y}{450}} dy = \ldots$$

$$= 1 - \mathrm{gamcdf}(1461{,}4{,}450) = 0{,}5921$$

Pravděpodobnost, že hloubkový vrták bude pracovat ještě po čtyřech letech provozu, je 0,5921.

3.15. Věta: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Pak

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Důkaz: $P(X_2 > X_1) = P((X_1, X_2) \in S)$, kde $S = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 > x_1\}$, tedy

$$P((X_1, X_2) \in S) = \iint_S \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_S \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^\infty \left[\int_{x_1}^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} dx_2 \right] dx_1 =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1} \left[-\frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 x_2} \right]_{x_1}^\infty dx_1 = \lambda_1 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_1} dx_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[e^{-x_1(\lambda_1 + \lambda_2)} \right]_0^\infty = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

3.16. Věta: Nechť X ~ Ex(λ). Pak transformovaná náhodná veličina Y = 2λX ~ $\chi^2(2)$.

Důkaz: Hustota rozložení $\chi^2(n)$ je $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ pro } x > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$. V našem případě n = 2,

tedy $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \text{ pro } x > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$. Počítáme distribuční funkci veličiny Y:

$$\Phi_*(y) = P(Y \le y) = P(2\lambda X \le y) = P\left(X \le \frac{y}{2\lambda}\right) = \Phi\left(\frac{y}{2\lambda}\right) = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \text{ pro } y > 0, = 0 \text{ jinak}$$

Derivováním obdržíme hustotu:

$\varphi_*(y) = \dfrac{d\Phi_*(y)}{dy} = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \text{ pro } y > 0, = 0 \text{ jinak}$, tedy Y ~ $\chi^2(2)$.

3.17. Poznámka: Tvrzení věty 3.16. lze zobecnit i na n stochasticky nezávislých veličin $X_1, \ldots, X_n$, X_i ~ Ex(λ), i = 1, …, n. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(2n)$.

3.18. Věta: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení Ex(λ). Označme $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ výběrový průměr. Pak meze 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu $\frac{1}{\lambda}$ jsou:

$$D = \frac{2nM}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}, \quad H = \frac{2nM}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}.$$

Důkaz: Podle poznámky 3.17. náhodná veličina Y = $2\lambda nM \sim \chi^2(2n)$. Z definice 100(1-$\alpha$)% intervalu spolehlivosti dostáváme:

$$\forall\lambda > 0 : 1-\alpha = P\left(\chi^2_{\alpha/2}(2n) < 2\lambda nM < \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)\right) = P\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} < \frac{1}{2\lambda nM} < \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right) =$$

$$= P\left(\frac{2nM}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2nM}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right)$$

3.19. Příklad: V jisté prodejně potravin bylo na základě náhodného výběru 50 zákazníků zjištěno, že průměrná doba obsluhy u pokladny je 30 s. Předpokládejme, že doba obsluhy je náhodná veličina s exponenciálním rozložením. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu doby obsluhy.

Řešení: n = 50, m = 30, α = 0,05

$$d = \frac{2nm}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 30}{\chi^2_{0,975}(100)} = \frac{3000}{129,501} = 23,16$$

$$h = \frac{2nm}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 30}{\chi^2_{0,025}(100)} = \frac{3000}{74,222} = 40,42$$

Střední hodnota doby obsluhy se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v intervalu 23 s až 40 s.

3.20. Poznámka: Pro větší rozsahy náhodných výběrů ($n \geq 30$) lze pro střední hodnotu $\frac{1}{\lambda}$ použít asymptotický 100(1-α)% interval spolehlivosti založený na centrální limitní větě.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení Ex(λ), $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ je výběrový průměr. Pak střední hodnota $E(M) = \frac{1}{\lambda}$ a rozptyl $D(M) = \frac{1}{n\lambda^2}$. Standardizací výběrového průměru dostaneme veličinu $U = \frac{M - E(M)}{\sqrt{D(M)}} = \frac{M - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}} = \frac{\left(M - \frac{1}{\lambda}\right)\sqrt{n}}{\frac{1}{\lambda}} \approx N(0,1)$. Konvergence k rozložení N(0,1) se neporuší, když $\frac{1}{\lambda}$ ve jmenovateli nahradíme M, tedy $U = \frac{\left(M - \frac{1}{\lambda}\right)\sqrt{n}}{M} \approx N(0,1)$.

$$\forall \lambda > 0 : 1 - \alpha \leq P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{\left(M - \frac{1}{\lambda}\right)\sqrt{n}}{M} < u_{1-\alpha/2} \right) = P\left(M - \frac{M}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < \frac{1}{\lambda} < M + \frac{M}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \right)$$, tedy

$$D = M - \frac{M}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2},\ H = M + \frac{M}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

3.21. Příklad: Pro údaje z příkladu 3.19. spočtěte meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu doby obsluhy podle vzorců uvedených v poznámce 3.20.

Řešení: n = 50, m = 30, $\alpha = 0{,}05$

$$d = m - \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 30 - \frac{30}{\sqrt{50}} 1{,}96 = 21{,}68$$

$$h = m + \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 30 + \frac{30}{\sqrt{50}} 1{,}96 = 38{,}32$$

Střední hodnota doby obsluhy se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v intervalu 22 s až 38 s.

3.22. Poznámka: Výhody a nevýhody exponenciálního rozložení v praxi
Výhoda: Exponenciálního rozložení má jednoduché vyjádření hustoty a jeho hustota má průběh, který dobře popisuje řadu reálných dějů.
Nevýhoda: Exponenciální rozložení závisí pouze na jediném parametru, je tedy málo flexibilní. V některých situacích, např. při modelování výše pojistného plnění, špatně modeluje interval nejnižších hodnot a také interval nejvyšších hodnot, protože hustota příliš rychle klesá k nule.

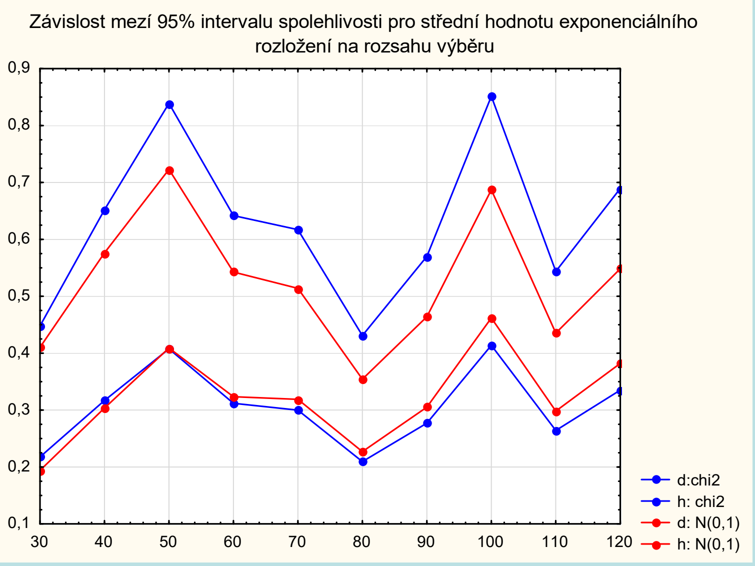
Vzorce pro meze 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu rozložení Ex(λ)

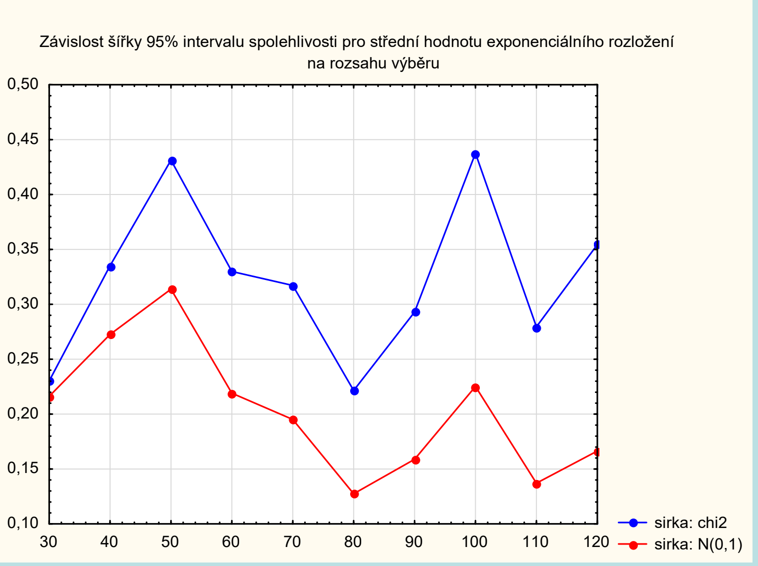
1. způsob: Využití Pearsonova rozložení chí-kvadrát:

$$d = \frac{2nm}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}, \quad h = \frac{2nm}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}$$

2. způsob: Využití standardizovaného normálního rozložení:

$$d = m - \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \quad h = m + \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$$





Souvislost exponenciálního a geometrického rozložení pravděpodobnosti

Geometrické rozložení: Provádíme posloupnost opakovaných nezávislých pokusů, kde pravděpodobnost úspěchu je pro všechny pokusy stejná a je rovna číslu ϑ, $0 < \vartheta < 1$. Zavedeme náhodnou veličinu X, která udává počet neúspěchů před prvním úspěchem.

Pravděpodobnostní funkce:

$\pi(x) = (1-\vartheta)^x \vartheta$ pro x = 0, 1, 2, …, $\pi(x) = 0$ jinak.

Distribuční funkce:

$\Phi(x) = \sum_{y=0}^{x} \pi(y) = \sum_{y=0}^{x} (1-\vartheta)^y \vartheta = \vartheta \frac{1-(1-\vartheta)^x}{1-(1-\vartheta)} = 1-(1-\vartheta)^x$ pro x = 0, 1, 2, …, $\Phi(x) = 0$ jinak

Funkce přežití: $\Psi(x) = 1 - \Phi(x) = (1-\vartheta)^x$ pro x = 0, 1, 2, …, $\Psi(x) = 1$ jinak

Položme nyní $\vartheta = \frac{\lambda}{n}$, kde $\lambda > 0$, n je přirozené, přičemž $0 < \frac{\lambda}{n} < 1$.

Počítáme $\lim_{n\to\infty} \Psi(nx) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nx} = e^{-\lambda x}$ pro $x > 0$.

Vidíme tedy, že jsme limitním přechodem dostali funkci přežití rozložení Ex(λ).

Ilustrace pro pravděpodobnostní funkci rozložení Ge(0,5) a hustotu rozložení Ex(0.5)