

Ústav matematiky a statistiky  
Přírodovědecká fakulta  
Masarykova univerzita

---

**M7985 Analýza přežití II**  
*Zadání domácích úloh*

Stanislav Katina, Iveta Selingerová

katina@math.muni.cz, selingerova@math.muni.cz

**Příklad 1.** Uvažujte arkus sinus odmocninovou škálu funkce přežití, tj.  $\arcsin\left(\sqrt{S(t)}\right)$ .

- (i) Odvoďte  $100 \times (1 - \alpha)\%$  intervaly spolehlivosti Waldova typu pro funkci přežití a kumulativní rizikovou funkci.
- (ii) Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkci pro výpočet  $100 \times (1 - \alpha)\%$  intervalů spolehlivosti Waldova typu funkce přežití v časech úmrtí.
- (iii) Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkci pro výpočet  $100 \times (1 - \alpha)\%$  intervalů spolehlivosti Waldova typu kumulativní rizikové funkce v časech úmrtí.
- (iv) Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkci pro výpočet  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pásu spolehlivosti funkce přežití mezi nejmenším a největším časem události. Uvažujte Nairův i Hallův–Walnerův pás spolehlivosti.
- (v) Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkci pro výpočet  $100 \times (1 - \alpha)\%$  pásu spolehlivosti kumulativní rizikové funkce mezi nejmenším a největším časem události. Uvažujte Nairův i Hallův–Walnerův pás spolehlivosti.
- (vi) Uvažujte data Diabetes (soubor `diabetes.txt`), zvlášť muže a ženy. Pro každou skupinu zobrazte odhad funkce přežití spolu s 95% empirickými intervaly spolehlivosti Waldova typu a oběma typy 95% pásů spolehlivosti.
- Interval spolehlivosti zobrazte jako vertikální úsečky ve tvaru písmene „I“.
  - Pásky zobrazte jako schodovité křivky odlišené barevně pro jednotlivé metody.
  - Zvolte vhodný typ odhadu funkce přežití a příslušného rozptylu.
- (vii) Uvažujte data Diabetes (soubor `diabetes.txt`), zvlášť muže a ženy. Pro každou skupinu zobrazte odhad kumulativní rizikové funkce spolu s 95% empirickými intervaly spolehlivosti Waldova typu a oběma typy 95% pásů spolehlivosti.
- Interval spolehlivosti zobrazte jako vertikální úsečky ve tvaru písmene „I“.
  - Pásky zobrazte jako schodovité křivky odlišené barevně pro jednotlivé metody.
  - Zvolte vhodný typ odhadu kumulativní rizikové funkce a příslušného rozptylu.
- (viii) Uvažujte data Diabetes (soubor `diabetes.txt`), zvlášť muže a ženy. Pro každou skupinu určete odhad pětiletého a osmiletého přežití spolu s 95% empirickými intervaly spolehlivosti Waldova typu. Uveďte také příslušné hodnoty 95% pásů spolehlivosti.
- (ix) Uvažujte data Diabetes (soubor `diabetes.txt`), zvlášť muže a ženy. Pro každou skupinu určete odhad pětiletého a osmiletého kumulativního rizika spolu s 95% empirickými intervaly spolehlivosti Waldova typu. Uveďte také příslušné hodnoty hranic 95% pásů spolehlivosti.

**Příklad 2.** Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkce pro výpočet

- (i) průměrného času přežití,
- (ii) odhad rozptylu průměrného času přežití,
- (iii)  $100 \times (1 - \alpha)\%$  intervalu spolehlivosti Waldova typu střední hodnoty času přežití.

Uvažujte data *Diabetes* (soubor `diabetes.txt`), zvlášť muže a ženy. Pro každou skupinu spočítejte průměrný čas přežití spolu s 95% empirickým intervalem spolehlivosti Waldova typu střední hodnoty času přežití. Výsledky porovnejte s hodnotami, které získáte pomocí knihovny `survival`. Zvolte vhodný typ odhadu funkce přežití a příslušného rozptylu.

**Příklad 3.** Uvažujte data ze souboru `prostate.xlsx`. Popis těchto dat najdete v souboru `popis_prostata.pdf`. Uvažujte dvě skupiny pacientů – léčení a neléčení. Jako léčení pacienti jsou považováni ti, kteří dostávali aspoň 1 mg diethylstilbestrolu denně. Zajímáme se o úmrtí těchto pacientů na karcinom prostaty a na kardiovaskulární onemocnění s ohledem na léčbu.

- (i) Cílem je porovnat přežití léčených a neléčených pacientů pro každou událost (úmrtí na karcinom prostaty, na kardiovaskulární onemocnění a z ostatních příčin). Spočítejte a zobrazte doplněk Kaplanova–Meierova odhadu  $(1 - \hat{S}_{KM}(t))$  a odhad kumulativní incidenční funkce  $(\widehat{CIF}(t))$  samostatně pro každou událost dle léčebných skupin. Oba přístupy  $(1 - \hat{S}_{KM}(t))$  a  $\widehat{CIF}(t)$  porovnejte, okomentujte případné rozdíly. Interpretujte výsledky CIF s ohledem na léčbu pacientů a sledovanou událost.
- (ii) Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkci pro výpočet odhadu rozptylu odhadu kumulativní incidenční funkce (CIF) v časech událostí.
- (iii) Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkci pro výpočet  $100 \times (1 - \alpha)\%$  intervalů spolehlivosti Waldova typu pro kumulativní incidenční funkci v časech událostí pro různé škály.
- (iv) Zobrazte  $\widehat{CIF}(t)$  z (i) včetně intervalů spolehlivosti s použitím vhodné škály.

---

**Příklad 4.** Uvažujte data *Diabetes* (soubor *diabetes.txt*), pacienty rozdělte do třech skupin dle věku – 0–60 let, 61–70 let a 71 a více let. Naprogramujte v  $\mathbb{R}$  funkce pro testování rovnosti tří a více funkcí přežití.

- (i) Zobrazte do jednoho grafu odhady funkce přežití podle věkové skupiny. Uvažujte jak Kaplanův–Meierův typ odhadu, tak Breslowův typ odhadu.
- (ii) Zobrazte do jednoho grafu odhady kumulativní rizikové funkce podle věkové skupiny. Uvažujte jak Kaplanův–Meierův typ odhadu, tak Nelsonův–Aalenův typ odhadu.
- (iii) Testujte  $H_0 : \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t)$  proti  $H_1 : \exists$  aspoň jedno  $i < j, \lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$  pomocí zevšeobecněného Wilcoxonova testu, Cox–Mantelova testu, Tarone–Ware testu, Mantel–Haenszelův testu a Peto–Peto–Wilcoxonova testu.
- (iv) Testy, u kterých je to možné, proveďte také pomocí knihovny *survival*.

**Příklad 5.** Uvažujte data *Diabetes* (soubor *diabetes.txt*) a postupně exponenciální, Weibullovo, log-normální a log-logistické rozdělení.

- (i) Zapište tvar funkce přežití pro každé rozdělení, tento vztah následně upravte tak, abyste získali výraz, který je lineárně závislý na  $\ln(t)$ , tj.  $g(S(t)) = a + b \ln(t)$ . Pomocí této závislosti graficky ověřte, zda je možné čas úmrtí po operaci ve skupinách s diabetem a bez modelovat těmito rozděleními. Obě skupiny zobrazte do jednoho grafu. Pomůcka: Na ose  $x$  bude  $\ln(t)$  a na ose  $y$  bude  $g(\hat{S}(t))$  dle typu rozdělení, kde použijte vhodný neparametrický odhad funkce přežití. Získané body proložte přímkou pomocí lineární regrese.
- (ii) Pomocí funkce `survreg` odhadněte parametry každého rozdělení pro čas úmrtí po operaci ve skupinách s diabetem a bez. Získané odhady porovnejte s výsledky lineární regrese z (i).
- (iii) Označme  $S_0(t)$  funkci přežití pro skupinu pacientů bez diabetu a  $S_1(t)$  pro skupinu pacientů s diabetem. Zapište vztah mezi funkcemi přežití  $S_0(t)$  a  $S_1(t)$  při platnosti modelu zrychleného času s využitím akceleračního parametru  $\theta$ . Dále opět s využitím akceleračního parametru  $\theta$  odvoďte vztah mezi kvantily, kde  $t_{0p}$  je  $p$ -tý kvantil pro skupinu bez diabetu a  $t_{1p}$  je  $p$ -tý kvantil pro skupinu s diabetem. Pomocí kvantil-kvantilového grafu graficky ověřte vhodnost modelu zrychleného času pro popis vlivu přítomnosti diabetu na čas úmrtí po operaci a odhadněte akcelerační parametr.
- (iv) Odhadněte akcelerační parametr modelu zrychleného času pro popis vlivu přítomnosti diabetu pomocí funkce `survreg` a výsledek porovnejte s výsledky z (iii).

**Příklad 6.** Uvažujte data *Diabetes* (soubor `diabetes.txt`). Modelujte závislost času úmrtí po operaci na vysvětlujících proměnných pomocí následujících variant Coxova modelu proporcionálních rizik:

1. Jako vysvětlující proměnnou uvažujte pouze věk.
2. Jako vysvětlující proměnnou uvažujte pouze přítomnost diabetu.
3. Jako vysvětlující proměnné uvažujte věk a přítomnost diabetu.
4. Jako vysvětlující proměnné uvažujte věk, přítomnost diabetu a interakci mezi přítomností diabetu a věkem.
5. Uvažujte stratifikovaný Coxův model, kde stratifikační proměnná je přítomnost diabetu (tj. `strata(diab)`) a vysvětlující proměnnou je věk.
6. Uvažujte stratifikovaný Coxův model stejně jako v předchozím bodě, ale navíc uvažujte i interakční člen.
7. Uvažujte Coxovy modely s věkem jako vysvětlující proměnnou samostatně pro skupiny s diabetem a bez.

Pro každou variantu zapište tvar Coxova modelu pomocí rizikové funkce a odhadněte parametry těchto modelů pomocí funkce `coxph` z knihovny `survival`. Spočítejte poměry rizik (hazard ratio) včetně příslušného 95% intervalu spolehlivosti a interpretujte výsledky jednotlivých modelů. Pro každou variantu otestujte významnost jednotlivých parametrů a celého modelu.

Uvažujte všechny modely, ve kterých je zahrnut věk, a spočítejte poměr rizik pro věk včetně příslušného 95% intervalu spolehlivosti samostatně pro skupiny pacientů s diabetem a bez. Výsledky dle jednotlivých modelů porovnejte, interpretujte a okomentujte. Pomůcka: Varianční matici pro koeficienty získáte z výstupu funkce `coxph` pomocí `$var`. Předpokládejte Waldův typ intervalů spolehlivosti.