Základní poznatky o markovských řetězcích se spojitým časem

Definice markovského řetězce se spojitým časem

Nechť (Ω, A, P) je pravděpodobnostní prostor,

$T = \langle 0, \infty)$ je indexová množina, jejíž prvky nazveme okamžiky a

J = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} je nejvýše spočetná množina stavů (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že J = {0, 1, 2, ...} nebo J = {0,1, ..., n}).

Stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$ definovaný na měřitelném prostoru (Ω, A), jehož složky X_t nabývají hodnot z množiny stavů J, se nazývá markovský řetězec (se spojitým časem), jsou-li splněny následující podmínky:

a) $\forall j \in J\, \exists t \in T : P(X_t = j) > 0$ (vyloučení nepotřebných stavů)

b) $\forall t_0 < t_1 < \ldots < t_n \in T\, \forall j_0, j_1, \ldots, j_n \in J : P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_{t_0} = j_0) = P(X_{t_n} = j_n / X_{t_{n-1}} = j_{n-1})$

za předpokladu, že $P(X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \wedge X_{t_{n-2}} = j_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_{t_0} = j_0) > 0$ (markovská vlastnost – budoucí chování markovského řetězce závisí pouze na přítomném stavu a nikoliv na stavech minulých).

Vysvětlení: Markovské řetězce se spojitým časem modelují fyzikální či jiné soustavy, které mohou v libovolném okamžiku náhodně přejít do některého ze svých možných stavů. Markovská vlastnost znamená, že to, do jakého stavu se soustava dostane při následující změně, závisí pouze na tom, v jakém stavu se soustava právě nachází a nezávisí na stavech předchozích. Např. sledujeme-li během pracovní doby provoz automatických strojů v dílně, náhodná veličina X_t, $t \in \langle 0, T)$ je počet strojů, které v okamžiku t nepracují (jsou opravovány nebo čekají na opravu).

Označení:

Jev $\{X_t = j\}$ – markovský řetězec je v okamžiku t ve stavu j.

$P(X_t = j) = p_j(t)$ – absolutní pravděpodobnost stavu j v okamžiku t.

$\mathbf{p}(t) = (...., p_j(t), ...)$ – vektor absolutních pravděpodobností.

$P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(t, t+h)$ – pravděpodobnost přechodu ze stavu i v okamžiku t do stavu j v okamžiku t+h $\mathbf{P}(t, t+h) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}(t, t+h) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ - matice pravděpodobností přechodu mezi okamžiky t, t+h.

$P(X_0 = j) = p_j(0)$ – počáteční pravděpodobnost stavu j.

$\mathbf{p}(0) = (...., p_j(0), ...)$ – vektor počátečních pravděpodobností.

Definice HMŘ se spojitým časem

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je markovský řetězec se spojitým časem. Řekneme, že tento řetězec je homogenní, jestliže platí:

$$\forall i, j \in J \; \forall t, h \in T : P(X_{t+h} = j / X_t = i) = p_{ij}(h).$$

Vysvětlení: Znamená to, že pravděpodobnosti přechodu $P(X_{t+h} = j / X_t = i)$ – pokud existují – závisí pouze na časovém přírůstku h a nezávisí na časovém okamžiku t.

Matice pravděpodobností přechodu **P**(t,t+h) se pak značí **P**(h) a nazývá se matice přechodu za časový přírůstek h. Pro HMŘ se spojitým časem tedy existuje celý systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Je zvykem definovat **P**(0) = **I**.

Vlastnosti HMŘ se SČ (CH-K rovnice a zákon evoluce)

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) a systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak pro $\forall h, g \in T$ platí:

a) **P**(h+g) = **P**(h) **P**(g) (Chapmanova – Kolmogorovova rovnice)

b) **p**(h) = **p**(0) **P**(h) (zákon evoluce)

Definice matice intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem se systémem matic přechodu $\{\mathbf{P}(h), h \in T\}$. Pak definujeme:

a) $\forall i, j \in J: \quad q_{ij} = \lim_{h \to 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$ - intenzita přechodu ze stavu i do stavu j

b) $\forall i \in J: \quad q_i = \lim_{h \to 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}$ - intenzita výstupu ze stavu i.

Matice **Q** = $(q_{ij})_{i,j \in J}$, kde $q_{ii} = -q_i$, se nazývá matice intenzit přechodu HMŘ se spojitým časem.

Vysvětlení: Matice **Q** je charakterizována tím, že $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} < 0$ a součet prvků v každém řádku je nulový. Je to kvazistochastická matice.

Matici intenzit přechodu lze graficky vyjádřit pomocí přechodového diagramu. Je to ohodnocený orientovaný graf, kde

a) vrcholy jsou stavy, b) hrany odpovídají nenulovým intenzitám přechodu

c) ohodnocení hran je rovno těmto intenzitám. Hrany, které nejsou smyčkami, mají kladné ohodnocení ($q_{ij} > 0$) a smyčky mají záporné ohodnocení ($q_{ii} < 0$).

Definice stacionárního vektoru HMŘ se SČ

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$. Stochastický vektor **a** takový, že pro $\forall t \in T$ platí **a** = **aP**(t), se nazývá stacionární vektor (stacionární rozložení) daného řetězce.

Výpočet stacionárního vektoru pomocí matice intenzit přechodu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je HMŘ se SČ, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in J}$.

Jestliže existuje $t \in T$ tak, že matice **P**(t) je regulární (tj. všechny její prvky jsou kladné), pak existuje stacionární vektor daného řetězce a je dán vztahem: **aQ** = **0**. Toto řešení je jediné.

Kolmogorovovy systémy a systém evolučních diferenciálních rovnic

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má systém matic přechodu $\{\mathbf{P}(t); t \in T\}$, systém vektorů absolutních pravděpodobností $\{\mathbf{p}(t); t \in T\}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0)$ a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q}$. Pak platí:

a) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ (Kolmogorovův systém prospektivních diferenciálních rovnic)

b) $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ s počáteční podmínkou $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ (Kolmogorovův systém retrospektivních diferenciálních rovnic)

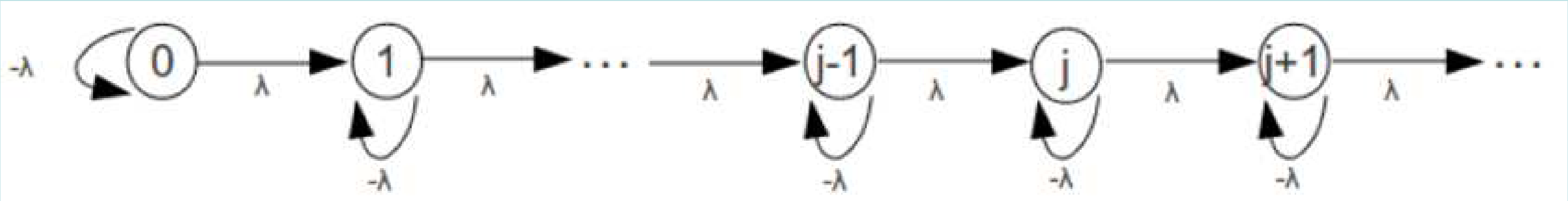
c) $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$ s počáteční podmínkou $\mathbf{p}(0)$ = daný stochastický vektor (systém evolučních diferenciálních rovnic).

Definice Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$ kde $\lambda > 0$ je konstanta, nazývá se intenzita.

Přechodový diagram:



Tento HMŘ se nazývá Poissonův proces (s parametrem λ). (Vidíme, že v Poissonově procesu je možné jen setrvání v dosavadním stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.)

Pravděpodobnostní rozložení složek Poissonova procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ. Pak platí:

$$\forall t \in T \ \forall j \in J : p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} .$$

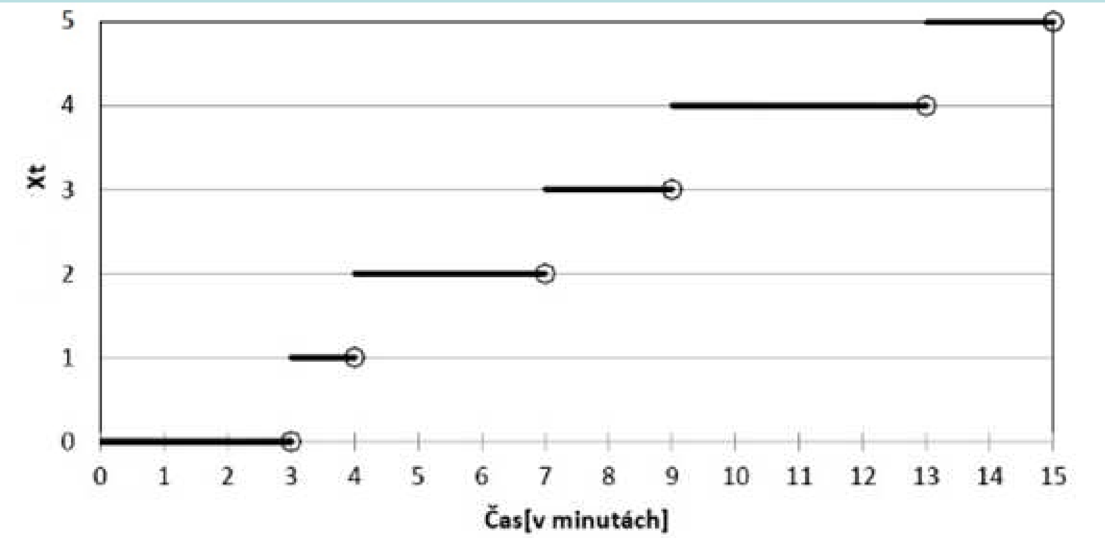
Pravděpodobnosti přechodu v Poissonově procesu

Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je Poissonův proces s parametrem λ. Pak platí:

$$\forall t \in T \ \forall i, j \in J : p_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \text{ pro } j \geq i \\ 0 \text{ pro } j < i \end{cases} .$$

Grafické znázornění realizací Poissonova procesu

Předpokládejme, že během 15 minut zaznamenáváme příchozí hovory do informačního střediska. První zákazník volal 3 minuty po zahájení sledování, další zákazníci pak 4, 7, 9 a 13 minut po zahájení sledování. Během sledovaných 15 minut tedy nastalo 5 příchozích hovorů.



Vysvětlení: Náhodná veličina X_t, která udává např. počet zákazníků, kteří přijdou do fronty v intervalu $\left(0,t\right\rangle$, se řídí rozložením Po(λt). Střední hodnota počtu událostí, které nastanou v intervalu $\left(0,t\right\rangle$, je rovna číslu λt, tedy konstanta λ představuje střední hodnotu počtu událostí, které nastanou za jednotkový časový interval. Proto se λ nazývá intenzita procesu.

Čísla $p_j(t)$ udávají pravděpodobnosti, že v intervalu $\left(0,t\right\rangle$ nastalo právě j událostí.

Číslo $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ udává pravděpodobnost, že v intervalu $\left(0,t\right\rangle$ nenastala žádná událost.

Označíme-li S dobu čekání na změnu mezi stavy (tj. dobu čekání na příchod události resp. dobu setrvání ve stavu), pak $P(S > t) = e^{-\lambda t}$, tedy $P(S \le t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$. To znamená, že je-li rozložení počtu událostí, které nastaly v intervalu $\left(0,t\right\rangle$ Poissonovo, je rozložení doby čekání na změnu resp. doby setrvání ve stavu exponenciální.

Definice procesu vzniku a zániku

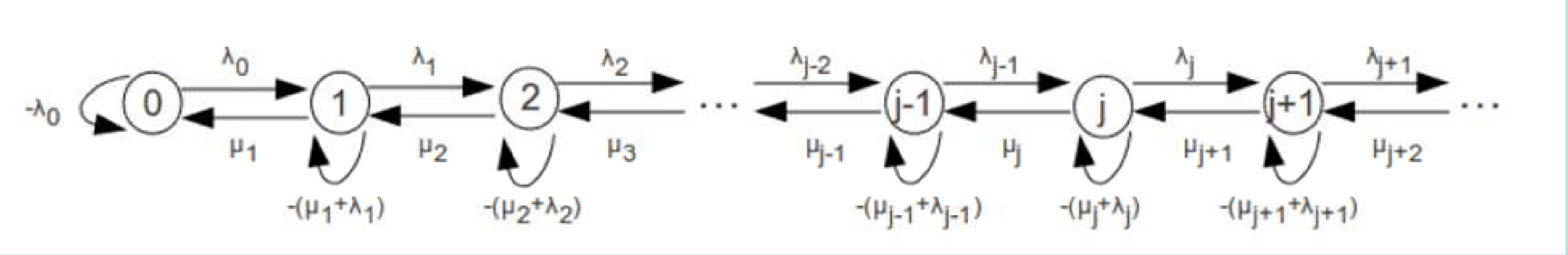
Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je homogenní markovský řetězec se spojitým časem, který má množinu stavů

J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$, kde $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,2,\dots$ a $\mu_j > 0,\ j = 1,2,\dots$ jsou konstanty.

Tento řetězec se nazývá proces vzniku a zániku (resp. množení a úmrtí).

Přechodový diagram:



Upozornění: Je zřejmé, že Poissonův proces je speciálním případem procesu vzniku a zániku, v němž

$\mu_j = 0$, j = 1, 2, … a $\lambda_j = \lambda$, j = 0, 1, 2, …

Vysvětlení:
Proces vzniku a zániku modeluje kolísání rozsahu souboru objektů v čase za předpokladu, že

a) v náhodných okamžicích vstupují do tohoto souboru nové objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ vstoupí do souboru rozsahu j nový objekt, je $\lambda_j h + o(h)$, kde $\lambda_j > 0$ je intenzita vstupu do stavu j;

b) v náhodných okamžicích vystupují z tohoto souboru jiné objekty, přičemž pravděpodobnost, že v intervalu $\left(t, t+h\right\rangle$ vystoupí ze souboru rozsahu j jeden objekt, je $\mu_j h + o(h)$, kde $\mu_j > 0$ je intenzita výstupu ze stavu j;

c) vstupy a výstupy objektů jsou stochasticky nezávislé jevy;

d) během krátkého časového intervalu zůstává rozsah souboru týž nebo se jedničku zvětší či zmenší.

6. Základní pojmy teorie hromadné obsluhy (THO)

6.1. Motivace

THO je matematická disciplína, která se zabývá matematickým modelováním činnosti systému hromadné obsluhy (SHO), tj. systému zákazník – obslužná linka – obsluha. THO se používá pro modelování komunikačních, dopravních, obchodních a zdravotnických systémů a výrobních procesů. Počátky THO spadají do 30. let 20. století a jsou spjaty především s modelováním provozu telefonních ústředen.

6.2. Základní pojmy

Základní jednotkou SHO je trojice zákazník – obslužná linka – obsluha.

Zákazník je subjekt, který vyžaduje vyřízení svého požadavku. Např. zákazník je telefonní účastník, který vyžaduje uskutečnění telefonního spojení.

Obslužná linka je osoba nebo zařízení, které zpracovává požadavky zákazníků, např. to může být telefonní ústředna.

Obsluha je činnost, která vede k uspokojení požadavku zákazníka, např. spojení s volaným účastníkem.

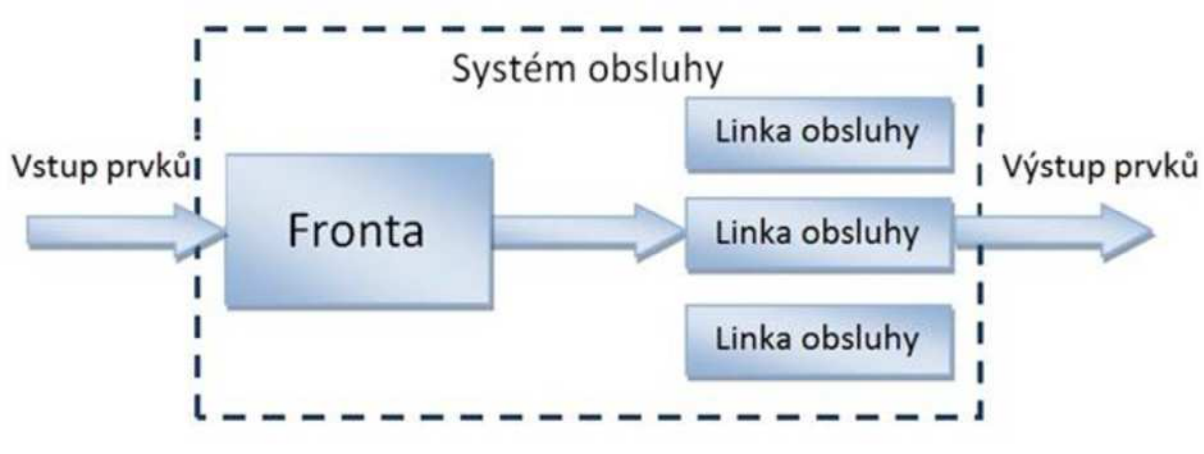
Do SHO přicházejí zákazníci ve **vstupním proudu**, což je posloupnost okamžiků příchodů zákazníků do SHO. Okamžiky příchodů mohou být deterministické nebo náhodné a počet zákazníků může být omezený nebo neomezený.
Zdroj zákazníků může být prakticky neomezený (řádově tisíce – klienti banky, auta, která jezdí k benzínové čerpací stanici, registrovaní pacienti lékaře, klienti mobilního operátora) nebo omezený (stroje ve výrobní hale, které je nutné udržovat a opravovat).
Pokud zákazníci nemohou být po svém příchodu do SHO okamžitě obslouženi, řadí se do fronty. Způsob řazení zákazníků do fronty a výběr zákazníků k obsluze se nazývá **frontový režim**.

Nejznámější frontové režimy jsou:
FIFO (první vstupuje, první je obsloužen)
LIFO (poslední vstupuje, první je obsloužen)
SIRO (obsluhy v náhodném pořadí)
PRI (obsluha podle priorit).

Doba obsluhy může být:
pevná (tj. stejná pro všechny zákazníky)
závislá na typu zákazníka
náhodná

Výstupní proud je posloupnost okamžiků výstupů zákazníků ze SHO. Vlastnosti výstupního proudu jsou závislé na vlastnostech vstupního proudu a na době obsluhy.

Základní struktura SHO



Úloha THO: najít funkční závislost veličin, které charakterizují kvalitu činnosti SHO na charakteristikách vstupního proudu, linek obsluhy a na způsobu organizace SHO jako celku.

Příklady SHO

systém	obslužné linky	zákazníci
banka	úředníci	klienti banky
samoobsluha	pokladny	nakupující
poliklinika	lékaři	pacienti
benzínová čerpací stanice	čerpadla	vozidla
dopravní systém	křižovatky se semafory	vozidla

6.3. Dělení SHO podle různých kritérií

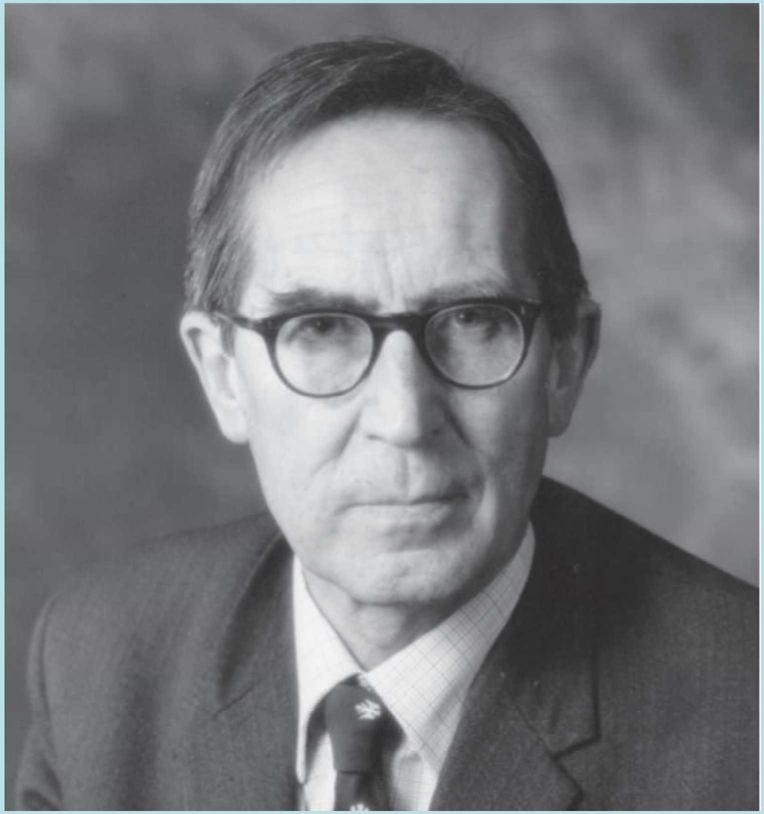
a) Podle typu matematického modelu
- markovské modely (doby mezi příchody zákazníků se řídí exponenciálním rozložením)
- semimarkovské modely (doby mezi příchody zákazníků se řídí Erlangovým rozložením)
- nemarkovské modely

b) Podle počtu zákazníků
- systém s ohraničeným počtem zákazníků
- systém s neohraničeným počtem zákazníků

c) Podle čekání zákazníků na obsluhu
- systém bez čekání (zákazník, který se nedostane k obsluze hned po příchodu, nečeká a odchází)
- systém s čekáním (zákazník nemůže odejít bez obsloužení. Jsou-li všechny linky obsazené, čeká ve frontě, která je buď ohraničená nebo neohraničená)
- systém smíšený (zákazník čeká ve frontě jen tehdy, je-li splněna nějaká dodatečná podmínka)

6.4. Kendallova klasifikace SHO

David Georg Kendall (1918 – 2007): britský statistik, působil na univerzitách v Oxfordu a Cambridge. Patřil ke světové špičce v oblasti teorie pravděpodobnosti a analýzy dat a byl jedním ze zakladatelů stochastické geometrie.



Při Kendallově klasifikaci se SHO dělí podle:
- rozložení doby mezi příchody zákazníků
- rozložení doby obsluhy
- počtu linek obsluhy
- kapacity systému
- frontového režimu.

Používá se označení X/Y/n nebo X/Y/n/m/z

X … označuje rozložení doby mezi příchody zákazníků
Y … označuje rozložení doby obsluhy
n … počet linek obsluhy
m … kapacita systému
z … frontový režim

Na místě X a Y mohou být tyto symboly:
M pro exponenciální rozložení
E_k pro Erlangovo rozložení s parametrem k
D pro degenerované rozložení
G pro obecné rozložení

Na místě n a m: čísla 1, 2, …

Na místě z: FIFO, LIFO, SIRO, PRI

Např. M/D/2/∞/FIFO je systém, kde vstupní proud tvoří Poissonův proces, doba obsluhy je konstantní, v systému jsou dvě linky, systém má neomezenou kapacitu a frontový režim je „první vstoupí, první je obsloužen“.

6.5. Používaná označení v SHO

λ … intenzita vstupního proudu (průměrný počet zákazníků, kteří vstoupí do SHO za jednotku času)
μ … intenzita obsluhy (průměrný počet zákazníků, které linka obslouží za jednotku času)

$$\beta = \frac{\lambda}{\mu}$$

ρ … intenzita provozu (základní charakteristika systému, často se udává v %)

Časové charakteristiky
W … doba pobytu zákazníka v systému
W_S … doba obsluhy
W_Q … doba čekání zákazníka v systému
Je zřejmé, že $W = W_S + W_Q$.

Charakteristiky týkající se počtu zákazníků
N … počet zákazníků ve stabilizovaném systému – nezávisí již na čase t
N_S … počet obsluhovaných zákazníků
N_Q … počet zákazníků ve frontě
Je zřejmé, že $N = N_S + N_Q$.

Pravděpodobnostní charakteristiky
a_0 … pravděpodobnost, že systém je prázdný
a_j … pravděpodobnost, že v systému je právě j zákazníků
P_Q … pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
P_Z … pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut

Nákladové charakteristiky
Pokud je uživatel schopen ohodnotit náklady na čekání zákazníka, náklady na prostoj či provoz linek obsluhy, je možno systém optimalizovat vzhledem na jeho nákladovou efektivnost.
Je možno určit např. optimální intenzitu obsluhy nebo optimální počet obslužných linek.

6.6. Littleův vzorec

V systémech s neomezeným zdrojem zákazníků platí, že střední hodnota počtu zákazníku v systému (resp. ve frontě resp. u obsluhy) je rovna součinu intenzity vstupního proudu a střední hodnoty doby pobytu zákazníka v systému (resp. ve frontě resp. u obsluhy):

$$E(N) = \lambda E(W)$$
$$E(N_Q) = \lambda E(W_Q)$$
$$E(N_S) = \lambda E(W_S)$$

Za předpokladu, že známe intenzity λ, μ, lze ze znalosti aspoň jedné charakteristiky $E(N)$, $E(N_Q)$, $E(N_S)$, $E(W)$, $E(W_Q)$, $E(W_S)$ ostatní charakteristiky dopočítat.

6.7. Metody zkoumání SHO

Existují dvě různé metody zkoumání SHO.

Analytická metoda: Analytik zná nebo je schopen odvodit vzorce pro výpočet jednotlivých charakteristik systému. Pak stačí jenom dosadit do těchto vzorců konkrétní parametry systému.
Nevýhoda: analytické řešení je známé jenom u několika nejjednodušších modelů.

Simulační metoda: Systém nahradíme simulačním modelem a jeho činnost mnohonásobně nezávisle simulujeme na počítači. Jednotlivé výstupní charakteristiky systému pak nahradíme jejich odhady, např. střední hodnotu průměrem, pravděpodobnost relativní četností apod. Takto lze analyzovat i velmi složité systémy.

6.8. Intenzita provozu v SHO s jednou linkou obsluhy

V tomto případě je intenzita provozu $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Mohou nastat tři různé situace:

a) Intenzita vstupu = intenzita obsluhy: $\rho = 1$

Ideální situace, netvoří se fronta a linka obsluhy je využita na 100 %.

b) Intenzita vstupu < intenzita obsluhy: $\rho < 1$

Nově příchozí zákazník je obsloužen bez čekání, ale linka obsluhy je po určitou dobu nevyužita. Využití linky je 100* ρ %.

c) Intenzita vstupu > intenzita obsluhy: $\rho > 1$

Nestabilní systém, začínají se postupně hromadit zákazníci, i když linka obsluhy pracuje nepřetržitě. Pokud zákazníci nečekají na obsluhu a odcházejí, jde o systém se ztrátami.

6.9. Ilustrace SHO s jednou linkou obsluhy

Máme k dispozici záznamy o okamžicích příchodů a odchodů 16 zákazníků do SHO během 8 hodin.

č. zák.	příchod	odchod	doba čekání	doba mezi příchody	obsluha	prostoj	celkem
1	0,20	0,30	0	20	10	20	10
2	0,40	1,10	0	20	30	10	30
3	0,50	1,30	20	10	20	0	40
4	2,10	3,10	0	80	60	10	60
5	3,20	3,50	0	70	30	10	30
6	3,40	4,10	10	20	20	0	30
7	4,10	4,40	0	30	30	0	30
8	4,20	5,00	20	10	20	0	40
9	4,50	5,50	10	30	50	0	60
10	5,10	6,00	40	20	10	0	50
11	5,50	6,10	10	40	10	0	20
12	6,20	6,40	0	30	20	10	20
13	6,40	6,50	0	20	10	0	10
14	7,10	7,30	0	30	20	20	20
15	7,40	7,50	0	30	10	10	10
16	7,50	8,00	0	10	10	0	10

Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ (tj. střední hodnota počtu zákazníků, kteří vstoupí do SHO za jednotku času, je λ). Za časovou jednotku zvolíme 1 hodinu.

Odhad parametru λ: $\hat{\lambda} = \frac{16}{8} = 2$.

Počty zákazníků v jednohodinových intervalech se mají řídit Poissonovým rozložením.

č. hodiny	1	2	3	4	5	6	7	8
počet zákazníků	3	0	1	2	3	2	2	3

Použijeme jednoduchý test Poissonova rozložení hladinu významnosti zvolíme 0,05.

m = 2

$$s^2 = \frac{1}{7}\left[(3-2)^2 + (0-2)^2 + \ldots + (3-2)^2\right] = \frac{8}{7}$$

Testová statistika: $K = \frac{(n-1)s^2}{m} = \frac{7 \cdot \frac{8}{7}}{2} = 4$

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{0,025}(7) \rangle \cup \langle \chi^2_{0,975}(7), \infty) = \langle 0; 1,69 \rangle \cup \langle 16,01; \infty)$

$K \notin W \Rightarrow$ H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Odhad parametru μ: průměrná doba obsluhy je $m = \frac{1}{16}(10 + 30 + \ldots + 10) = 22{,}5\,\text{min} = 0{,}375\text{h}$

$\hat{\mu} = \frac{1}{m} = 2{,}\overline{6}$ zákazníků za 1 h.

Doba obsluhy se má řídit exponenciálním rozložením. Použijeme Darlingův test, hladinu významnosti volíme 0,05.
m = 22,5

$$s^2 = \frac{1}{15}\left[(10 - 22{,}5)^2 + (30 - 22{,}5)^2 + \ldots + (10 - 22{,}5)^2\right] = 220$$

$$K = \frac{(n-1)s^2}{m^2} = \frac{15 \cdot 220}{22{,}5^2} = 6{,}5185$$

Kritický obor: $W = \left\langle 0, \chi^2{}_{0,025}(15)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2{}_{0,975}(15), \infty\right) = \left\langle 0; 6{,}262\right\rangle \cup \left\langle 27{,}488; \infty\right)$

$K \notin W \Rightarrow$ H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Využití systému: $\hat{\rho} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}} = \frac{2}{2{,}\overline{6}} = 0{,}75$, tedy systém je využit na 75 %.

Doba mezi příchody zákazníků se má řídit exponenciálním rozložením. Použijeme Darlingův test, hladinu významnosti volíme 0,05.

$$m = \frac{1}{16}\left(20 + 20 + \ldots + 10\right) = 29{,}375$$

$$s^2 = \frac{1}{15}\left[\left(20 - 29{,}375\right)^2 + \left(20 - 29{,}375\right)^2 + \ldots + \left(10 - 29{,}375\right)^2\right] = 392{,}9167$$

$$K = \frac{(n-1)s^2}{m^2} = \frac{15 \cdot 392{,}9167}{29{,}375^2} = 6{,}8302$$

Kritický obor: $W = \left\langle 0, \chi^2_{0,025}(15) \right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{0,975}(15), \infty \right) = \left\langle 0; 6{,}262 \right\rangle \cup \left\langle 27{,}488; \infty \right)$

$K \notin W \Rightarrow$ H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.