

Autonomní systémy

Zvláštnosti nelineárních systémů

Petr Liška

Masarykova univerzita

27.02.2023

Nulová reálná část je opravdu problém

Dva podobné, ale různé systémy

Dokažte, že nulová řešení následujících systému mají různou stabilitu:

$$x' = y - x(x^2 + y^2)$$

$$y' = -x - y(x^2 + y^2)$$

$$x' = y + x(x^2 + y^2)$$

$$y' = -x + y(x^2 + y^2)$$

Existence „zvláštního“ cyklu

Limitní cykl

Ukažte, že následující systém má jako trajektorii alespoň jeden cyklus

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\y' &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

V čem se liší systém

$$\begin{aligned}x' &= -y(1 - x^2 - y^2)^2 + x(1 - x^2 - y^2)^3 - y^3 \\y' &= x(1 - x^2 - y^2)^2 + y(1 - x^2 - y^2)^3 + xy^2,\end{aligned}$$

který „numericky“ vypadá „stejně“?

Uvažme opět náš systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Definice ((Asymptoticky) stabilní cykly)

Cyklus C_ω rovnice (1) se nazývá stabilní, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subseteq \mathbb{R}^n$, která obsahuje C_ω , existuje otevřená množina $W \subseteq V$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in W$ v čase nula, zůstane v množině V pro všechna $t \geq 0$.

Cyklus C_ω se nazývá asymptoticky stabilní, jestliže navíc existuje množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in X$, se asymptoticky blíží k C_ω pro $t \rightarrow \infty$.

Jak poznat, že cyklus neexistuje?

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2}$$

Věta (Dulacovo kritérium, Bendixson-Dulac)

Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast ve fázovém prostoru. Existuje-li spojitě diferencovatelná funkce $\phi(x, y)$ taková, že výraz

$$\frac{\partial}{\partial x} [\phi(x, y)f(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\phi(x, y)g(x, y)]$$

nemění znaménko v Ω a není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny Ω , pak v Ω neexistuje uzavřená trajektorie systému (2).

Dulac, H., *Points singuliers des équations différentielles*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 61, Paris : Gauthier-Villar, 1934.

Důsledek (Bendixsonovo kritérium)

Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast ve fázovém prostoru. Nemění-li výraz

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$$

znaménko v Ω a není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny Ω , pak v Ω neexistuje uzavřená trajektorie systému (2).

Bendixson, I., *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Mathematica 24(1), 1901, 1–88.

Příklad

Ukažte, že daný systém nemá žádné uzavřené trajektorie

$$x' = y$$

$$y' = -x - y + x^2 + y^2$$

Jednoduché rozšíření

Věta

Nechť Ω je otevřená souvislá oblast ve fázovém prostoru. Existuje-li spojitě diferencovatelná funkce $\phi(x, y)$ taková, že výraz

$$\frac{\partial}{\partial x} [\phi(x, y)f(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\phi(x, y)g(x, y)] \neq 0 \quad \text{pro } \forall(x, y) \in \Omega$$

Má-li Ω^C (doplňk Ω) k komponent, potom (2) má nejvýše k cyklů v Ω .

Příklad

Ukažte, že van der Polova rovnice

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

má nejvýše jeden limitní cyklus pro $\varepsilon \neq 0$.