Domácí úkol ze 27. dubna 2023

Nechť E je eliptická křivka nad $\mathbb{C}$ zadaná rovnicí

$$y^2 = 4x^3 - Ax - B,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$. Dále nechť $L \subseteq \mathbb{C}$ je mřížka odpovídající této eliptické křivce. Na semináři jsme ukázali, že v L existuje báze $\{\omega_1, \omega_2\}$ taková, že

$$\Im(\omega_1) > 0, \Re(\omega_1) \geq 0, \Im(\omega_2) = 0 \text{ a } \Re(\omega_2) > 0.$$

Navíc, ω_1 lze zvolit tak, že buď

$$\Re(\omega_1) = 0, \tag{1}$$

nebo

$$\Re(\omega_1) = \frac{1}{2}\omega_2. \tag{2}$$

Cílem této úlohy je ukázat, že případ (1) nastane právě tehdy, když polynom $4x^3 - Ax - B$ má tři reálné kořeny.

1. Dokažte, že pro libovolné $z \in \mathbb{C}$ platí $\overline{\wp(z)} = \wp(\overline{z})$.
2. Dokažte, že pokud $\Re(\omega_1) = 0$, pak platí

   $$\wp\left(\frac{\overline{\omega_1}}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right).$$

   (Nápověda: Využijte toho, že funkce $\wp$ je dvojitě periodická vzhledem k L.)
3. Dokažte, že pokud $\Re(\omega_1) = \frac{1}{2}\omega_2$, pak platí

   $$\wp\left(\frac{\overline{\omega_1}}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right),$$

   kde $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.
4. Dokažte, že kořeny polynomu $4x^3 - Ax - B$ jsou $\wp(\omega_1/2), \wp(\omega_2/2), \wp(\omega_3/2)$.
5. Dokažte, že pokud $\Re(\omega_1) = 0$, pak má polynom $4x^3 - Ax - B$ tři reálné kořeny.
6. Dokažte, že pokud $\Re(\omega_1) = \frac{1}{2}\omega_2$, pak má polynom $4x^3 - Ax - B$ právě jeden reálný kořen.