20. 2. 2020

$\mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\alpha) > 0\}$

$SL_2(\mathbb{R})$ působí akcí na $\mathcal{H}$

$A \in SL_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathcal{H}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot z = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

Nechť w_1, w_2 je báze $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Im}\, \frac{w_1}{w_2} > 0 \overset{def}{\iff} \text{báze } w_1, w_2 \text{ je kladná}$$

Víme, že pro A jako výše je

$$A \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a w_1 + b w_2 \\ c w_1 + d w_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{a w_1 + b w_2}{c w_1 + d w_2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{a \cdot \frac{w_1}{w_2} + b}{c \cdot \frac{w_1}{w_2} + d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\left(a \frac{w_1}{w_2} + b\right)\left(c \overline{\frac{w_1}{w_2}} + d\right)}{\left|c \frac{w_1}{w_2} + d\right|^2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{ac \left|\frac{w_1}{w_2}\right|^2 + bd + ad \frac{w_1}{w_2} + bc \overline{\frac{w_1}{w_2}}}{\left|c \frac{w_1}{w_2} + d\right|^2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{Im}\left(ad \frac{w_1}{w_2} + bc \overline{\frac{w_1}{w_2}}\right)}{\left|c \frac{w_1}{w_2} + d\right|^2} = \frac{\mathrm{Im}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}{\left|c \frac{w_1}{w_2} + d\right|^2} \cdot \underbrace{(ad - bc)}_{\det A = 1}$$

Řekneme, že báze w_1, w_2 a γ_1, γ_2 jsou ekvivalentní, právě když existuje $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tak, že $\gamma_1 = \alpha w_1$, $\gamma_2 = \alpha w_2$. Původní akce $SL_2(\mathbb{R})$ na množině všech kl. bází dává akci na množině všech tříd kladných bází (podle předchozí ekvivalence) díky tomu, že konstantní matice komutují s ostatními. Každá taková třída obsahuje jedinou bázi tvaru $(z, 1)$; pak $z \in \mathcal{H}$.

kompl. č. s kl. im. č.

$z \in \mathcal{H}$

mřížky v $\mathbb{C}$

$\Lambda = \mathbb{Z} \cdot w_1 + \mathbb{Z} \cdot w_2$

kde w_1, w_2 je kladná báze $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

Faktorgrupa kompl. č. podle mřížky

$\mathbb{C}/\Lambda$

eliptická křivka nad $\mathbb{C}$ (pomocí funkce $\wp(z, \Lambda)$; izomorfní el. křivky dostáváme právě ze stejnolehlých mřížek)

$$\Lambda_z = \mathbb{Z} \cdot z + \mathbb{Z} \cdot 1$$

množina stejnolehlých mřížek

$$\Lambda_{\frac{w_1}{w_2}} = \mathbb{Z} \frac{w_1}{w_2} + \mathbb{Z} 1 \in \{\lambda \cdot \Lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

Studujme komplexní funkce F na množině všech mřížek v $\mathbb{C}$

$$\Lambda \longmapsto F(\Lambda)$$

Takové F dává komplexní funkci $f: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$f(z) = F(\Lambda_z) \quad \text{pro lib. } z \in \mathcal{H}$$

spec. případy

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*\ \forall$ mřížku Λ: $F(\alpha \cdot \Lambda) = F(\Lambda)$

Pak pro lib. $z \in \mathcal{H}$ je $f(z) = F(\Lambda_z) = F(\alpha \cdot \Lambda_z)$

Pro lib. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ je

$$F(A \cdot z) = F(\Lambda_{A \cdot z}) = F\left((cz + d)^{-1} \Lambda_z\right) = F(\Lambda_z) = f(z)$$

$$\Lambda_{A \cdot z} = \mathbb{Z} \cdot \frac{az + b}{cz + d} + \mathbb{Z} \cdot 1 \Rightarrow (cz + d) \cdot \Lambda_{A \cdot z} = \mathbb{Z}(az + b) + \mathbb{Z}(cz + d) = \mathbb{Z} \cdot z + \mathbb{Z} \cdot 1 = \Lambda_z$$

② předp., že existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že
$\forall \alpha \in \mathbb{C}^* \ \forall$ mřížku Λ: $F(\alpha \cdot \Lambda) = \alpha^{-k} \cdot F(\Lambda)$

Pak pro lib. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, lib. $z \in \mathcal{H}$:

$$F(A \cdot z) = F(\Lambda_{A \cdot z}) = F\left((cz+d)^{-1} \cdot \Lambda_z\right) = (cz+d)^k \cdot F(\Lambda_z) = (cz+d)^k \cdot f(z)$$

Pozn. $\Lambda = (-1) \cdot \Lambda$

k liché $\Rightarrow F(\Lambda) = F((-1) \cdot \Lambda) = (-1)^k F(\Lambda) = -F(\Lambda)$ nezajímavé

V dalším k bude sudé.

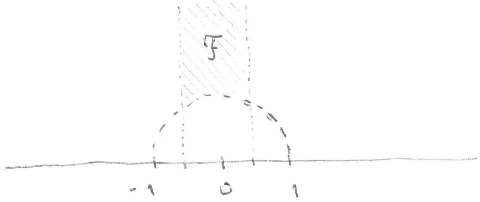
Def Nechť $\overbrace{f}^{k \in \mathbb{Z} \text{ a}}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ je meromorfní funkce, která splňuje podmínku
$$\forall z \in \mathcal{H} \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}): \ f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k \cdot f(z).$$
Pak řekneme, že funkce f je slabě modulární váhy k (pro $SL_2(\mathbb{Z})$).

Def Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a je dána meromorfní funkce $f: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$. Řekneme, že f je modulární forma váhy k (pro $SL_2(\mathbb{Z})$), jestliže
(1) f je slabě modulární ~~funkce~~ váhy k;
(2) f je holomorfní na $\mathcal{H}$;
(3) f je holomorfní v ∞.

Pozn. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$
každá slabě modulární funkce f tedy splňuje
$$f(z+1) = f(z)$$
Zavedme substituci $q = e^{2\pi i z}$, máme Fourierův rozvoj
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \, e^{2\pi i n z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n.$$
Řekneme, že f je holomorfní v ∞, jestliže
$$\forall n \in \mathbb{Z}: n < 0 \Rightarrow a_n = 0.$$

Def Fundamentální oblastí akce grupy $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathcal{H}$ rozumíme otevřenou podmnožinu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ takovou, že žádné dva body z $\mathcal{F}$ neleží ve stejné orbitě akce $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathcal{H}$ a současně v každé orbitě leží alespoň jeden bod z uzávěru $\overline{\mathcal{F}}$.

Tvrzení 1. Množina $\{z \in \mathcal{H};\ |z| > 1,\ |\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2}\}$ je fundamentální oblast akce $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathcal{H}$.



Dk. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$T \cdot z = z + 1$, $S \cdot z = -\frac{1}{z}$

$$\mathrm{Im}(A \cdot z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Je třeba ukázat, že pro lib. $z \in \mathcal{H}$ existuje $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ tak, že $M \cdot z \in \overline{\mathcal{F}}$.
Zřejmě $\{m \cdot z + n;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ je mřížka v $\mathbb{C}$. Nechť $c \cdot z + d$ je nenulový bod této mřížky s co nejmenší absolutní hodnotou $(c, d \in \mathbb{Z})$. Pak $(c,d) = 1$, z Bezout. rovnosti existují $a, b \in \mathbb{Z}$, že $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Pak
$$\mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z\right) \text{ je max. prvek z } \{\mathrm{Im}(A \cdot z);\ A \in SL_2(\mathbb{Z})\},$$
Existuje $n \in \mathbb{Z}$, že pro $M = T^n \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ platí $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,(\underbrace{M z}_{z^*}) \leq \frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(Mz) = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z\right)$.
Ukažme sporem, že $z^* \in \overline{\mathcal{F}}$. Předpokládejme tedy, že $|z^*| < 1$. Pak $\mathrm{Im}(S \cdot z^*) = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{z^*}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z^*)}{|z^*|^2} > \mathrm{Im}(z^*)$, spor. Předpokládejme, že existuje $z_1 \in \mathcal{F}$, že $z_2 = A \cdot z_1 \in \mathcal{F}$ pro $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ a $z_1 \neq z_2$.
Nechť $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Jistě $c \neq 0$ (jinak $\pm A \in \langle T \rangle$, spor). Lze předpokládat, že $\mathrm{Im}(z_1) \leq \mathrm{Im}(z_2)$. Pak
$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \mathrm{Im}(z_2) = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|cz_1 + d|^2} \leq \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{(c \cdot \mathrm{Im}(z_1))^2} < \frac{2}{c^2 \sqrt{3}}$$
$$c^2 < \frac{4}{3} \quad \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow |cz_1 + d|^2 = |z_1 \pm d|^2 \geq |z_1|^2 > 1$$
$$\mathrm{Im}(z_2) = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1 \pm d|^2} \leq \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|^2} < \mathrm{Im}(z_1), \text{ spor.}$$