4 Test o střední hodnotě při známém rozptylu

Teorie k příkladu 4.1

- **nominální hladina významnosti** ... teoretická hladina významnosti (jaká by teoreticky měla být)
- **aktuální hl. významnosti** ... skutečná hl. významnosti (jaká ve skutečnosti je)
- *Příklad: Předokládáme, že nominální hladina významnosti námi zvoleného testu (např. o μ když σ^2 známe) je $\alpha = 0.05$. Naměříme (nagenerujeme) data, a na základě nich spočítáme aktuální hladinu významnosti $\widehat{\alpha}$. Pokud dodržíme předpoklady (naměřená (nagenerovaná) data budou pocházet z normálního rozdělení, všechny se stejným rozptylem σ^2), bude aktuální hladina významnosti $\widehat{\alpha} \doteq 0.05$. Nicméně, pokud předpoklady (ať už vědomě či nevědomě) porušíme, může se aktuální hladina významnosti $\widehat{\alpha}$ od nominální hladiny významnosti α výrazně lišit. A to je velký problém, zejména, když si uvědomíme, že závěr o H_0 většinou automaticky stanovujeme na (nominální) hladině významnosti $\alpha = 0.05$, a přitom například v důsledku porušení předpokladů je skutečná (aktuální) hladina významnosti úplně jiná.*
- **konzervativní test** ... test, jehož aktuální (skutečná) hladina významnosti $\widehat{\alpha}$ je menší než nominální hladina významnosti α, se nazývá *konzervativní test.* (Důsledkem je reálná situace, kdy (zejména v hraničních případech) měl test už teoreticky H_0 zamítnout, ale závěr testování je, že H_0 nezamítáme. Tj. test zamítá pomaleji, než by měl.)
- **liberální test** ... test, jehož aktuální (skutečná) hladina významnosti $\widehat{\alpha}$ je větší než nominální hladina významnosti α, se nazývá *liberální test.* (Důsledkem je reálná situace, kdy (zejména v hraničních případech) test ještě teoreticky neměl H_0 zamítnout, ale závěr testování je, že H_0 zamítáme. Tj. test zamítá rychleji, než by měl.)

Tip:

- Zamyslete se nad vztahem konzervativního testu a konzervativního IS (viz cvičení 02).
  - Řešení: Pokud je aktuální pst. pokrytí $1 - \widehat{\alpha}$ větší než nominální pst. pokrytí $\rightarrow$ aktuální IS je širší než nominální IS $\rightarrow$ pst, že parametr θ_0 z H_0 náleží do IS je větší než by teoreticky měla být $\rightarrow$ je větší pravděpodobnost, že H_0 nezamítáme $\rightarrow$ spíše dojde k situaci, že H_0 nezamítáme i když bychom už správně zamítat měli $\rightarrow$ test zamítá pomaleji $\rightarrow$ test založený na konzervativním IS je konzervativní.
- Zamyslete se nad vztahem liberálního testu a liberálního IS (viz cvičení 02).
  - Řešení: Pokud je aktuální pst. pokrytí $1 - \widehat{\alpha}$ menší než nominální pst. pokrytí $\rightarrow$ aktuální IS je užší než nominální IS $\rightarrow$ pst, že parametr θ_0 z H_0 náleží do IS je menší než by teoreticky měla být $\rightarrow$ je větší pravděpodobnost, že H_0 zamítáme $\rightarrow$ spíše dojde k situaci, že H_0 zamítáme i když bychom ještě správně zamítat neměli $\rightarrow$ test zamítá rychleji $\rightarrow$ test založený na liberálním IS je liberální.
  - Zamyslete se nad vztahem liberálního testu a konzervativní IS.
  - Řešení: Takový vztah neexistuje. Liberální test je v souladu s liberálním IS. Stejně jak konzervativní test můžeme uvažovat pouze v souvislosti s konzervativním IS.

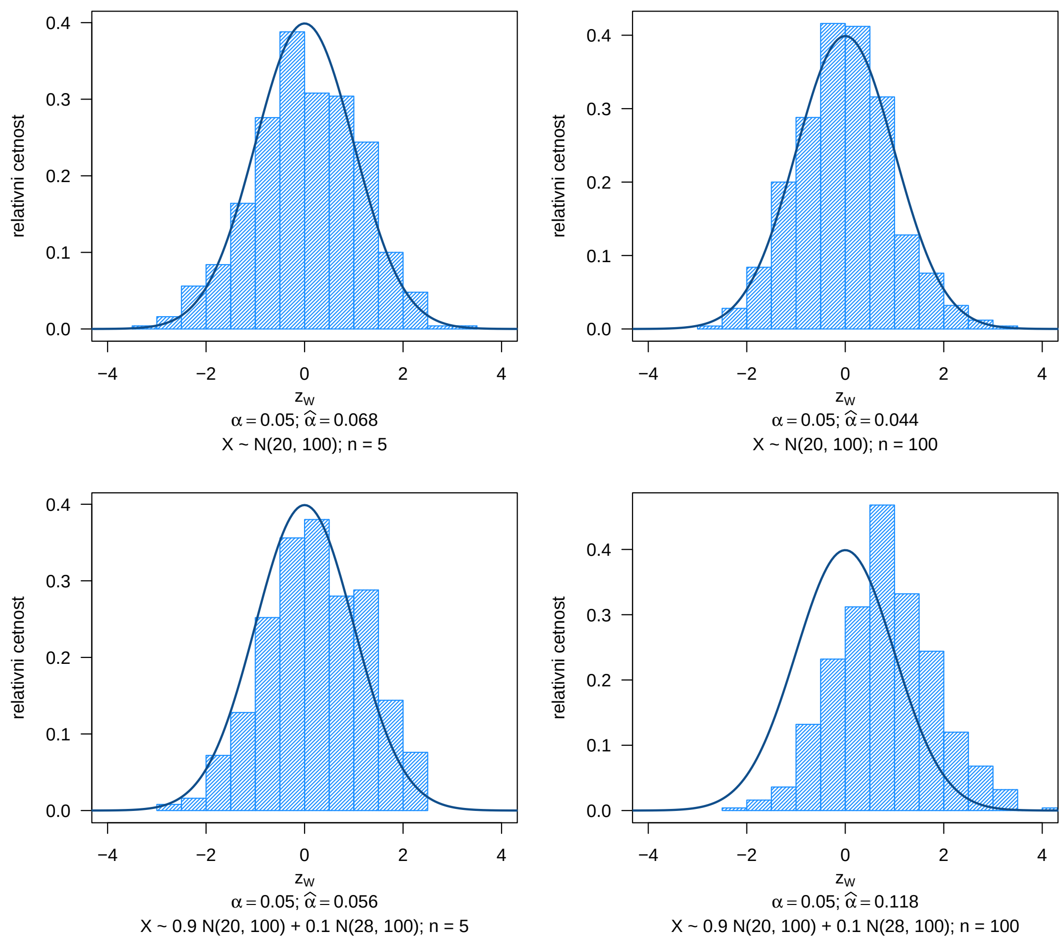
Příklad 4.1. Aktuální vs. nominální hladina významnosti α, konzervativní vs. liberální test
Nechť

(a) $X \sim N(20, 100)$;

(b) $X \sim pN(20, 100) + (1-p)N(28, 100)$, kde $p = 0.9$, tedy jde o směs dvou normálních rozdělení $X \sim N(20, 100)$ a $X \sim N(28, 100)$ v poměru $9 : 1$.

Pro obě části (a) i (b) vygenerujte $M = 500$ náhodných výběrů s rozsahem $n = 5$, resp. $n = 100$ a vypočítejte hodnotu testovací statistiky Z_W pro Waldův test nulové hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0 = 20$ oproti $H_1 : \mu \neq 20$, když σ^2 známe ($\sigma^2 = 10^2$) na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Hodnoty testovacích statistik Z_W zaneste do histogramu. Vždy spočítejte, kolik testovacích statistik Z_W spadá do kritického oboru W. Toto číslo podělené hodnotou M představuje aktuální hladinu významnosti $\widehat{\alpha}$. Porovnejte tuto hodnotu s nominální hladinou významnosti α a v každé ze čtyř situací určete, zda je test konzervativní či liberální.

Poznámka: Test samozřejmě nemusí být ani konzervativní ani liberální, což je ten nejlepší případ. Konzervativnost nebo liberálnost testu chápeme jako (negativní) vlastnost testu, kterou, je-li přítomná, musíme mít na zřeteli.



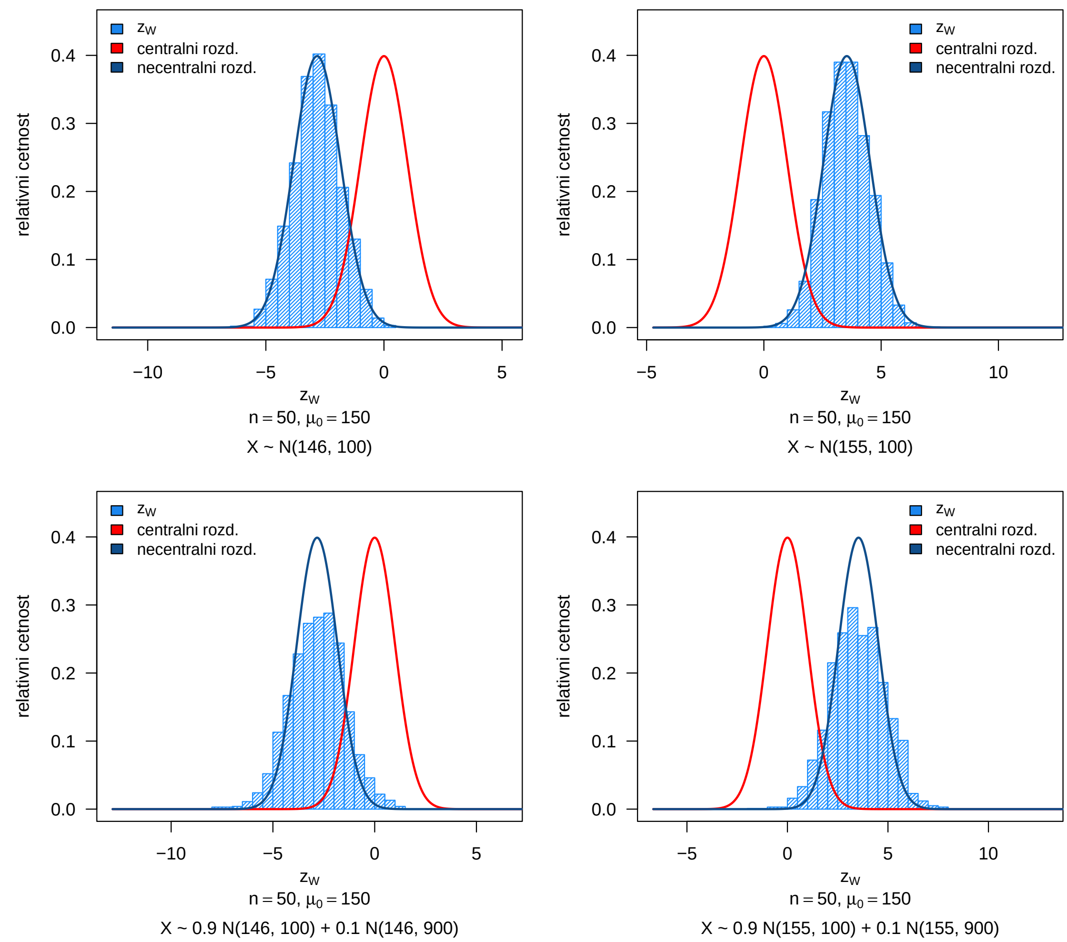
Obrázek 1: Rozdělení Waldovy testovací statistiky Z_W pro test o střední hodnotě μ při známém rozpylu $\sigma^2 = 10^2$; porovnání aktuální a nominální hladiny významnosti α

Příklad 4.2. Rozdělení testovací statistiky pro test o střední hodnotě μ, když σ^2 známe
Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pomocí simulační studie porovnejte rozdělení testovací statistiky Z_W pro test nulové hypotézy H_0: $\mu = 150$ (alternativní hypotéza H_1: $\mu \neq 150$), když rozptyl σ^2 známe, s rozdělením testovací statistiky stanovené na základě náhodného výběru se střední hodnotou μ. Parametry zvolte (a) $\mu = 146$, $\sigma^2 = 10^2$, $n = 50$; (b) $\mu = 155$, $\sigma^2 = 10^2$, $n = 50$.

Nechť dále X pochází ze směsi dvou normálních rozdělení, t.j. $X \sim [pN(\mu, 10^2) + (1-p)N(\mu, 30^2)]$, kde $p = 0.9$ a (c) $\mu = 146$; (d) $\mu = 155$. Proveďte simulační studii popsanou výše také pro tento náhodný výběr.

Nasimulujte M pseudonáhodných výběrů, $M = 1, \ldots, 2\,000$ a pro každý vypočítejte realizaci testovací statistiky $z_{W,\lambda}^{(m)} = \frac{\bar{x}_m - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ pro nulovou hypotézu H_0: $\mu = 150$ oproti H_1: $\mu \neq 150$. Vykreslete histogram testovacích statistik Z_W a superponujte jej jednak křivkou hustoty normálního rozdělení $N(\lambda, 1)$ s parametrem necentrality λ ($\lambda = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, kde μ je skutečná střední hodnota (relevantní za platnosti H_1)) a jednak křivkou hustoty standardizovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$. Obě křivky potom vzájemně okometricky porovnejte.

Poznámka: U směsi křivka hustoty necentrálního rozdělení nesuperponuje histogram statistik z_W dostatečně. Zamyslete se nad tím, proč, a co z toho pro nás do praxe vyplývá. Odpověď uveďte formou komentáře.



Obrázek 2: Porovnání centrálního a necentrálního normálního rozdělení s rozdělením testovací statistiky Z_W testu o střední hodnotě μ při známém rozptylu σ^2

Teorie k příkladu 4.3

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
- $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

b) $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ $\quad$ $H_{12} : \mu > \mu_0$ ... pravostranná

- Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}\,;\, \infty)$
- $\beta_{12} = \Pr\left(H_0 \text{ nezamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... CHDD
- $\beta_{12}^* = 1 - \beta_{12} = \Pr\left(H_0 \text{ zamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... síla
-

$$\begin{aligned}
\beta_{12}^*(\mu) = 1 - \beta_{12}(\mu) &= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha}\right) = 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0+\mu-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(Z_W \leq u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad //\Phi\left(u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(-u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha}\right) \\
&= \Phi\left(u_\alpha + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \text{ ... síla pro } H_{12}
\end{aligned}$$

c) $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ $\quad$ $H_{13} : \mu < \mu_0$ ... levostranná

- Kritický obor: $W = (-\infty\,;\, u_\alpha\rangle$
- $\beta_{13} = \Pr\left(H_0 \text{ nezamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... CHDD
- $\beta_{13}^* = 1 - \beta_{13} = \Pr\left(H_0 \text{ zamítáme } | H_0 \text{ neplatí }\right)$ ... síla
-

$$\begin{aligned}
\beta_{13}^*(\mu) = 1 - \beta_{13}(\mu) &= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha\right) = \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu_0+\mu-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= \Pr\left(Z_W \leq u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= \Phi\left(u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad //\Phi\left(u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(-u_\alpha\right) = 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha}\right) \\
&= \Phi\left(-u_{1-\alpha} - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \text{ ... síla pro } H_{13}
\end{aligned}$$

a) $H_{01} : \mu = \mu_0$ $\qquad$ $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ ... oboustranná

- Kritický obor: $W = (-\infty\,;\, u_{\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}\,;\, \infty)$
- $\beta_{11} = \Pr(H_0 \text{ nezamítáme } | H_0 \text{ neplatí })$ ... CHDD
- $\beta^*_{11} = 1 - \beta_{11} = \Pr(H_0 \text{ zamítáme } | H_0 \text{ neplatí })$ ... síla
-

$$
\begin{aligned}
\beta^*_{11}(\mu) = 1 - \beta_{11}(\mu) &= \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{\alpha/2}\right) + \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > u_{1-\alpha/2}\right) \\
&= (\dots) \\
&= \Pr\left(Z_W \leq u_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + 1 - \Pr\left(Z_W \leq u_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
&= (\dots) \\
&= \Phi\left(u_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \dots \text{síla pro } H_{11}
\end{aligned}
$$

Příklad 4.3. Silofunkce pro test o střední hodnotě μ když σ^2 známe
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Nechť $\theta = \mu$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme všechny tři typy hypotéz

a) $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná);

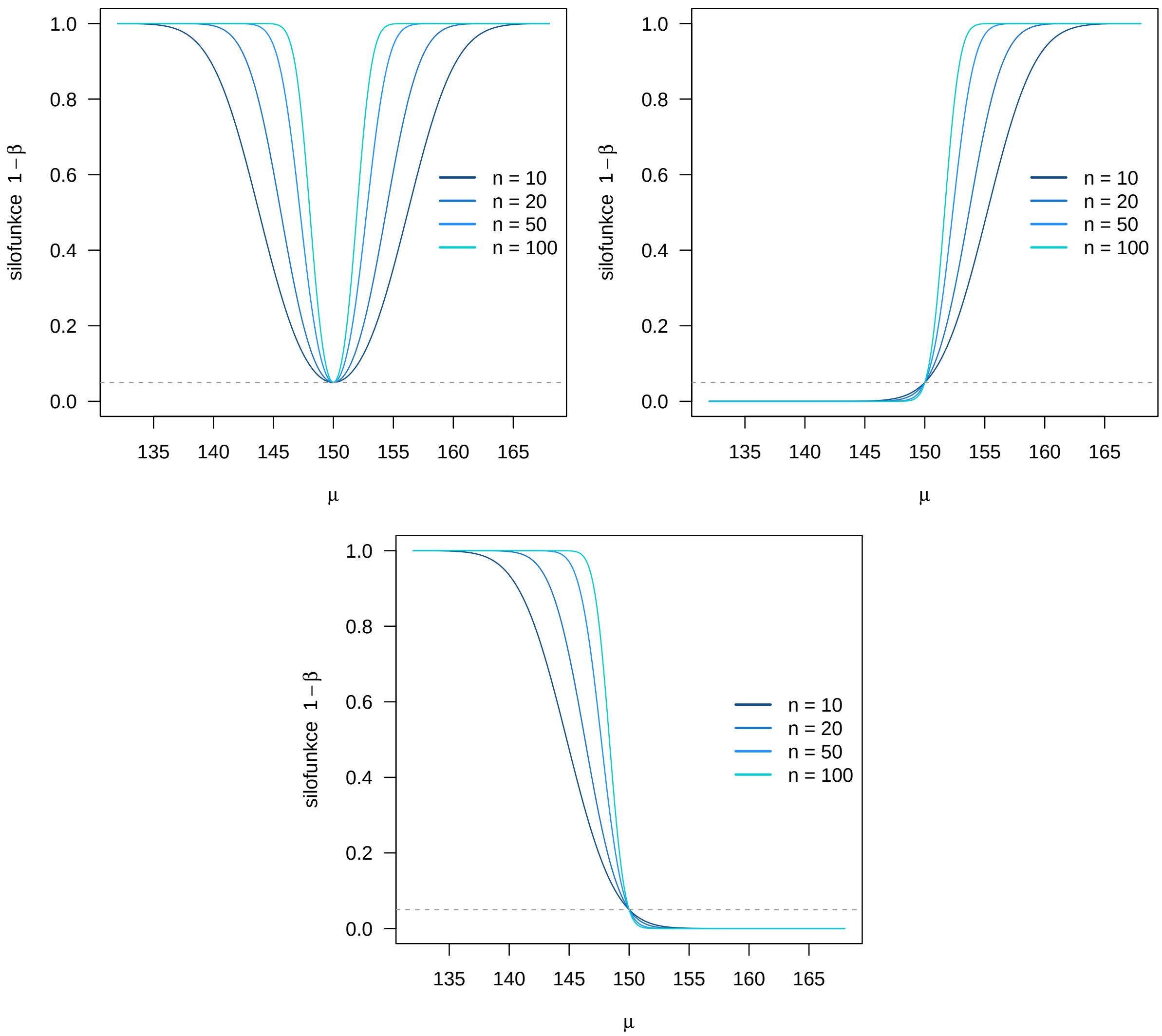
b) $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ oproti $H_{12:}\ \mu > \mu_0$ (pravostranná);

c) $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ oproti $H_{13} : \mu < \mu_0$ (levostranná).

Odvoďte tvary silofunkcí pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), t.j. tvary $\beta^*_{11}(\mu)$, $\beta^*_{12}(\mu)$ a $\beta^*_{13}(\mu)$ (odvození viz teorie k příkladu 4.3).

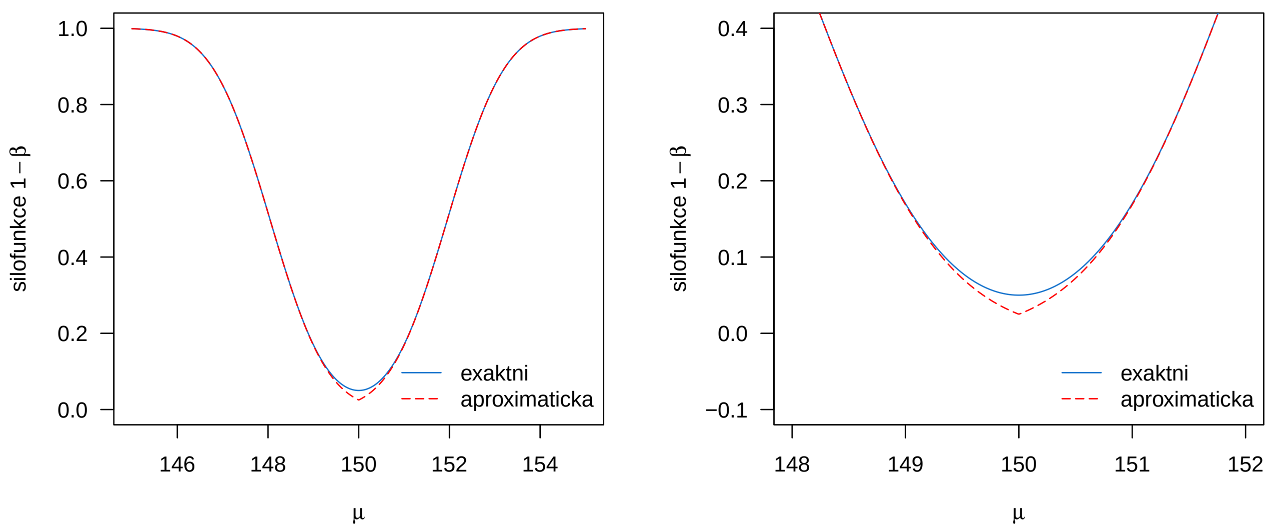
Dále nakreslete silofunkce pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), kde $\mu_0 = 150$, a $\sigma^2 = 10^2$. Do jednoho obrázku zakreslete vždy tvary silofunkcí pro $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$ a $n = 100$. Hodnoty μ volte rozumně, např. v intervalu $\langle 132; 168\rangle$.

Poznámka: Ve všech třech případech (a), (b) i (c) vidíme, že v hodnotě $\mu = \mu_0 = 150$ se hodnota síly rovná hodnotě hladiny významnosti $\alpha = 0.05$. To vychází z toho, že my předem volíme pravděpodobnost s jakou H_0 zamítáme, a to prostřednictvím hladiny významnosti α (v jejím případě jde z definice o volbu rizika chyby, že H_0 nesprávně zamítáme přestože platí). Pro jiné μ (libovolné μ; $\mu \neq 150$) H_0 neplatí a zamítáme-li H_0, žádné chyby se nedopouštíme. Z grafu je potom krásně vidět, jak s rostoucí vzdáleností μ od $\mu_0 = 150$ roste pravděpodobnost, že H_0 zamítáme (tj. roste síla testu).



Obrázek 3: Silofunkce testu o střední hodnotě μ při známém rozptylu σ^2 pro (a) oboustrannou alternativu, (b) pravostrannou alternativu, (c) levostrannou alternativu

Příklad 4.4. Porovnání exaktní a aproximatické silofunkce
Uveďte tvary přesné silofunkce β^*_{11} a přibližné silofunkce $\tilde{\beta}^*_{11}$ pro test $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ když σ^2 známe. Nakreslete křivky obou silofunkcí do jednoho grafu, kde na ose x budou různé hodnoty parametru μ na ose y vynesená silofunkce, a porovnejte jejich tvary. Výsledek slovně okomentujte. Hodnotu n zvolte 100, $\mu_0 = 150$ a $\sigma^2 = 10^2$. Rozsah osy x volte rozumně, pro globální pohled např. $\langle 145; 155 \rangle$, pro lokální zaměření rozdílů zvolte rozsah osy x $\langle 148; 152 \rangle$.



Obrázek 4: Porovnání exaktní a aproximatické silofunkce pro test o střední hodnotě μ při známém rozptylu σ^2

Poznámka:

- Aproximatickou sílu můžeme spočítat pouze pro oboustrannou alternativu, neboť její myšlenka je společné vyjádření obou částí síly (dvou distribučních funkcí) prostřednictvím jedné distribuční funkce s absolutní hodnotou. U jednostranných alternativ je síla tvořena pouze jednou distribuční funkcí, proto zde myšlenka fungující u oboustranné alternativy postrádá smysl.

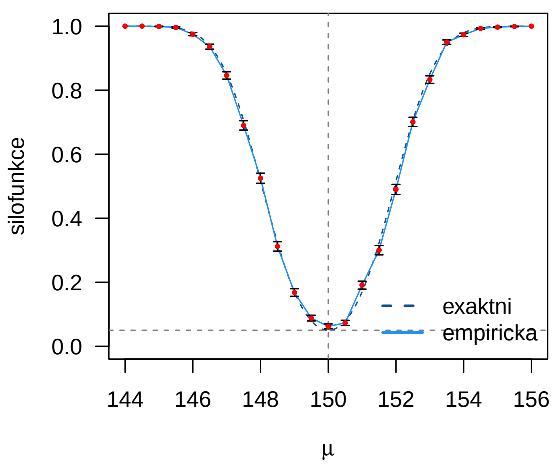
- Z vykreslených grafů vidíme, že exaktní a aproximatická křivka se od sebe nejvíce odlišují v okolí $\mu = \mu_0 = 150$. Čím více se od $\mu = \mu_0 = 150$ vzdalujeme, tím je aproximace přesnější. Zamyslete se nad tím, proč tomu tak je.

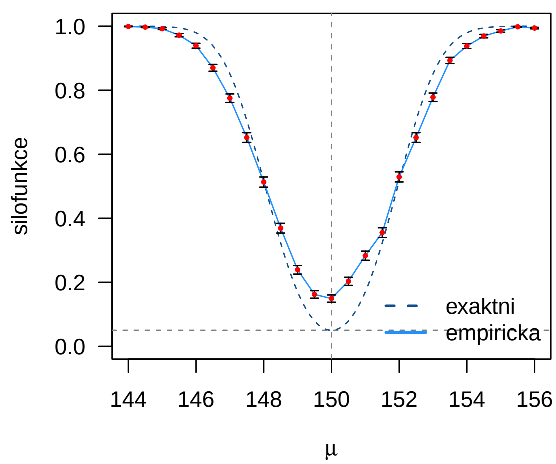
  - **Odpověď:** Aproximatická síla je založena na zanedbání jedné ze dvou distribučních funkcí, které tvoří exaktní sílu. Z odvození, které je uvedené v pdf s komentáři a pseudokódem, je zřejmé, že s rostoucí vzdáleností $\mu - \mu_0$ dochází v exaktní síle ke zmenšování hodnoty jedné z distribučních funkcí, takže pokud tuto distr. funkci v aproximatické síle zanedbáme, zas tak moc se nestane (rozdíl mezi oběma silami bude malý). Nicméně v okolí $\mu = \mu_0 = 150$ je vzdálenost μ od μ_0 malá a do výsledné hodnoty exaktní síly přispívají velkým dílem obě distribuční funkce. Pokud tedy jednu z těchto distribučních funkcí zanedbáváme, přicházíme v aproximatické síle o její příspěvek (aproximatická síla je v okolí $\mu = \mu_0$ výrazněji menší než exaktní síla).

Příklad 4.5. Porovnání empirické a exaktní síly jednovýběrového Z-testu
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 10^2$, $n = 100$. Nechť $\theta = \mu$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme hypotézu $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná), $\mu_0 = 150$.

Nakreslete graf porovnávající exaktní a empirickou silofunkci při měnící se střední hodnotě náhodného výběru $\mu = 144, 144.5, 145, \ldots, 155.5, 156$. Tutéž simulační studii zopakujte následně pro předpoklad, že náhodný výběr X pochází ze směsi dvou normálních rozdělení, t.j. $X \sim [pN(\mu, 10^2) + (1-p)N(\mu, 30^2)]$, kde $p = 0.9$.

Vytvořte tabulku uvádějící přesné hodnoty exaktní a empirické silofunkce pro test o střední hodnotě μ když σ^2 známe, přičemž parametr $\mu_0 = 150$ a $\mu \in (146, 147, 148, 149, 149.5, 150, 150.5, 151, 152, 153, 154)$.
Návod: Vygenerujte $M = 1\,000$ pseudonáhodných výběrů a pro každý stanovte hodnotu testovací statistiky $z_{W,m}$, kde $m = 1, \ldots, 1\,000$. Dále vypočítejte p-hodnotu korespondující se $z_{W,m}$ a porovnejte ji s hladinou významnosti $\alpha = 0.05$. Tak získáte empirickou silofunkci $\widehat{\beta^*_{11}}(\mu)$. Do grafu zakreslete $\widehat{\beta^*_{11}}(\mu)$ i její standardizované chyby $\widehat{SD[\widehat{\beta^*_{11}}(\mu)]} = \sqrt{\frac{\widehat{\beta^*_{11}}(\mu)\widehat{\beta_{11}}(\mu)}{M}}$ v podobě chybové úsečky $\widehat{\beta^*_{11}}(\mu) \pm \widehat{SD[\widehat{\beta^*_{11}}(\mu)]}$. Do grafu vkreslete také teoretickou silofunkci $\beta^*_{11}(\mu)$, $\mu \in \langle 143; 157\rangle$ (na její výpočet použijte funkci sila.exact()).





Obrázek 5: Exaktní a empirická síla testu o střední hodnotě μ když σ^2 známe při (a) normálním rozdělení; (b) smíšeném rozdělení náhodného výběru – oboustranná alternativa H_{11}

Tabulka 1: Exaktní a empirická síla testu o střední hodnotě μ když σ^2 známe – oboustranná alternativa H_{11}, $X \sim N(\mu, 10^2)$

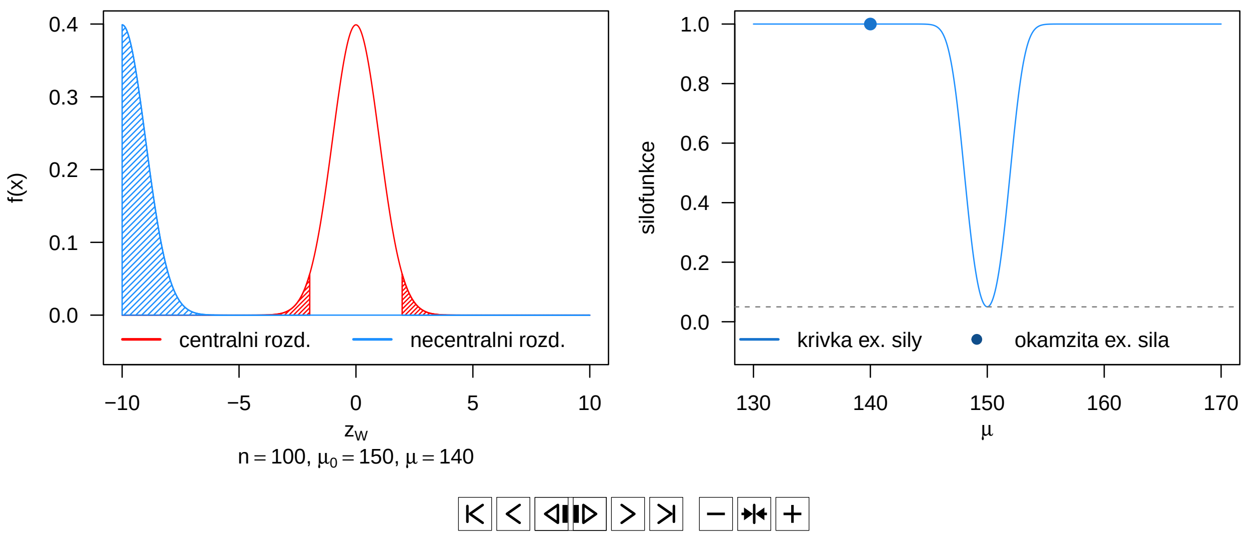
	146	147	148	149	149.5	150	150.5	151	152	153	154
ex. síla	0.9793	0.8508	0.5160	0.1701	0.0791	0.0500	0.0791	0.1701	0.5160	0.8508	0.9793
emp. síla	0.9820	0.8700	0.5210	0.1770	0.0780	0.0500	0.0780	0.1650	0.5300	0.8530	0.9820

Tabulka 2: Exaktní a empirická síla testu o střední hodnotě μ když σ^2 známe – oboustranná alternativa H_{11}, $X \sim 0.9N(\mu, 10^2) + 0.1N(\mu, 30^2)$

	146	147	148	149	149.5	150	150.5	151	152	153	154
ex. síla	0.9793	0.8508	0.5160	0.1701	0.0791	0.0500	0.0791	0.1701	0.5160	0.8508	0.9793
emp. síla	0.9330	0.7940	0.5170	0.2590	0.1680	0.1400	0.1510	0.2730	0.4990	0.7530	0.9320

Příklad 4.6. Silofunkce testu o střední hodnotě μ když σ^2 známe
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 10^2$, $n = 100$. Nechť $\theta = \mu$. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme hypotézu $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná), kde $\mu_0 = 150$.

Vytvořte animaci zobrazující (a) změnu polohy necentrálního rozdělení vzhledem k hodnotě centrálního rozdělení testovací statistiky testu o μ když σ^2 známe, spolu s barevně odlišenou oblastí kritického oboru a exaktní síly; (b) změnu hodnoty exaktní silofunkce; při měnící se střední hodnotě náhodného výběru $\mu = 140, 141, \ldots, 146, 146.5, \ldots, 153.5, 154, 155, \ldots 160$.



Obrázek 6: Průběh síly testu o střední hodnotě μ když σ^2 známe – oboustranná alternativa

Teorie k příkladu 4.7

- $\alpha = 0.05$, $\beta^*_{1i}(\mu) = 0.8$ (síla) $\rightarrow 1 - \beta^*_{1i}(\mu) = \beta_{1i}(\mu) = 0.2$ $\Pr(CHDD)$, $i = 1, 2, 3$
- $\alpha \ldots \Pr(H_0$ zamítáme $\mid H_0$ platí$) = 0.05$
- $\beta_{1i} \ldots \Pr(H_0$ nezamítáme $\mid H_0$ neplatí$) = 0.20$, $i = 1, 2, 3$

1. $H_{01} : \mu = \mu_0$ $\quad H_{11} : \mu \neq \mu_0$ ... oboustranná
   - $\mu \in \{145, 145.5, \ldots 154.5, 155\}$
   -

$$\begin{aligned}
\beta^*_{11}(\mu) &\approx \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad \text{(aproximatická síla)} \\
u_{\beta^*_{11}(\mu)} &\approx u_{\alpha/2} + \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \\
\frac{u_{\beta^*_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}}{|\mu - \mu_0|}\sigma &\approx \sqrt{n} \\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{\beta^*_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2 \\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{1-\beta_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2 \qquad //u_{1-\alpha} = -u_\alpha \\
n_{min} &\geq \frac{\left(-u_{\beta_{11}(\mu)} - u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2 \qquad //(-a-b)^2 = (a+b)^2 \\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{\beta_{11}(\mu)} + u_{\alpha/2}\right)^2}{|\mu - \mu_0|^2}\sigma^2
\end{aligned}$$

2. $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ $\quad H_{12} : \mu > \mu_0$ ... pravostranná
   - $\mu \in \{150.25, 150.5, 150.75, \ldots 153.5, 153.75, 154\}$
   -

$$\begin{aligned}
\beta^*_{12}(\mu) &= \Phi\left(u_\alpha + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \\
u_{\beta^*_{12}(\mu)} &= u_\alpha + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \\
\frac{u_{\beta^*_{12}(\mu)} - u_\alpha}{\mu - \mu_0}\sigma &= \sqrt{n} \\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{\beta^*_{12}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2 \\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{1-\beta_{12}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2 \qquad //u_{1-\alpha} = -u_\alpha \\
n_{min} &\geq \frac{\left(-u_{\beta_{12}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2 \qquad //(-a-b)^2 = (a+b)^2 \\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{\beta_{12}(\mu)} + u_\alpha\right)^2}{(\mu - \mu_0)^2}\sigma^2
\end{aligned}$$

3. $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ $\quad H_{13} : \mu < \mu_0$ ... levostranná

- $\mu \in \{146, 146.25, 146.5, \dots 149.5, 149.75\}$
- $$\begin{aligned}
\beta^*_{13}(\mu) &= \Phi\left(u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\\
u_{\beta^*_{13}(\mu)} &= u_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\\
u_{\beta^*_{13}(\mu)} &= u_\alpha + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\\
\frac{u_{\beta^*_{13}(\mu)} - u_\alpha}{\mu_0-\mu}\sigma &= \sqrt{n}\\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{\beta^*_{13}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu_0-\mu)^2}\sigma^2\\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{1-\beta_{13}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu_0-\mu)^2}\sigma^2 \qquad //u_{1-\alpha} = -u_\alpha\\
n_{min} &\geq \frac{\left(-u_{\beta_{13}(\mu)} - u_\alpha\right)^2}{(\mu_0-\mu)^2}\sigma^2 \qquad //(-a-b)^2 = (a+b)^2\\
n_{min} &\geq \frac{\left(u_{\beta_{13}(\mu)} + u_\alpha\right)^2}{(\mu_0-\mu)^2}\sigma^2
\end{aligned}$$

Příklad 4.7. Minimální rozsah náhodného výběru
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 10^2$. Nechť $\theta = \mu$. Testujeme všechny tři typy hypotéz:

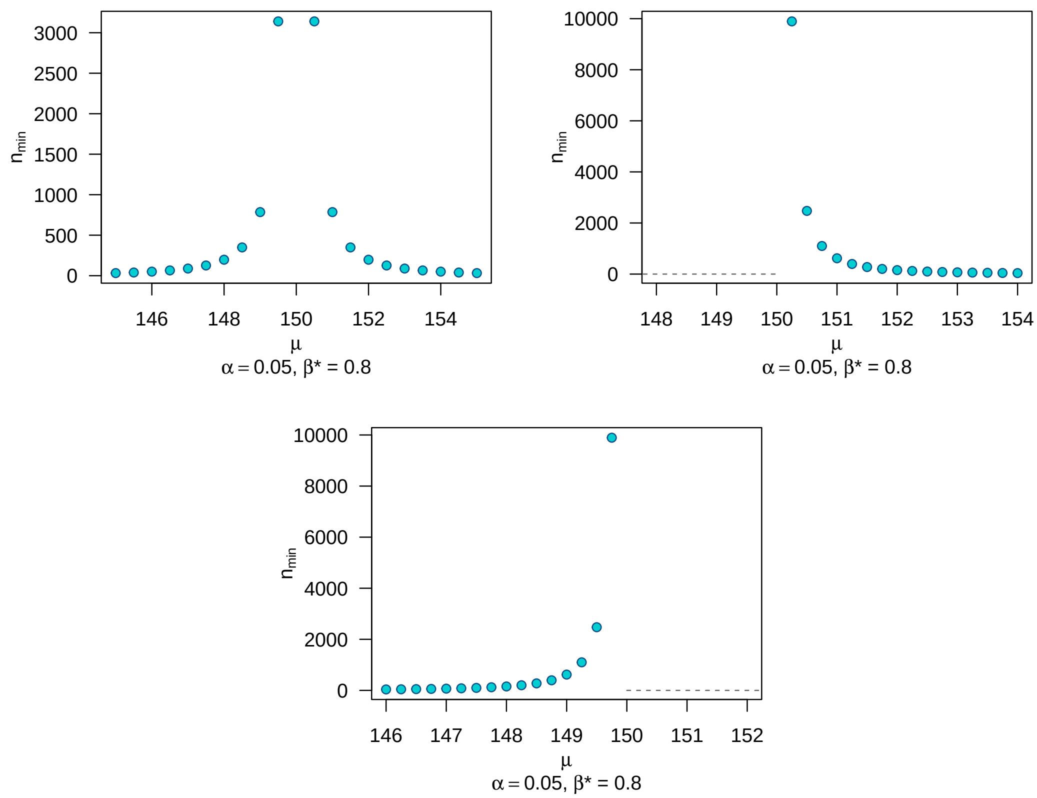
1. $H_{01}: \mu = \mu_0$ oproti $H_{11}: \mu \neq \mu_0$ (oboustranná),
2. $H_{02}: \mu \leq \mu_0$ oproti $H_{12:}\ \mu > \mu_0$ (pravostranná),
3. $H_{03}: \mu \geq \mu_0$ oproti $H_{13}: \mu < \mu_0$ (levostranná),

kde $\mu_0 = 150$ Vypočítejte minimální rozsah náhodného výběru pro test nulové hypotézy při $\alpha = 0.05$ a $1 - \beta = 0.8$, pro $\mu \in \{145, 145.5, \dots 154.5, 155\}$ (ad (1)); $\mu \in \{150.25, 150.5, 150.75, \dots 153.5, 153.75, 154\}$ (ad (2)); $\mu \in \{146, 146.25, 146.5, \dots 149.5, 149.75\}$ (ad (3)). Závislost minimálního rozsahu náhodného výběru na hodnotě μ zakreslete do grafu pomocí bodů (na osu x vyneste parametr μ, na osu y minimální rozsah náhodného výběru.).

Určete, jaký bude minimální rozsah náhodného výběru pro test nulové hypotézy $H_0: \mu = \mu_0$, kde $\mu_0 = 150$ oproti alternativním hypotézám H_{11}, H_{12} a H_{13} při předem stanovené síle $\beta^* = 0.8$ a hladině významnosti $\alpha = 0.05$, předpokládáme-li, že výběrová střední hodnota μ bude nabývat hodnot $\mu \in \{145, 146, 147, 148, 149, 149.5, 150.5, 151, 152, 153, 155\}$.

Tabulka 3: Minimální rozsah náhodného výběru pro test o μ když σ^2 známe; $\alpha = 0.05$, $\beta^* = 0.8$, $\mu_0 = 150$

μ	145.0	146.0	147.0	148.0	149.0	149.5	150.5	151.0	152.0	153.0	154.0	155.0
$H_{11}: \mu = \mu_0$	32.0	50.0	88.0	197.0	785.0	3140.0	3140.0	785.0	197.0	88.0	50.0	32.0
$H_{12}: \mu > \mu_0$							2474.0	619.0	155.0	69.0	39.0	25.0
$H_{13}: \mu < \mu_0$	25.0	39.0	69.0	155.0	619.0	2474.0						



Obrázek 7: Minimální rozsahy náhodných výběrů pro test o střední hodnotě μ při předem zvolených hodnotách α, β, μ a μ_0 pro (a) oboustrannou, (b) pravostrannou, (c) levostrannou alternativu