$$\int_C^D \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int_G^H \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \longrightarrow -\frac{2\pi i}{3}\cdot \mathrm{ord}_\omega f \quad \text{pro } \varepsilon \to 0$$

Transf. rovnice pro S

$$f(-\tfrac{1}{z}) = f(S\cdot z) = z^k\cdot f(z)$$

$$\frac{f'(Sz)}{f(Sz)} = \frac{k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$\int_E^F \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \longrightarrow -\frac{2\pi i}{2}\,\mathrm{ord}_i f \quad \text{pro } \varepsilon \to 0$$

Potřebujeme spočítat

$$\int_D^E \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int_F^G \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_D^E \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(Sz)}{f(Sz)}\right) dz = \int_D^E \left(-\frac{k}{z}\right) dz = -k\cdot\int_D^E \frac{dz}{z} = k\cdot\int_E^D \frac{dz}{z} \longrightarrow \frac{2\pi i}{12}\cdot k \quad \text{pro } \varepsilon \to 0$$

Označení $\Gamma_1 = SL_2(\mathbb{Z})$

Def Pro libovolné k nechť je $M_k(\Gamma_1)$ množina všech modulárních forem váhy k (pro Γ_1).

Pozn. Zřejmé je $M_k(\Gamma_1)$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$; už víme, že $M_k(\Gamma_1) = \{0\}$, je-li k liché.

Důsledek $M_k(\Gamma_1) = \{0\}$, je-li $k<0$ a pro sudé $k \geq 0$ platí

$$\dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1) \leq \begin{cases} 1 + [\frac{k}{12}], & \text{je-li } k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ [\frac{k}{12}], & \text{je-li } k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Dk. Označme $m = [\frac{k}{12}] + 1$ a zvolme m různých bodů $P_1, P_2, \dots, P_m$ v $\mathcal{F}$. Sporem: předp., že v $M_k(\Gamma_1)$ leží $m+1$ lin. nezávislých forem $f_1, \dots, f_{m+1}$. Existuje nenulová lin. kombinace forem $f_1, \dots, f_{m+1}$, která nabývá nuly v každém bodě $P_1, \dots, P_m$. z věty $m \leq \frac{k}{12}$, spor. Předp., že $k = 2 + 12n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Pak $\frac{k}{12} = \frac{1}{6} + n$, $\frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$. Každá mod. forma této váhy má alespoň dvojnásobnou nulu v ω. Dál analogicky.

5.3.2020

$\mathcal{V}$ .. vekt. prostor všech holomorfních funkcí na $\mathcal{H}$

Pro dané k sudé, $k>2$.

Akce grupy $SL_2(\mathbb{R})$ na $\mathcal{V}$ je dána takto:

$f \in \mathcal{V}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$

$$(f|_k A)(z) = (cz+d)^{-k}\cdot f(A\cdot z) \quad \text{pro lib. } z \in \mathcal{H},\ A\cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Cíl: sestrojit invariantní funkci vůči této akci na diskrétní podgrupě $SL_2(\mathbb{Z})$

Tvrzení Jde o akci lineárními transformacemi.

Dk. $\forall f \in \mathcal{V}\ \forall \alpha \in \mathbb{C}\ \forall A \in SL_2(\mathbb{R})$: $(\alpha f)|_k A = \alpha (f|_A)$

$\forall f, g \in \mathcal{V}\ \forall A \in SL_2(\mathbb{R})$: $(f+g)|_k A = f|_k A + g|_k A$

$A, B \in SL_2(\mathbb{R})$ lib.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix}$, ukažme: $\forall f \in \mathcal{V}$ $(f|_k A)|_k B = f|_k (A\cdot B)$

Víme z minulých hodin: $(A\cdot B)\cdot z = A\cdot(B\cdot z)$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} * & * \\ cr+du & cs+dv \end{pmatrix}$$

$\forall z \in \mathcal{H}$:

$$((f|_k A)|_k B)(z) = (uz+v)^{-k}\cdot(f|_k A)(B\cdot z) = (uz+v)^{-k}\left(c\cdot\frac{rz+s}{uz+v} + d\right)^{-k}\cdot f(\underbrace{A\cdot(B\cdot z)}_{(A\cdot B)\cdot z}) = ((cr+du)z + (cs+dv))^{-k}$$

$$= (f|_k (AB))(z). \quad \square$$

Studujme orbitu konst. fce $f = 1$ při akci $SL_2(\mathbb{Z})$. Do jejího stabilizátoru patří $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potřebujeme systém reprezentantů pravého rozkladu $SL_2(\mathbb{Z})$ podle podgrupy $\langle T \rangle$. Kdy dvě matice z $SL_2(\mathbb{Z})$ patří do stejné třídy pravého rozkladu podle $\langle T^n \rangle$?

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

Je-li $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{vmatrix} a'-a & b'-b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$(a'-a)\cdot d = (b'-b)\cdot c, \quad (c,d) = 1$$

$$\exists n \in \mathbb{Z}: \quad a'-a = nc, \quad b'-b = nd$$

Def Položme

$$E_k(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\(c,d)=1}} \left(1\Big|_k \begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\right)(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\(c,d)=1}} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

LEMMA Nechť Λ je mřížka v $\mathbb{C}$, $t>2$ reálné číslo. Pak suma

$$\sum_{\lambda\in\Lambda,\lambda\neq 0} |\lambda|^{-t} \text{ je konvergentní.}$$

Dk. Kolik prvků $\lambda\in\Lambda$ splní nerovnosti $n \le |\lambda| \le n+1$ pro $n\in\mathbb{N}$? Zvolíme pevně zákl. rovnoběžnostěn, označme ϱ jeho průměr. Obsah mezikruží (střed nula, poloměry $n-\varrho$, $n+1-\varrho$) je lineární v n.

$$\sum_{\lambda\in\Lambda,\lambda\neq0} |\lambda|^{-t} < \underset{\text{konst.}}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{n^t} \quad \text{konverguje díky } t>2$$

$$n\le|\lambda| \Rightarrow n^{-t} \ge |\lambda|^{-t}$$

Důsl. Definiční suma funkce $E_k(z)$ konverguje pro každé $z\in\mathcal{H}$, dokonce absolutně.

$z\in\mathcal{H}$ ..... mřížka $\mathbb{Z}\cdot z + \mathbb{Z}\cdot 1$

slabě modulární funkce

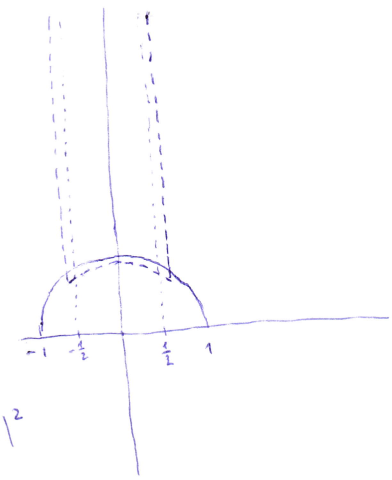
$f(z) = F(\mathbb{Z}\cdot z + \mathbb{Z}\cdot 1)$

homogenní fce na mřížkách

$F(\alpha\Lambda) = \alpha^{-k} F(\Lambda)$

Takovou homogenní funkcí na mřížkách je

$$\sum_{\lambda\in\Lambda,\lambda\neq0} \frac{1}{\lambda^k}, \quad k \text{ sudé}, \ k>2 \qquad \sum_{\substack{\lambda\in\alpha\Lambda\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{\lambda^k} = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{(\alpha\lambda)^k} = \alpha^{-k}\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{\lambda^k}$$



Tím dostáváme

Def Položme (k sudé, $k>2$) pro $z\in\mathcal{H}$

$$G_k(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

Důsl. lemmatu Tato řada konverguje pro každé $z\in\mathcal{H}$, dokonce absolutně.

Uvažme otevřenou množinu $\mathcal{U} = \{z\in\mathcal{H};\ |z|>\frac{4}{5},\ |\mathrm{Re}\, z| < \frac{3}{5}\}$. Pro $m,n\in\mathbb{Z}$, $m^2+n^2\neq 0$ je pro $z\in\mathcal{U}$

$$|mz+n|^2 = (mz+n)(m\bar{z}+n) = m^2|z|^2 + 2mn(\mathrm{Re}\, z) + n^2 \ge \frac{16}{25}m^2 - \frac{6}{5}mn + n^2 = |m\alpha+n|^2$$

pro $\alpha = -\frac{3}{5} + i\frac{\sqrt{7}}{5}$ splňující $\mathrm{Re}\,\alpha = -\frac{3}{5}$, $|\alpha|^2 = \frac{9+7}{25} = \frac{16}{25}$.

Tedy pro každé k sudé, $k>2$ a $z\in\mathcal{U}$ je

$$\left|\frac{1}{(mz+n)^k}\right| \le \frac{1}{|m\alpha+n|^k}. \quad (*)$$

Z lemmatu dostáváme (absolutní a) stejnoměrnou konvergenci E_k i G_k na $\mathcal{U}$. Z kompl. analýzy: z holomorfnosti sčítanců plyne holomorfnost E_k i G_k na $\mathcal{U}$. V následujícím bude $\sum\limits_{\cdots}$ značit součet přes všechna $m,n\in\mathbb{Z}$, a to buď splňující vždy $(m,n)=1$ anebo splňující vždy $(m,n)\neq(0,0)$.

Nechť $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z\in\mathcal{H}$, $A\cdot z\in\mathcal{U}$

$$(cz+d)^{-k}\cdot \sum_{\cdots} \frac{1}{(m(Az)+n)^k} = \sum_{\cdots} \frac{(cz+d)^{-k}}{\left(m\cdot\frac{az+b}{cz+d}+n\right)^k} = \sum_{\cdots} \frac{1}{((ma+nc)z+(mb+nd))^k} = \sum_{\cdots}\frac{1}{(mz+n)^k}$$

Proto E_k, G_k jsou obě holomorfní na $\mathcal{H}$. Z konvergence $\sum\limits_{\cdots}\frac{1}{|m\alpha+n|^k}$ víme, že

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists H>0 : \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m^2+n^2>H}} \frac{1}{|m\alpha+n|^k} < \varepsilon$$

Z nerovnosti $(*)$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists H>0\ \forall z\in\mathcal{U}: \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m^2+n^2>H}} \frac{1}{|mz+n|^k} < \varepsilon$$

Konst. sčítanci v definici E_k, resp. G_k:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^k} + \frac{1}{(-1)^k}\right) = 1$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = \zeta(k)$ (pro $\zeta(k)$ známe vzorec)

Protože pro $m\neq0$: $|mz+n| \ge |\mathrm{Im}(mz)| = |m|\cdot\mathrm{Im}\, z \Rightarrow \frac{1}{|mz+n|^k} \to 0$ pro $\mathrm{Im}\, z\to\infty$. Protože konst. sčítanci se sečtou na 1, resp. $\zeta(k)$, součet přes skoro všechny je shora ohraničen $\frac{\varepsilon}{2}$ a zbylých konečně mnoho konv. k 0 pro $z\in\mathcal{U}$, $\mathrm{Im}\, z\to\infty$, platí

$$|E_k(z)-1| < \varepsilon, \quad \text{je-li } \mathrm{Im}\, z \text{ dost velké}$$

$|G_k(z) -$ [illegible] ε, — " —

Dostali jsme nenulové modulární formy váhy k.

Lib. dvojici $m,n \in \mathbb{Z}$, $(m,n) \neq (0,0)$, lze upravit vytknutím $r = (m,n)$ na $(m,n) = r \cdot (\frac{m}{r}, \frac{n}{r})$, přitom $\frac{m}{r}, \frac{n}{r}$ jsou nesoudělná celá čísla. Z absolutní konvergence: pro lib. $z \in \mathcal{H}$

$$G_k(z) = E_k(z) \cdot \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{r^k} = \zeta(k) \cdot E_k(z).$$

$$\dim M_k(SL_2(\mathbb{Z})) \doteq \begin{cases} 1 + [\frac{k}{12}] & k \text{ sudé}, k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ [\frac{k}{12}] & k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

$M_2(\Gamma_1) = \{0\}$

$E_4 \in M_4(\Gamma_1)$, $\dim M_4(\Gamma_1) = 1 \Rightarrow E_4$ je báze

$E_6 \in M_6(\Gamma_1)$, $\dim M_6(\Gamma_1) = 1 \Rightarrow E_6$ je báze

$E_8, E_4^2 \in M_8(\Gamma_1)$, $\dim M_8(\Gamma_1) = 1 \Rightarrow E_8 = E_4^2$ je báze