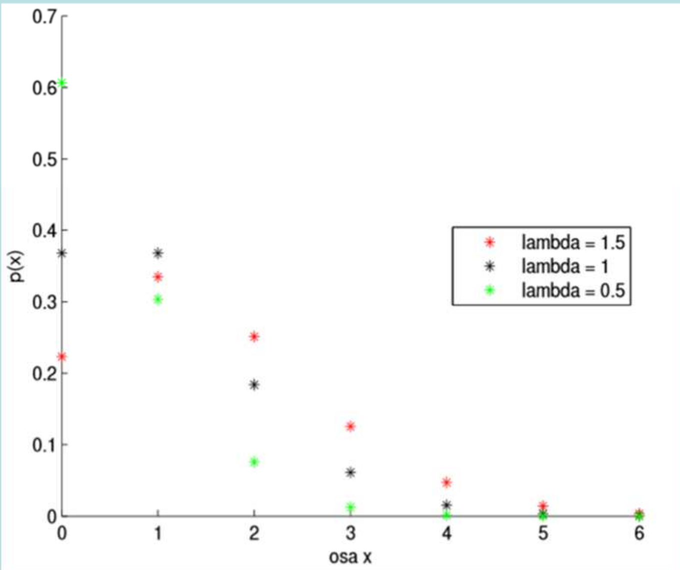
4. Poissonovo rozložení a jeho vlastnosti

4.1. Definice: Diskrétní náhodná veličina X má Poissonovo rozložení s parametrem $\lambda > 0$, jestliže pravděpodobnostní funkce $\pi(x)$ má tvar:

$$\pi(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \text{ pro } x = 0,1,2,\dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

. Zkráceně píšeme $X \sim Po(\lambda)$.

Průběh pravděpodobnostní funkce Poissonova rozložení pro různé hodnoty parametru λ:



4.2. Poznámka: Lze odvodit, že náhodná veličina X~ $Po(\lambda)$ má tyto číselné charakteristiky:

a) střední hodnota $E(X) = \lambda$

b) rozptyl $D(X) = \lambda$

c) šikmost $\alpha_3(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

d) špičatost $\alpha_4(X) = \frac{1}{\lambda}$

4.3. Poznámka: Náhodná veličina X~ $Po(\lambda)$ udává počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu resp. jednotkové oblasti, přičemž tyto události nastávají náhodně, jednotlivě a nezávisle na sobě. Parametr $\lambda > 0$ udává střední hodnotu (i rozptyl) počtu událostí.

Poissonovým rozložením se řídí např.

- počet výzev, které dojdou na TÚ za jednotkový časový interval
- počet mikroorganizmů v jednotkové oblasti zorného pole mikroskopu
- počet požadavků v systému hromadné obsluhy za jednotkový časový interval
- atd.

Upozornění: Pokud X udává počet událostí, které nastanou v časovém intervalu délky t a střední hodnota počtu událostí v jednotkovém časovém intervalu je λ, pak X~ $Po(\lambda t)$.

4.4. Věta: Nechť X ~ $Po(\lambda)$ a Y ~ $Bi(n, \vartheta_n)$, přičemž $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n = 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} n\vartheta_n = \lambda$. Pak pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y konverguje pro n → ∞ k pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

Důkaz:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{y}\vartheta_n{}^y(1-\vartheta_n)^{n-y} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{y!(n-y)!}\vartheta_n{}^y(1-\vartheta_n)^{n-y} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{y!(n-y)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^y\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y} =$$

$$= \frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-y+1)}{n^n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y} = \frac{\lambda^y}{y!}\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{y-1}{n}\right)\right]\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-y} =$$

$$= \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}$$

Upozornění: Binomické rozložení můžeme dobře aproximovat Poissonovým rozložením, když pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu je velmi malá ($\vartheta \leq 0{,}1$) a zároveň počet pokusů je dostatečně velký ($n \geq 30$).

4.5. Příklad: Předpokládejme, že při pěstování rostlin hrachu je pravděpodobnost uhynutí rostliny 0,002. Jaká je pravděpodobnost, že při pěstování 1000 rostlin
a) neuhyne žádná rostlina, b) uhynou nejvýše 4 rostliny?

Řešení: Označme Y náhodnou veličinu, která udává počet uhynulých rostlin hrachu.
Z podmínek úlohy plyne, že Y ~ $\mathrm{Bi}(1000;0{,}002)$.
Přesný výpočet:

a) $$P(Y=0)=\binom{1000}{0}0{,}002^{0}0{,}998^{1000-0}=\mathrm{binopdf}\,(0{,}1000{,}0.002)=0{,}13506452$$

b) $$P(Y\le 4)=\sum_{y=0}^{4}\binom{1000}{y}0{,}002^{y}0{,}998^{1000-y}=\mathrm{binocdf}\,(4{,}1000{,}0.002)=0{,}94752761$$

Aproximace Poissonovým rozložením: podmínky $n \ge 30$ a $\vartheta \le 0{,}1$ jsou splněny. Přitom $\lambda = n\cdot\vartheta = 1000\cdot 0{,}002 = 2$.

a) $$P(Y=0)\approx\frac{2^{0}}{0!}e^{-2}=\mathrm{poisspdf}\,(0{,}2)=0{,}13533528$$

b) $$P(Y\le 4)\approx\sum_{y=0}^{4}\frac{2^{y}}{y!}e^{-2}=\mathrm{poisscdf}\,(4{,}2)=0{,}94734699$$

4.6. Věta: Nechť X ~ $Po(\lambda)$. Pak pro modus $\hat{x}$ platí: $\lambda - 1 \le \hat{x} \le \lambda$. Je-li λ přirozené číslo, pak existují dvě modální hodnoty. Není-li λ přirozené číslo, je Poissonovo rozložení unimodální.

Důkaz: Protože modus je nejpravděpodobnější hodnota, musí současně vyhovovat dvěma nerovnostem:

$\pi(\hat{x}) \ge \pi(\hat{x}-1) \wedge \pi(\hat{x}) \ge \pi(\hat{x}+1)$, tj. $\dfrac{\pi(\hat{x}-1)}{\pi(\hat{x})} \le 1 \wedge \dfrac{\pi(\hat{x}+1)}{\pi(\hat{x})} \le 1$.

Dosadíme za pravděpodobnostní funkci a postupně upravujeme:

$$\frac{\dfrac{\lambda^{\hat{x}-1}}{(\hat{x}-1)!}e^{-\lambda}}{\dfrac{\lambda^{\hat{x}}}{\hat{x}!}e^{-\lambda}} \le 1 \wedge \frac{\dfrac{\lambda^{\hat{x}+1}}{(\hat{x}+1)!}e^{-\lambda}}{\dfrac{\lambda^{\hat{x}}}{\hat{x}!}e^{-\lambda}} \le 1$$

$\dfrac{\hat{x}}{\lambda} \le 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\hat{x}+1} \le 1 \Rightarrow \hat{x} \le \lambda \wedge \hat{x} \ge \lambda - 1$, tj. $\lambda - 1 \le \hat{x} \le \lambda$.

4.7. Příklad: K holiči chodí průměrně 6 zákazníků za 1 h. Určete nejpravděpodobnější počet zákazníků u holiče během půl hodiny a určete pravděpodobnost tohoto počtu.

Řešení: Náhodná veličina X udává počet zákazníků u holiče během 1/2 h, X ~ $Po(3)$. Protože λ je přirozené číslo, existují dvě modální hodnoty, a to 2 a 3. Jejich pravděpodobnosti:

$$P(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 4{,}5e^{-3} = 0{,}224$$

$$P(X = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 4{,}5e^{-3} = 0{,}224$$

4.8. Věta: Nechť X ~ Po(λ). Pak pro $\forall x = 1,2,3,\cdots$ platí: $x\pi(x) = \lambda\pi(x-1)$. Pravděpodobnostní funkci Poissonova rozložení lze tedy vyjádřit rekurzívně:

$\pi(x) = \dfrac{\lambda}{x}\pi(x-1)$ pro x = 1, 2, 3, …, $\pi(0) = e^{-\lambda}$

Důkaz:

$$x\pi(x) = x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^x}{(x-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\pi(x-1)$$

4.9. Věta: Nechť X ~ Po(λ). Pak pro $\forall x = 0,1,2,\cdots$ platí: $\Phi(x) = \dfrac{\Gamma(x+1,\lambda)}{\Gamma(x+1)}$, kde

$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $\Gamma(a,\lambda) = \int_\lambda^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$,

pro přirozené a: $\Gamma(a) = (a-1)!$, $\Gamma(a,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^{a-1} + (a-1)e^{-\lambda}\lambda^{a-2} + \ldots + (a-1)!e^{-\lambda}$

Důkaz:

$$\frac{\Gamma(x+1,\lambda)}{\Gamma(x+1)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{x!} + x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{x!} + \ldots + x!\frac{e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda} + \ldots + e^{-\lambda} =$$

$$= \pi(x) + \pi(x-1) + \ldots + \pi(0) = \Phi(x)$$

4.10. Věta: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim Po(\lambda_i)$, i = 1, 2. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Důkaz:

Podle věty o konvoluci dostáváme:

$$\pi_*(y) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \pi_1(x_1)\pi_2(y - x_1) = \left| x_1 \geq 0, y - x_1 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x_1 \leq y \right| = \sum_{x_1=0}^{y} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{y-x_1}}{(y-x_1)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{y!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x_1=0}^{y} \binom{y}{x_1} \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{y-x_1} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^y}{y!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \text{ pro } y = 0, 1, 2, \ldots, = 0 \text{ jinak}$$

.

Vidíme, že $Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

4.11. Poznámka: Tvrzení věty 4.10. lze zobecnit i na n stochasticky nezávislých veličin $X_1, \ldots, X_n$, $X_i \sim Po(\lambda_i)$, i = 1, …, n. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$. Znamená to, že Poissonovo rozložení je uzavřené vzhledem k operaci sčítání.

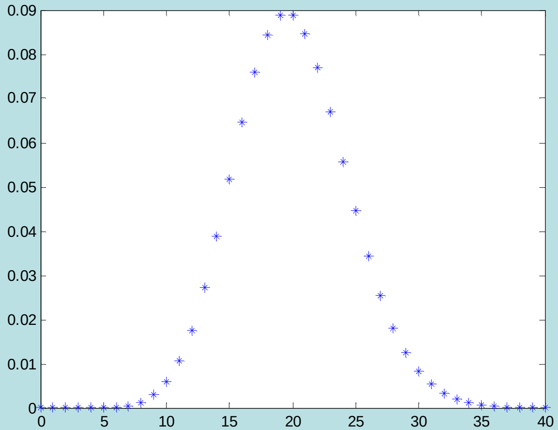
4.12. Věta: Nechť X ~ $Po(\lambda)$, přičemž λ je přirozené číslo větší než 9. Pak rozložení náhodné veličiny X lze aproximovat rozložením N(λ, λ).

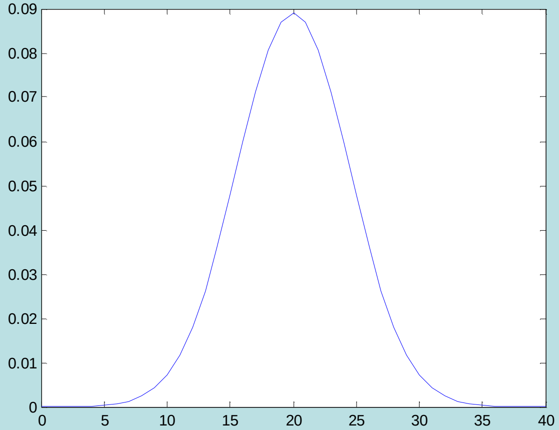
Důkaz: Podle poznámky 4.11. je $X = \sum_{i=1}^{\lambda} X_i$, přičemž stochasticky nezávislé náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_\lambda$ se řídí rozložením Po(1), $E(X_i) = 1$, $D(X_i) = 1$, i = 1, …, λ. Přitom

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{\lambda} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\lambda} E(X_i) = \lambda, \quad D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{\lambda} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\lambda} D(X_i) = \lambda.$$

Podle CLV dostáváme, že veličina $X \approx N(\lambda, \lambda)$.

Graf pravděpodobnostní funkce Po(20) Graf hustoty N(20,20)





4.13. Věta: Nechť X ~ $Po(\lambda)$, přičemž λ je přirozené číslo větší než 9. Pak pro nezáporná celá čísla a, b, a < b platí:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$, kde Φ je distribuční funkce rozložení N(0, 1).

Důkaz:

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \le U \le \frac{b-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = P\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \le U \le \frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

4.14. Poznámka: Aproximace Poissonova rozložení normálním rozložením se zlepší, když použijeme tzv. opravu na nespojitost:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-\lambda+\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda-\frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

4.15. Příklad: Nechť X ~ $Po(12)$. Pomocí aproximace normálním rozložením stanovte $P(8 \le X \le 20)$.

Řešení:

$$P(8 \le X \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20-12+\frac{1}{2}}{\sqrt{12}}\right) - \Phi\left(\frac{8-12-\frac{1}{2}}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(2{,}45) - \Phi(-1{,}3) =$$

$$= \Phi(2{,}45) - 1 + \Phi(1{,}3) = 0{,}99286 - 1 + 0{,}9034 = 0{,}89606$$

Pro porovnání provedeme přesný výpočet:

$$P(8 \le X \le 20) = \sum_{x=8}^{20} \frac{12^x}{x!} e^{-12} = \text{poisscdf}\,(20{,}12) - \text{poisscdf}\,(7{,}12) = 0{,}8989$$

4.16. Věta: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení Po(λ), přičemž $n\lambda > 9$. Označme $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ výběrový průměr. Pak meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ jsou:

$$D = M - \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}, \quad H = M + \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}$$

Důkaz: Podle centrální limitní věty $M \approx N(E(M), D(M))$, kde E(M) = λ, $D(M) = \frac{\lambda}{n}$.

Standardizací M dostaneme $U = \frac{M-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \approx N(0,1)$. Konvergence k N(0,1) se neporuší, když λ ve jmenovateli nahradíme M, tedy $U = \frac{M-\lambda}{\sqrt{\frac{M}{n}}} \approx N(0,1)$. Pak platí:

$$\forall \lambda > 0 : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\lambda}{\sqrt{\frac{M}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(M - \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2} < \lambda < M + \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

4.17. Poznámka: Meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ se zpřesní, když použijeme tzv. opravu na nespojitost:

$$D = M - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}\,,\quad H = M + \frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{M}{n}}u_{1-\alpha/2}\,.$$

4.18. Příklad: Předpokládáme, že při výrobě určité tkaniny je počet kazů připadajících na 100 m této tkaniny náhodná veličina s rozložením Po(λ). Při kontrole 25 balíků, z nichž každý obsahoval 100 m této tkaniny, bylo zjištěno, že celkový počet kazů je 30. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů připadajících na jeden balík.
Řešení: n = 25, m = 30/25 = 1,2, α = 0,05.

$$d = m - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1{,}2 - \frac{1}{50} - \sqrt{\frac{1{,}2}{25}}1{,}96 = 0{,}75$$

$$h = m + \frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1{,}2 + \frac{1}{50} + \sqrt{\frac{1{,}2}{25}}1{,}96 = 1{,}65$$

S pravděpodobností aspoň 95 % lze očekávat, že střední hodnota počtu kazů připadajících na jeden balík se nachází v mezích od 0,75 do 1,65.

4.19. Věta: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení Po(λ). Označme $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ realizaci výběrového průměru. Pak meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ jsou: $d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm)$, $h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2nm+2)$.

Důkaz: Viz HÁTLE JAROSLAV - LIKEŠ JIŘÍ. Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, 2. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1974. 463 s.

Upozornění: Podle vztahů uvedených ve větě 4.19. počítá MATLAB pomocí funkce poissfit meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ.

4.20. Příklad: Pro údaje z příkladu 4.16. najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů připadajících na jeden balík.

Řešení: n = 25, m = 30/25 = 1,2, α = 0,05.

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm) = \frac{1}{50}\chi^2_{0,025}(60) = \frac{1}{50}40{,}48 = 0{,}81$$

$$h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2nm+2) = \frac{1}{50}\chi^2_{0,975}(62) = \frac{1}{50}85{,}65 = 1{,}71$$

S pravděpodobností aspoň 95 % lze očekávat, že střední hodnota počtu kazů připadajících na jeden balík se nachází v mezích od 0,81 do 1,71.

4.21. Věta: (Souvislost exponenciálního a Poissonovo rozložení)
Nechť náhodná veličina X, udává počet událostí za x jednotek času, přičemž za časovou jednotku nastává průměrně λ událostí, se řídí rozložením Po(λx). Pak náhodná veličina Y, která udává dobu mezi dvěma po sobě následujícími událostmi, se řídí rozložením Ex(λ).

Důkaz:

$$X \sim Po(\lambda x) \Rightarrow P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & \text{pro } k = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Pravděpodobnost, že za x jednotek času nenastane žádná událost, je stejná jako pravděpodobnost, že na událost budeme čekat více než x časových jednotek, tedy

$P(Y > x) = P(X = 0) = e^{-\lambda x} = 1 - \Phi(x)$, kde Φ(x) je distribuční funkce rozložení Ex(λ).

4.22. Příklad: V době oběda přijde do restaurace průměrně 20 hostů za hodinu. Předpokládáme, že počet hostů má Poissonovo rozložení. Vypočtěte pravděpodobnost, že v průběhu 5 minut nepřijde do restaurace nikdo. Úlohu řešte využitím a) Poissonova rozložení, b) exponenciálního rozložení.

Řešení:

Časová jednotka = 5 min = 1/12 h

Ad a) X – počet hostů, kteří přijdou do restaurace za časovou jednotku, X ~ Po(λ), $\lambda = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

$$P(X = 0) = e^{-\frac{5}{3}} = 0{,}1889$$

Ad b) Y – doba, která uplyne mezi dvěma příchody hostů, Y ~ Ex(λ), $\lambda = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

Nepřijde-li během časové jednotky 5 min nikdo, pak to znamená, že doba mezi dvěma příchody je větší než 1.

$$P(Y > 1) = e^{-\frac{5}{3}} = 0{,}1889$$

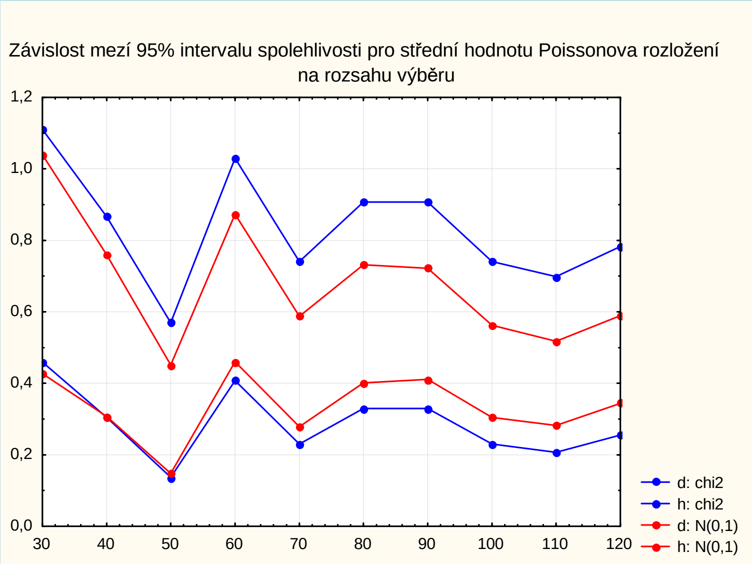
4.23. Vzorce pro meze 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu rozložení Po(λ)

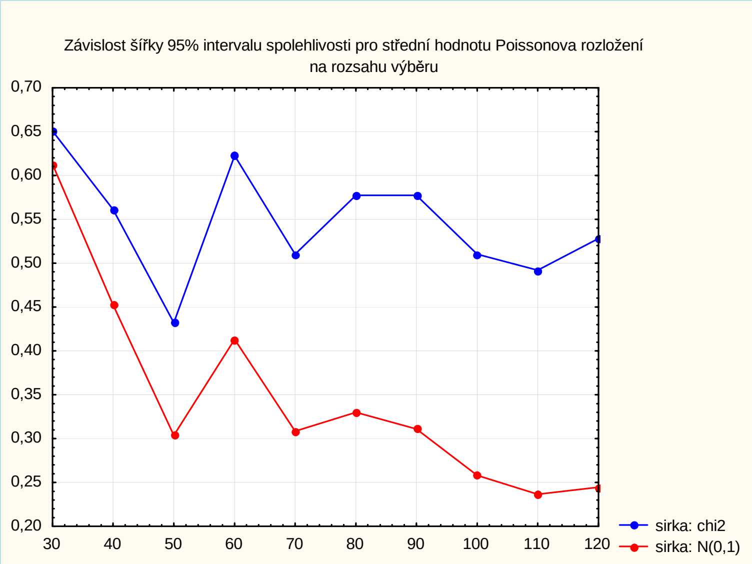
1. způsob: Využití Pearsonova rozložení chí-kvadrát:

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm),\ h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2nm+2)$$

2. způsob: Využití standardizovaného normálního rozložení:

$$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2},\ h = m + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2}$$





4.24. Příklad: Počet hostů v restauraci se řídí Poissonovým rozložením, Z ~ Po(λ). Pravděpodobnost, že náhodně vybraný host si objedná nápoj, je p (0 < p < 1) a pravděpodobnost, že neobjedná, je q = 1 – p. Náhodná veličina X udává počet hostů, kteří si objednají nápoj a náhodná veličina Y udává počet hostů, kteří si neobjednají nápoj.
a) Najděte marginální rozložení náhodných veličin X a Y.
b) Najděte simultánní rozložení náhodného vektoru (X, Y).

Řešení: Je zřejmé, že X + Y = Z. Za podmínky, že Z = n, se X řídí rozložením Bi(n, p) a Y se řídí rozložením Bi(n, q).

Ad a) Při hledání pravděpodobnostní funkce veličiny X resp. Y použijeme vzorec úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) P(A/H_i)$$

Označíme A = {X = k}, H_n ={Z = n}, n = 0, 1, 2, … Pak

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z = n) P(X = k/Z = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = |n = n - k + k| =$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = |j = n - k| = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$$

Vidíme tedy, že X ~ Po(λp). Analogicky lze odvodit, že Y ~ Po(λq).

Ad b) Při hledání simultánní pravděpodobnostní funkce vektoru (X, Y) opět použijeme vzorec pro úplnou pravděpodobnost, kde položíme A = {X = i $\wedge$ Y = j}, H_n ={Z = n}, n = 0, 1, 2, … Pak

$$P(X = i \wedge Y = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z = n) P(X = i \wedge Y = j / Z = n)$$

Uvědomíme si, že P(X = i $\wedge$ Y = j/Z = n) = 0, když Z $\neq$ i + j . Pak

$$P(X = i \wedge Y = j) = P(Z = i + j) P(X = i \wedge Y = j / Z = i + j) = P(Z = i + j) P(X = i / Z = i + j) =$$

$$= \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} e^{-\lambda} \binom{i+j}{i} p^i q^j = \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} e^{-\lambda} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} p^i q^j = \left| e^{-\lambda} = e^{-\lambda(p+1-p)} = e^{-\lambda p} e^{-\lambda q} \right| = \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda q)^i}{j!} e^{-\lambda q} =$$

$$= P(X = i) P(Y = j)$$

Simultánní pravděpodobnostní funkce je rovna součinu marginálních pravděpodobnostních funkcí, tedy náhodné veličiny X a Y jsou stochasticky nezávislé.