## 5.1

a) $X \sim N(20, 100)$

b) $X \sim pN(20,100) + (1-p)N(28,100)$, $p = 0.9$

$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$

$H_0: \mu = 20 \qquad H_1: \mu \neq 20$

$H_0$ testujeme testem o $\mu$ když $\sigma^2$ neznáme. (Simulace reálné situace, kdy máme nějaký náhodný výběr, který má nějakou stř. hodnotu $\mu$ a nějaký rozptyl $\sigma^2$, ale my je neznáme. Zde obě hodnoty sice známe, ale chováme se, jako bychom je neznali. O $\mu$ pouze prostřednictvím $H_0$ předpokládáme, že $\mu = 20$, o $\sigma^2$ nevíme nic).

Testovací statistika testu o $\mu$ když $\sigma^2$ neznáme: $T_W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$.

$S = \sqrt{S^2}$, kde $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

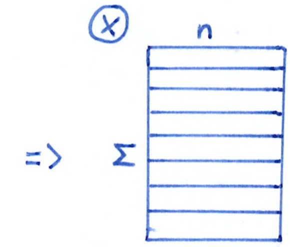
↑ $t$ Studentovo rozdělení o $n-1$ stupních volnosti.

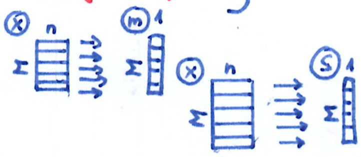
---

**Řešení (a) i (b) v jednom:**

povinné parametry; doplnit; doplnit defaultní hodnotu

```
KLWaltT <- function(mu0, main, n, M=500, mu1=..., mu2=mu1, sigma1=..., sigma2=sigma1,
                    p=0.9, alpha=...){   # doplnit
  M<-500; n<-5; p<-0.9
  X<-matrix(NA, M, n)
  for(i in 1:M){
    bin <- rbinom(n, 1, p)
    X[i, ][bin == 1] <- rnorm(sum(bin==1), mu1, sigma1)     # μ1, sm. odchylka σ1
    X[i, ][bin == 0] <- rnorm(sum(bin==0), mu2, sigma2)     # μ2, σ2
  }
  m <- apply( , , mean) ... x̄ ... vektor průměrů x̄
  s <- apply( , , sd) ... s ... vektor sm. odchylek s
  tw <- (x̄ - μ0)/s * √n
    ↳ histogram
  d <- hist(tW, plot=F)$dens ... výšky sloupců histogramu (využijeme později k nastavení optimálního rozsahu osy y)
  xfit <- seq(...)  posloupnost od tW-10 do tw+10 o délce minimálně 500
  yfit <- dt(...)   hustota Studentova rozdělení o n-1 st. volnosti nad posloupností xfit
  akt.hl.vyzn <- Σ_{i=1}^{M} I(|tW| > t_{n-1}(1-α/2)) / M = α̂
                 sum()   abs(tW) > qt()
  akt.p.pokryti <- 1 - α̂
  hist(tw, prob=T, xlim=c(-6,6), ylim=c(0, max(yfit, d)),
       breaks=seq(floor(min(tW)), ceiling(max(tw)), by=0.5), ... ) histogram
  box(...) □
  mtext(expression(t[W]), side=1, line=2.2) ... popisek tw
  mtext(bquote(paste(1-alpha == .(1-alpha), ';  ', 1-widehat(alpha) == .(akt.p.pokryti))), ...)
  mtext(main, ...) ... popisek X~N(20,100); n=5
  lines(xfit, yfit, ...)
}
```





}  počet IS, které obsahují $\mu = 20$ je stejný jako počet tW, které jsou v absolutní hodnotě větší než $t_{n-1}(1-\alpha/2)$. (Vyplývá z propojení testu pomocí IS a krit. oboru)

automaticky ohlídáme, aby se do grafu vešel histogram i ∩

rel. škála osy y

hranice intervalů budou čísla cca $-6, -5.5, -5, -4.5, \ldots, 5.5, 6$

zaokrouhlení dolů na nejbližší nižší celé číslo

zaokr. nahoru na nejbližší vyšší celé číslo

pod graf; na řádek 2.2; $\hat{\alpha}$; ↑ středník

(b) `KWaldT(mu0=20, n=5, mu2=28, main='X~0.9N(20,100)+0.1N(28,100); n=5')`

❗Nezapomeňte u každé situace uvést závěr, zda je test konzervativní nebo liberální (def. viz S02) ☺

$X \sim N(150, 30^2)$

$H_0: \mu = \mu_0$ $\quad$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

$H_0: \mu = 150$ $\quad$ $H_1: \mu \neq 150$

$H_0$ testujeme testem o $\mu$ když $\sigma^2$ neznáme.

1. Testovací statistika $T_W = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim t_{n-1}$

2. Testovací statistika $T_W^2 = \dfrac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{s^2} \cdot n \sim F_{1,n-1}$

$$s = \sqrt{s^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

3. Testovací statistika $U_W = t_W^2 \dfrac{n}{n-1} \sim \chi_1^2$

4. Testovací statistika $U_S = \dfrac{\frac{n t_W^2}{n-1}}{1 + \frac{t_W^2}{n-1}} \sim \chi_1^2$

5. Testovací statistika $U_{LR} = n \ln\left(1 + \dfrac{t_W^2}{n-1}\right) \sim \chi_1^2$

---

Příklady 5.2 a 5.3 vyřešíme společně vytvořením funkce T.stat(), která v závislosti na zvoleném typu testovací statistiky vykreslí odpovídající obrázek. Tuto funkci pak použijeme k vykreslení animací v obou příkladech.

T.stat ← function(mu0, mu, n, sigma1=30, sigma2=sigma1, M=... , p=... , type='tW') {

Generování dat

n ← 5; M ← 1000

X ← matrix(NA, M, n)

for(...) {

...}

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ ... $M \times n$

viz předchozí příklad (...) rnorm(sum(bin==1), mu, sigma1)

(...) rnorm(sum(bin==0), mu, sigma2)

Kód si nachystáme i pro směs, ač ji v tomto příkladu nemáme zadanou. Se změnou parametrů $\sigma_1$ a $\sigma_2$ pak můžete kdykoli libovolně experimentovat =).

Příprava testovacích statistik

m ← apply( ) vektor výběrových průměrů $\bar{x}$ (délka = 1000)

s ← apply( ) vektor výběrových sm. odchylek s (1000)

tW ← $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}$ (1000)

tW2 ← $t_W^2$ (1000)

uW ← $t_W^2 \dfrac{n}{n-1}$ (1000)

uS ← $\dfrac{n\, t_W^2}{n-1+t_W^2}$ (1000)

uLR ← $n \ln\left(1 + \dfrac{t_W^2}{n-1}\right)$ (1000)

testovací statistiky

if (type=='tW') { // nastavení specifických proměnných při vykreslení histogramu pro test. statistiku tW.

x ← tW

main ← expression(...) ... popisek $t_W$

xlim ← c(-7, 7)

xx ← seq(-7, 7, length=512) posl. od -7 do 7 o minimální délce 500

yy ← dt(...) hustota Studentova rozdělení o n-1 st. volnosti nad posloupností xx

}

Specifikace vybraných proměnných podle zvolené

```
if(type == 'tw2'){
    X <- tW2
    main <- ...        popisek t_w^2
    xlim <- c(0,15)
    xx <- seq(...)     posl. od 0 do 20 o délce minimálně 500
    yy <- df(...)      hustota Fisher - Snedecorova F-rozdělení o 1 a n-1 stupních volnosti nad posloupností xx
}
if(type == 'uW'){
    X <- ...
    main <- ...        popisek Uw
    xlim <- c(0,10)
    xx <- ...          posl. od 0 do 15 o délce minimálně 500
    yy <- dchisq(...) }   hustota χ^2-rozdělení o 1 stupni volnosti nad posloupností xx
if(type == 'uS'){analogicky jako uW}
if(type == 'uLR'){analogicky jako uW}

                                     pevně zvolený počet (15) třídicích intervalů
hist(X, prob=T, ylim=c(0,0.5), breaks=15, xlim=xlim,...)
box(...) □
mtext(main,...)    popisek ... název zvolené testovací statistiky
mtext(bquote(paste(...)),...)   popisek n=on (on se automaticky mění v návislosti na zvoleném rozsahu náh. výběru).
lines(xx, yy,...)  křivka hustoty příslušného rozdělení test. statistiky
}
```

* 5.2 : Animace asymptotického rozdělení statistik $t_w$ a $t_w^2$:

```
n <- c(5,10,15,...,250,500)
              rozdělí okno na 2 grafy vedle sebe
par(mfrow=c(1,2), mar=c(5,5,1,1))   změní velikost okrajů grafů 5 □ 1 (defaultní je 4 □ 2)
oopts <- ...
ani.record <- ...        nejsem si jistá, možná příkaz par(...) patří až sem. Vyzkoušejte. =)
saveLatex( for( i in 1:length(n)){
        T.stat(mu0=150, mu=150, n=n[i], type='tw')
        T.stat(mu0=150, mu=150, n=n[i], type='tw2')
    },...)
```

5.3: Animace (asymptotického) rozdělení statistik $U_W$, $U_S$ a $U_{LR}$:

- analogicky jako 5.2 (*).

$$U_S = \frac{\frac{n t_W^2}{n-1}}{1+\frac{t_W^2}{n-1}} \qquad U_{LR} = n \ln\left(1+\frac{t_W^2}{n-1}\right) \qquad U_W = \frac{n t_W^2}{n-1} \qquad // \; x = \frac{t_W^2}{n-1}$$

$$\frac{n x}{1+x} \qquad n \ln(1+x) \qquad n x$$

Z příkladu 2.1 (z druhého cvičení) víme, že platí nerovnost $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

$\Rightarrow$ $U_S \leq U_{LR} \leq U_W$. Při $n \to \infty$ se za platnosti $H_0$ rozdělení všech tří test. statistik blíží k $\chi^2_1$ rozdělení a platí $U_S \approx U_{LR} \approx U_W$.

---

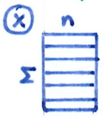
Platnost nerovnosti $U_S \leq U_{LR} \leq U_W$ ověříme pomocí simulační studie:

1. Vygenerujeme $M = 1000$ náh. výběrů ($X \sim N(0,3)$).
   - Vypočítáme 1000 realizací test. statistik $u_W$, $u_S$ a $u_{LR}$.
   - Vypočítáme 3 jádrové odhady hustot rozdělení test. statistik $u_W$, $u_S$ a $u_{LR}$ a křivky těchto jádrových odhadů zakreslíme do grafu.
   - Vytvoříme animaci zobrazující změnu těchto jádrových odhadů při rostoucím n. Tuto změnu porovnáme.
2. Vypočítáme průměrné hodnoty $M = 1000$ realizací test. statistik $u_W$ (resp. $u_S$ a $u_{LR}$) pro $n = 5$, $n = 10$, $n = 100$ a $n = 1000$ a zaneseme je jako body do jednoho grafu. Rozdíly v bodech porovnáme.

---

1.
```
porovnani <- function(n, M=..., mu=..., mu0=..., sigma=..., plot=...){
  M <- 1000; mu0 <- 0; mu <- 0; sigma <- sqrt(3)
  X <- t(replicate(M, rnorm(n, mu, sigma)))  ... matice náh. výběrů
  m <- apply(...)   vektor výb. průměrů (1000)
  s <- apply(...)   vektor výb. rozptylů (1000)
  tW2 <- t_W^2      (1000)
  uW <- U_W         (1000)
  uS <- U_S         (1000)
  uLR <- U_LR       (1000)
  prumery <- c(mean(uS), mean(uLR), mean(uW)) ... vektor 3 průměrů test. statistik (3)

  if(plot==T){ graf se vykreslí, pokud argument plot==T. Jde o přípravu na část 2., kde chceme pouze spočítat vektor prumery, ale grafy nechceme
  plot(uW, type='n', ylim=c(0,1), xlim=c(0,4), ... )... příprava prázdného grafu
  mtext(...) popisek 'x'
  mtext(paste('n =', n), ...)... popisek n=5. Jednoduché popisky lze vytvořit i bez funkcí expression() a bquote().
  lines(density(uW, from=0), ...)... křivka jádrového odhadu hustoty vypočítaného na základě M=1000 realizací U_W. Odhad konstruujeme od 0 dále, protože U_W (stejně jako U_S i U_LR) nemůže být z definice záporné.
  lines(...)   totéž pro uS
  lines(...)   totéž pro uLR
  legend(..., legend=c(expression(u[W]), expression(U_LR), expression(U_S)), ... )...legenda
  }
  return(prumery)
}
```



Animace:
```
  n <- c(2:10, 15, 20, ...) ... posloupnost rozsahů náh. výběrů
  : úvodní nastavení animace
  saveLatex( for(...){
               porovnani(n=n[i])
             }, ... )
```

2.

`m5 <- porovnani (n=5, plot=F)` průměrné hodnoty M=1000 test. statistik $U_W$, $U_S$ a $U_{LR}$ (3), když rozsahy výběru n=5.

`m10 <-` -||- (3) -||- n=10

`m100 <-` -||- (3) -||- n=100

`m1000 <-` -||- (3) -||- n=1000

`m <- cbind (m5, m10, m100, m1000)`

`m.uW <- m[1, ]` vektor prům. hodnot test. statistik $u_W$ pro n=5, n=10, n=100, n=1000. (4)

`m.uS <- ...` -||- $u_S$ -||-

`m.uLR <- ...` -||- $u_{LR}$ -||-

vykreslí body a spojí je čarami; rozsah osy y; plné body; nevykreslí měřítka os x a y

`plot(1:4, m.uW, type='o', ylim=c(min(m.uS)-0.1, max(m.uW)+0.1), pch=20, axes=F,... )`

`box(...)` □

`axis(1, at=c(1,2,3,4), labels=c(5, 10, 100, 1000))` ... šířená osa x. Číslům 1-4 přiřadíme popisky 5,10,100 a 1000 vzdálenost mezi čísly není sice reálná, ale graf je mnohem přehlednější

`axis(2, las=1)` ... měřítko osy y

`lines(1:4, m.uS, type='o', pch=20,... )` body průměrných hodnot $U_S$ pro n=5, n=10, n=100 a n=1000 spojené čarami

`lines(... )` -||- $U_{LR}$ -||-

`legend(...)` legenda; pořadí popisků v legendě zvolíme $U_W$, $U_{LR}$ a $U_S$, které odpovídá umístění křivek v grafu

$U_W$

$U_{LR}$

$U_S$

Motivace:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2$ neznáme

$H_0: \mu = \mu_0$ $\quad H_1: \mu \neq \mu_0$, $>$, $<$

Za platnosti $H_0$: $T_W = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$: Studentovo centrální t-rozdělení o n-1 stupních volnosti.

Pokud $H_0$ neplatí: $T_W = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \sim t_{n-1,\lambda}$ Studentovo necentrální t-rozdělení o n-1 stupních volnosti s parametrem necentrality $\lambda = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\delta}{\sigma}\sqrt{n}$.

Odvození a vysvětlení viz následující příklad 5.6.

---

V tomto příkladu máme pouze za úkol seznámit se s tvarem necentr. Studentova rozdělení a porovnat tento tvar (pro různé hodnoty parametru necentrality $\lambda$) s tvarem centrálního St. rozdělení.

$\lambda = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\delta}{\sigma}\sqrt{n}$ ($\delta$ … vzdálenost $\mu_0$ od skutečné hodnoty $\mu$)

$n = 26$, $\sigma^2 = 1.4^2$, $\delta = 0$ … Pokud $\delta = 0 \Rightarrow$ vzdálenost $\mu - \mu_0$ je $0 \Rightarrow \mu = \mu_0 \Rightarrow H_0$ platí $\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow t_{n-1,\lambda} = t_{n-1,0} = t_{n-1}$ centrální St. t-rozdělení o n-1 st. volnosti (pouze když $H_0$ platí).

$\delta = 0.5, 0.8, 1, 1.2$

**Příprava podkladů pro grafy**

```
n <- ...
sigma <- ...
delta <- ...      vektor 0, 0.5, 0.8, 1, 1.2
lambda <- (x̄-μ0)/σ √n

barvy <- c('red', 'blue', 'darkgreen', 'violet', 'orange') ... vektor libovolných 5 barev
lwd <- c(2, 1, 1, 1, 1) vektor šířky čar (referenční křivka centr. rozdělení bude mít šířku 2, ostatní šířku (tloušťku) 1)
```

**Graf hustoty**

```
plot(0, 0, xlim = c(-4, 9), ylim = c(0, 0.5), type = 'n', ...) ... příprava prázdného grafu
xfit <- seq(...) posl. od -5 do 10σ délce minimálně 500
for (i in 1:length(delta)) {
    yfit <- dt(xfit, n-1, ncp = lambda[i]) hustota centr. (resp. necentr.) rozdělení nad posloupností xfit.
    lines(xfit, yfit, col = barvy[i], lwd = lwd[i]) vykreslení křivky hustoty
}
legend(..., legend = c(expression(paste(delta, ' = 0.0')),
                       expression(paste(  -||-      0.05')),
                          -||-        -||-    -||-     ))), ...) legenda
```

**Graf distr. fce**

```
plot(..., ylim = c(0, 1), ...)
for (...) {
    yfit <- pt(...)
    lines(...)
}
legend(...)          (lty = 5)
```

analogicky jako u grafu hustoty

```
abline(...)
```

svislá přerušovaná šedá referenční čára v hodnotě kvantilu $t_{n-1}(1 - \alpha/2)$, $\alpha = 0.05$. Čára by měla protnout křivku distr. fce $F(x)$ ve výšce 0.975 (97.5 %). Z grafu tedy můžeme pozorovat, jak moc necentralita $\lambda$ (posunutí o vzdálenost $\lambda$) ovlivňuje vztah kvantilu a distr. funkce.

(a) Data pochází z $N(130, 30^2)$, ale my testujeme $H_0: \mu = 150$ oproti $H_1: \mu \neq 150$.
(Analogie reálné situace, kde skutečnou hodnotu $\mu$ neznáme (může být klidně 146) a neznáme ani skutečnou hodnotu rozptylu $\sigma^2$ (může být např. $30^2$), a přesto nějakou $H_0$ o $\mu$ (např. $H_0: \mu = 150$) testujeme)

Za platnosti $H_0$: $T_W = \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}}_{\text{test. stat. je stejná}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$ rozdělení test. stat. se liší $\qquad S = \sqrt{S^2}$, kde $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Pokud $H_0$ neplatí: $T_W = T_{W,\lambda} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} \sim t_{n-1,\lambda}$ ... (necentrální) Studentovo rozdělení s parametrem necentrality $\lambda$.

Zdůvodnění:

$T_{W,\lambda} = \frac{Z_W + \lambda}{\sqrt{V/(n-1)}}$, kde $Z_W = \underbrace{\frac{\overset{\text{statistika}}{\bar{X}} - \mu}{\underset{\text{číslo}}{\sigma}}\overset{\text{číslo}}{\sqrt{n}}}_{\text{statistika}} \sim N(0,1)$ $\qquad \lambda = \underbrace{\frac{\overset{\text{číslo}}{\mu} - \overset{\text{číslo}}{\mu_0}}{\underset{\text{číslo}}{\sigma}}\overset{\text{číslo}}{\sqrt{n}}}_{\text{konstanta}}$ $\qquad V = \underbrace{\frac{\overset{\text{číslo}}{(n-1)}\overset{\text{statistika}}{S^2}}{\underset{\text{číslo}}{\sigma^2}}}_{\text{statistika}} \sim \chi^2_{n-1}$

$$T_{W,\lambda} = \frac{\overbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}}^{N(0,1)} + \overbrace{\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}}^{\lambda}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$
$$= \frac{\frac{\bar{X}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{S}\sqrt{n} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n} = T_W \sim t_{n-1,\lambda}$$

definice Studentova rozdělení

**Věta:** Nechť $Z \sim N(0,1)$ a $V \sim \chi^2_n$, přičemž $Z$ a $V$ jsou nezávislé. Potom test. stat. $T_W = \frac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t_n$.

**Věta:** Nechť $Z \sim N(0,1)$ a $V \sim \chi^2_n$, přičemž $Z$ a $V$ jsou nezávislé. Potom test. stat. $T_W = \frac{Z + \lambda}{\sqrt{V/n}} \sim t_{n,\lambda}$.

---

$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$

$H_0: \mu = 150 \qquad H_1: \mu \neq 150 \qquad$ (a) $\mu = 130$, $\sigma^2 = 30^2$, $n = 50$

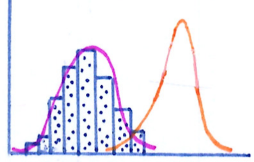
```
rozdeleni.Tw
rozdeleni.Tw <- function(mu, mu0=...150, sigma=...30, sigma2=sigma, M=..., n=..., p=0.9, main='', pozice='topleft'){
    X <- matrix(NA, M, n)
    for (...){
        ...}
```

(X) matice $M \times n$; M = 2000, n = 50, viz příklad 4.2 a 4.1 — ((...) rnorm(sum(bin==1), mu, sigma), (...) rnorm(sum(bin==0), mu, sigma2)). Opět si kód ronou nachystáme pro směs, která nás čeká v (c) a (d)

```
    x̄... m <- apply(...)      vektor průměrů (2000)
    s... s <- apply(...)      vektor sm. odchylek (2000)
    tw... (x̄-μ0)/s √n         vektor test. statistik tw (2000)
    λ... (μ-μ0)/σ √n ... posunutí (parametr necentrality λ) ... číslo (délka = 1)
    xfit <- seq(...)    min(tW)-6 až max(tw)+6
    yfit <- dt(...)     t_{n-1}
    lfit <- dt(..., df=n-1, ncp=λ)   t_{n-1,λ}
    hist (tw, breaks=20, xlim=c(min(tW)-6, max(tw)+6),
          ylim=c(0, max(yfit)+0.05), probs=T, density=..., ...)
    box(...)
    mtext (expression(...), ...)  <- tw
    mtext (bquote(...), ...)      <- n=50, μ0=150  (automaticky)
    mtext (main, ...)             <- X~N(130, 900)  (volitelný vstup funkce (main), nebo automaticky)
    lines (...)
    lines (...)
    legend (pozice, fill=..., bty=..., legend=..., ...)
}
```

relativní škála osy y (jinak se křivky hustot nezykreslí správně!!!)

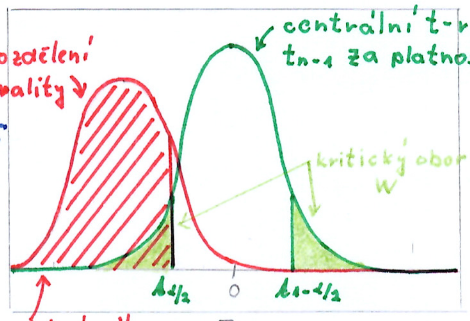
odstraníme rámeček okolo legendy

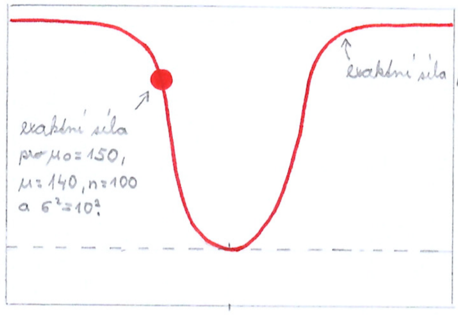



# Usměrní křivka $t_{n-1,\lambda}$ nesuperponuje histogram tw dostatečně. Zamysleme se, proč, a co z toho pro nás do praxe vyplývá.

(d) rozdeleni.Tw (mu=170, sigma2=75, main='X ~ 0.9 N(170, 900) + 0.1 N(170, 5625)', pozice='topright')

Výstupem tohoto příkladu je animace, ve které se s měnící hodnotou $\mu$ mění rozdělení test. statistiky $T_W$ a hodnota exaktní síly. Rozeberme si nejprve, co vidíme na jedné dvojici obrázků.




---

1. V druhém grafu je zobrazena exaktní síla testu o $\mu$ při neznámém rozptylu $\sigma^2$. Nejprve tedy vytvoříme funkci sila.exact.t( ), která vrací pro zadané parametry $\mu, \mu_0, \sigma, n, \alpha$ a alternative hodnotu exaktní síly.

I. Odvození:

2. $H_{02}: \mu \leq \mu_0$ $\quad H_{12}: \mu > \mu_0$ (pravostranná alt.) $\quad$ Krit. obor: $W = \langle t_{n-1}(1-\alpha); \infty)$

$\beta_{12} = \Pr(H_0 \text{ nezamítáme} \mid H_0 \text{ neplatí}) \ldots \Pr(\text{CHDD})$

$\beta^*_{12} = \Pr(H_0 \text{ zamítáme} \mid H_0 \text{ neplatí}) \ldots$ síla testu

Pst na předp., že $X \in N(\mu,\sigma^2)$: $\mu \neq \mu_0$ $\quad T_W \in W$

$$\beta^*_{12}(\mu,\sigma) = 1 - \beta_{12}(\mu,\sigma) = \Pr_{\mu,\sigma}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n} \geq t_{n-1}(1-\alpha)\right)$$

Toto vyjádření nám tentokrát nepomůže. Výpočet síly je „teoretická záležitost", ve výpočtu nám tedy překáží $\bar{X}$ a $S$ (statistiky závislé na náh. výběru, který při výpočtu síly neznáme). I kdybychom $\bar{X}$ „odstranili" analogickou fintou jako v 4.6, pořád zůstává $S$, pro které fintu nemáme. Využijeme tedy toho, že známe rozdělení, které platí, když $X \in N(\mu,\sigma^2)$ a $H_0$ neplatí! $\Rightarrow$ $(T_W \sim t_{n-1,\lambda})$.

$$= \Pr_{\mu,\sigma}(T_W \geq t_{n-1}(1-\alpha))$$

Pst, že $H_0$ zamítáme | $H_0$ neplatí.

$$= 1 - \Pr_{\mu,\sigma}(T_W \leq t_{n-1}(1-\alpha))$$

Ovšem když $H_0$ neplatí, potom $\boxed{T_W \sim t_{n-1,\lambda}}$ (viz 5.5)

$$\Rightarrow \quad = \boxed{1 - G_{n-1,\lambda}(t_{n-1}(1-\alpha))}$$

pt( ) $\quad$ qt( )

kde $G_{n-1,\lambda}(x)$ je distr. fce Studentova necentr. rozdělení $t_{n-1,\lambda}$ a $t_{n-1}(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil centrálního Studentova t-rozdělení $t_{n-1}$.

3. $H_{03}: \mu \geq \mu_0$ $\quad H_{13}: \mu < \mu_0$ (levostr. alt.) $\quad$ Krit. obor: $W = (-\infty; t_{n-1}(\alpha)\rangle$

$\beta^*_{13} = \Pr(H_0 \text{ zamítáme} \mid H_0 \text{ neplatí}) \ldots$ síla testu

$$\beta^*_{13}(\mu,\sigma) = 1 - \beta_{13}(\mu,\sigma) = \Pr(T_W \in W)$$

$$= \Pr_{\mu,\sigma}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \leq t_{n-1}(\alpha)\right)$$

$$= \Pr_{\mu,\sigma}(T_W \leq t_{n-1}(\alpha))$$

... Pst, že $H_0$ zamítáme | $H_0$ neplatí. Ovšem když $H_0$ neplatí, potom $T_W \sim t_{n-1,\lambda}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad = \boxed{G_{n-1,\lambda}(t_{n-1}(\alpha))}$$

pt( ) $\quad$ qt( )

kde $G_{n-1,\lambda}(x)$ je distr. fce Studentova necentr. t-rozdělení $t_{n-1,\lambda}$ a $t_{n-1}(\alpha)$ je $\alpha$-kvantil centrálního Studentova t-rozdělení $t_{n-1}$.

1. $H_{01}: \mu = \mu_0$ $\quad H_{11}: \mu \neq \mu_0$ (oboustr. alt.) $\quad$ Krit. obor: $W = (-\infty; t_{n-1}(\alpha/2)\rangle \cup \langle t_{n-1}(1-\alpha/2); \infty)$

$\beta^*_{11} = \Pr(H_0 \text{ zamítáme} \mid H_0 \text{ neplatí}) \ldots$ síla testu

$$\beta^*_{11}(\mu,\sigma) = 1 - \beta^*_{11}(\mu,\sigma) = \Pr(T_W \in W)$$

$$= \Pr_{\mu,\sigma}(T_W \leq t_{n-1}(\alpha/2)) + \Pr_{\mu,\sigma}(T_W \geq t_{n-1}(1-\alpha/2))$$

$= \Pr_{\mu,\sigma}(T_W \leq t_{n-1}(\alpha/2)) + 1 - \Pr_{\mu,\sigma}(T_W \leq t_{n-1}(1-\alpha/2))$ ... Pozn., že H0 zamítáme, na podm. že H0 neplatí

Pokud H0 neplatí, pak $T_W \sim t_{n-1,\lambda}$ => $= \boxed{G_{n-1,\lambda}(t_{n-1}(\alpha/2)) + 1 - G_{n-1,\lambda}(t_{n-1}(1-\alpha/2))}$,

pt() qt() pt() qt()

kde $G_{n-1,\lambda}(x)$ je distrib. fce necentrálního Studentova rozdělení $t_{n-1,\lambda}$ a $t_{n-1}(\alpha/2)$ (resp. $t_{n-1}(1-\alpha/2)$) je $\alpha/2$ (resp. $1-\alpha/2$)-kvantil centrálního Studentova t-rozdělení $t_{n-1}$.

II. Funkce sila.exact.t( ):

```
sila.exact.t <- function(mu, mu0, sigma, n, alpha=... , alternative =...){

   lambda <- (μ-μ0)/σ √n
   if(alternative == 'two.sided'){sila <- G_{n-1,λ}(t_{n-1}(α/2)) + 1 - G_{n-1,λ}(t_{n-1}(1-α/2))}
   if(            == 'greater' ){sila <- 1- G_{n-1,λ}(t_{n-1}(1-α))}
   if(            == 'less'    ){sila <- G_{n-1,λ}(t_{n-1}(α))}
                                          pt(...,n-1, ncp=λ)   qt(alpha,n-1)
   return(sila)
}
```

2. Vytvoříme funkci sila.animace.t( ), která vykreslí 1 dvojici grafů:

```
sila.animace.t <- function(mu,mu0, sigma, n, alpha=0.05){
mu0 <- 150; mu <- 140; sigma <- 10; n <- 100; alpha <- 0.05
```

Funkce sila.animace.t() je analogická funkci sila.animace( ) z příkladu 4.6. Tuto funkci tedy můžete použít jako základ. Modifikací několika málo řádků získáte velmi rychle funkci sila.animace.t( ). Abyste viděli, že kódu z příkladu 4.6 dobře rozumíte, případně se v jednotlivých příkazech utvrdili, doporučuji vám vyzkoušet si modifikaci bez koukání na následující řádky a ty použít jako kontrolu v případě, že se modifikace nepovede. Protože řešení příkladu 5.7 je opravdu analogické, uvádím tu pouze seznam modifikovaných řádků (pro vaši kontrolu).

```
(...)
y <- dt(...)   hustota t_{n-1} nad pol. x
l <-dt(...)    hustota t_{n-1,λ} nad pol.x
(...)
mtext(expression(...),...)  popisek t_W
(...)
q1 <- qt(...) ... kvantil t_{n-1}(α/2)
q2 <- qt(...)... kvantil t_{n-1}(1-α/2)
// V příkazech polygon, plot, lines, points a legend změňte akorát barvy (v materiálech jsou použité "darkgreen" a "coral", ale můžete použít libovolné)
(...)
sila.ex <- sila.exact.t(mu=mu1, mu0=mu0, sigma=... , n=...) vektor exaktních sil (délka =500)
(...)
sila.akt <- sila.exact.t (mu= mu, mu0= mu0, ...    )... hodnota exaktní síly pro 1 konkrétní μ (např. μ=140) (délka=1)
```

3. Vytvoříme animaci (analogicky jako v 4.6):

```
(...)
saveLatex (for(...){
              sila.animace.t(mu=mu[i], ... )
          })
```

V rámci tohoto příkladu si vyzkoušíme aplikaci testovacích statistik $T_W$, $U_W$, $U_S$ a $U_{LR}$ testu o $\mu$ když $\sigma^2$ neznáme na reálná data. Nejprve ověříme (graficky i testem) předpoklad normality, jehož splnění je nezbytné pro použití parametrického testu. Následně otestujeme nulovou hypotézu $H_0$, a to všemi třemi způsoby (kritickým oborem, IS i p-hodnotou) pro každou test. statistiku $T_W$, $U_W$, $U_S$ i $U_{LR}$. Nezapomeneme vždy uvést zdůvodněný závěr o $H_0$ a interpretaci závěru testování.

Nakonec vykreslíme hranice a oblasti Waldova, skóre a věrohodnostního 95% empirického IS.

Příprava dat

```
data <- read.delim('nazev-souboru.txt', sep='\t', dec='.')   ... načtení dat
skull.F <- data[data$sex == 'f', 'skull.H']
skull.F <- na.omit(skull.F)   ... odstranění NA hodnot
```

sloupce jsou odděleny tabulátorem; oddělovač des. míst je tečka

... z datové tabulky vybereme pouze údaje o basion-bregm. výšce lebky (skull.H) u žen (data $sex == 'f')

Test normality ověříme Lillieforsovým testem ($n > 30$) a dvojicí grafů histogram + Q-Q diagram:

K vykreslení histogramu potřebujeme stanovit správný počet i hranice třídicích intervalů:

Sturgesovo pravidlo: $r = 3.3 + \log_{10}(n) + 1 =$

$= 3.3 + \log_{10}(107) + 1 \doteq 8$ ... 8 třídicích intervalů

Hodnoty jsou v rozsahu 117 - 136 $\to$ $136 - 117 = 19 \xrightarrow{+5} 24$ ... $24 : 8 = 3$ ... šířka jednoho třídicího intervalu bude 3.

zvýšíme na nejbližší vyšší celé číslo dělitelné 8

$\Rightarrow \overbrace{117 - 136}^{\text{vzdálenost } 19}$

$-3$, $+2$

$\underbrace{114 - 138}_{\text{vzdálenost } 24}$ $\Rightarrow$ `b <- seq(114, 138, by=3)`

Test normality: Histogram

```
b <- seq(114, 138, by=3)   ... vektor hranic třídicích intervalů
hist(skull.F, breaks=b, prob=..., ...)   ... histogram
box(...)
x <- seq(...)   posl. od 110 do 145 o délce min 500
y <- dnorm(...)   hustota norm. rozdělení s μ̂ = x̄ a σ̂ = s (z dat skull.F)
lines(...) ...
```

Q-Q graf + test.

```
qqnorm(skull.F, pch=21, ...)
qqline(skull.F, ...)
mtext(...)   popisek 'teoretický kvantil'
mtext(paste('Lillie ... =', round(nortest::lillie.test(skull.F)$p.val, 4)), ...)   ... popisek
```

příkaz lillie.test() z knihovny nortest; z nejlepší vyber jen p-hodnotu; zaokrouhli p-hodnotu na 4 des. místa

Do komentářů uvedli kompletní test normality:

\# H0:

\# H1:

\# Protože p ... α, H0 zamítáme / nezamítáme na hladině významnosti α = 0.05.

\# Interpretace: Data pochází / nepochází z normálního rozdělení.

## Test o $\mu$, když $\sigma^2$ neznáme.

Do komentářů uvedli znění H0 a H1:

\# H0:

\# H1:

va hodnot

```
mu0 <- ...   μ0
m <- ...     x̄
s <- ...     s
n <- ...     n
```

Příprava

alpha <- ... $\alpha$

## Testování kritickým oborem:

Testovací stat.

tW <- ... $t_W$

uW <- ... $u_W$

uS <- ... $u_S$

uLR <- ... $u_{LR}$

Hranice krit. ob.

q1 <- ... $t_{n-1}(\alpha/2)$

q2 <- ... $t_{n-1}(1-\alpha/2)$

q <- ... $\chi^2_1(1-\alpha)$

Pro každý test uveďte zdůvodněný závěr o Ho: apod.

\# Protože tW=... náleží / nenáleží do krit. oboru W= (-inf ; ...> U <... ; inf), Ho zamítáme / nezamítáme na hl. významnosti alpha=.... (analogicky pro $U_W$, $U_S$ a $U_{LR}$)

## Testování IS:

INTERVALY SPOLEHLIVOSTI

$T_W$

dhW <- $\bar{x} - t_{n-1}(1-\alpha/2)\frac{s}{\sqrt{n}}$ dolní hranice Waldova 95% empirického IS (založeného na test. stat $T_W$)

hhW <- $\bar{x} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{s}{\sqrt{n}}$ horní hranice -11-

$U_W$

čím více bodů, tím přesnější hranice IS.

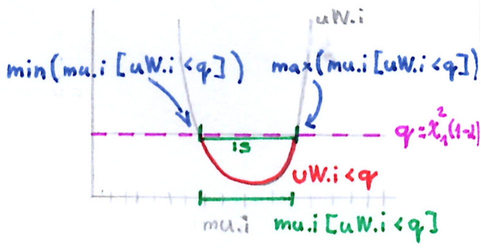
mu.i <- seq(...) posl. $\mu$ od 120 do 130 o min. délce 2000 .. $\mu_i$

tW.i <- (m-mu.i)/s*sqrt(n) vektor $t_{W,i} = \frac{\bar{x}-\mu_i}{s}\sqrt{n}$, kde za $\mu_i$ dosazujeme různá $\mu$ z vektoru mu.i (délka = 2000)

uW.i <-... vektor 2000 test. statistik $u_{W,i}$ pro posl. $\mu_i$ (mu.i)

dh.uW <- round(min(mu.i[uW.i < q]), 4) dolní hr. Waldova 95% emp. IS (vychází z $U_W$)

hh.uW <- round(max(mu.i[uW.i < q]), 4) horní hranice -11-




$U_S$

uS.i <- ... vektor 2000 test. statistik $u_{S,i}$ pro posl. $\mu_i$ (mu.i)

dh.uS <- ... analogicky jako u dh.uW dolní hr. skóre 95% emp. IS (vychází z $U_S$)

hh.uS <- ... analogicky jako u hh.uW horní hr. -11-

$U_{LR}$

uLR.i <- ... vektor 2000 test. statistik $u_{LR,i}$ pro posl $\mu_i$ (mu.i)

dh.uLR <- ... analogicky jako u dh.uW dolní hr. věrohodnostního 95% IS (vychází z $U_{LR}$)

hh.uLR <- ... analogicky jako u hh.uW horní hr. -11-

Pro každý test uveďte zdůvodněný závěr o Ho:

\# Protože ... náleží / nenáleží do IS= (... ; ...), HO zamítáme / nezamítáme na hl. význ. alpha=....

## Testování p-hodnotou:

p-hodnoty

pW <- 2·min(pt(tW, n-1), 1-pt(tW, n-1))

p.uW <- 1-pchisq(uW, 1)

p.uS <- ...

p.uLR <- ...

Pro každý test uveďte zdůvodněný závěr o Ho:

\# Protože p-hodnota=... < / > alpha, Ho zamítáme / nezamítáme na hl. význ. alpha=....

\# Interpretace výsledků testování: Uveďte antropologický závěr (interpretaci výsledků testování). Co jsme se dozvěděli o basion-bregmatické výšce lebky žen?

...ulka výsledků

tab <- data.frame( m =rep(m, 4), vektor průměrů m

stat = c(tW, uW, uS, uLR), vektor test. statistik

wh = c(q1, NA, NA, NA), $W_{hh}$

wd = c(q2, q, q, q) , $W_{dh}$

dh = ... , $IS_{dh}$

hh = ... , $IS_{hh}$

Tab

```
p = ...                          , p-hodnoty
row.names=c('tW', 'uW', 'uS', 'uLR'))
```

Grafy s intervaly spolehlivosti ($U_W, U_S, U_{LR}$)

```
plot(mu.i, uW.i, ylim=c(0,20), ylab=bquote(U[W]),...) křivka
lines(mu.i[uW.i<q], uW.i[uW.i<q],...) ... červená (col='coral') vyznačená oblast Uw v IS.
abline(h=q,...) vodorovná šedá přerušovaná referenční čára v hodnotě kvantilu χ²_1(1-α) -----
mtext(expression( )) popisek μ
mtext(bquote(paste('IS = (', .(dh.uW), '; ', .(hh.uW), ')')),...) ... popisek IS= (... , ...)

plot(mu.i, uS.i,...)
lines(mu.i[uS.i<q], uS.i[uS.i<q],...) ...
abline(...) -----
mtext(...) popisek μ
mtext(...) popisek IS = (... , ...)

plot(mu.i, uLR.i,...)
lines(...) ...
abline(...) ----
mtext(...) popisek μ
mtext(...) popisek IS = (... , ...)
```