Autonomní systémy

Charakteristické směry
Kubické nulkliny

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.03.2023

Charakteristické směry

Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= P(x,y) \\ y' &= Q(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

kde P, $Q \in C(D,\mathbb{R})$, kde D je otevřená množina, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $[0,0] \in D$ a $P(0,0) = Q(0,0) = 0$.
Zavedením polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dostaneme systém ve tvaru

$$\begin{aligned} r' &= P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi \\ r\varphi' &= Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi - P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

Definice

Směr $\varphi = \varphi_0$ se nazývá *charakteristickým směrem* pro systém (1) jestliže existuje posloupnost (r_n, φ_n) taková, že

1. $$0 < r_n \to 0,\ \varphi_n \to \varphi_0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty,$$

2. $$(P(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n), Q(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)) \neq 0 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}$$

3. pro $n \to \infty$
$$\frac{Q(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)\cos\varphi_0 - P(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)\sin\varphi_0}{\sqrt{P^2(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n) + Q^2(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)}} \to 0$$

Věta

Je-li $\psi(r)$ kladná a spojitá funkce pro $r > 0$ taková, že platí

$$\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$$

a limity

$$p(\varphi) = \lim_{r\to 0^+} \frac{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\psi(r)},$$
$$q(\varphi) = \lim_{r\to 0^+} \frac{Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\psi(r)}$$

existují stejnoměrně pro φ blízká φ_0, přičemž $p^2(\varphi) + q^2(\varphi) \neq 0$, pak $\varphi = \varphi_0$ je charakteristickým směrem právě tehdy, když

$$q(\varphi_0)\cos\varphi_0 - p(\varphi_0)\sin\varphi_0 = 0\,.$$

Věta

Nechť $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, *kde* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *je otevřená množina,* $[0,0] \in D$. *Buď* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ *regulární konstantní matice. Předpokládejme, že*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)| + |g(x,y)|}{|x| + |y|} = 0.$$

Pak ke každému charakteristickému směru φ_0 *systému*

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + f(x,y), \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + g(x,y) \end{aligned} \tag{3}$$

existuje reálný vlastní vektor matice A *mající směr* φ_0 *a naopak směr* φ_0 *každého reálného vlastního vektoru matice* A *je charakteristickým směrem rovnice* (3).

Důsledek

Předpokládejme, že funkce P, Q jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a že $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) =$ 0. *Nechť*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je regulární matice. Pak ke každému charakteristickému směru φ_0 systému

$$\begin{aligned} x' &= P(x, y), \\ y' &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{4}$$

v bodě $[x_0, y_0]$ existuje reálný vlastní vektor matice A mající směr φ_0 a naopak směr φ_0 každého reálného vlastního vektoru matice A je charakteristickým směrem systému (4) *v bodě $[x_0, y_0]$.*

Poslední geometrické pozorování

Uvažme systém

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -x, \end{aligned} \tag{5}$$

kde funkce F splňuje následující vlastnosti

1. F je spojitě diferencovatelná a $F(x) = -F(x)$;
2. $F(x) \to \infty$ pro $x \to \infty$ a existuje $\beta > 0$ takové, že $F(x) > 0$ a $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} > 0$ pro $x > \beta$;
3. Existuje $\alpha > 0$, $F(\alpha) = 0$ takové, že $F(x) < 0$ pro $0 < x < \alpha$.

Pak existuje uzavřená trajektorie systému (5). Je-li $\alpha = \beta$ pak existuje právě jedna uzavřená trajektorie systému (5).
Systém (5) je ekvivalentní s rovnicí

$$x'' + f(x)x' + x = 0, \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$