V teorii rizika musíme umět:

1. Modelovat celkový počet nároků

2. Modelovat velikost jednotlivých nároků

3. Dát to dohromady – Kolektivní teorie rizika

(+ závislost na čase ... stochastické procesy)

Typy diskrétních rozdělení

1. Poissonovo rozdělení

popisuje výskyt řídkých jevů za určitou jednotku času, např. počet pojistných nároků během jednoho pojistného období

Definice

Diskrétní náhodná veličina N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, píšeme $N \sim Po(\lambda)$, jestliže je pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

Generující funkce:

$$G_N(s) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(s-1)} \tag{2}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathsf{E}(N) = \lambda \tag{3}$$
$$\mathsf{Var}(N) = \lambda \tag{4}$$

Věta

Nechť $N_1, N_2, \ldots, N_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny z Poissonova rozdělení s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Pak $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ má také Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Věta

Předpokládejme, že náhodná veličina N vyjadřující počet pojistných nároků se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou λ. Dále předpokládejme, že každý nárok může být rozdělen do m tříd s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a všechny nároky jsou navzájem nezávislé. Potom náhodné veličiny $N_1, N_2, \ldots, N_m$ vyjadřující počet nároků v jednotlivých třídách $1, 2, \ldots, m$ jsou vzájemně nezávislé a řídí se Poissonovým rozdělením se středními hodnotami $\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_m$.

- nároky může klasifikovat například podle rozsahu – ty, které překročí určitý limit & ty, jež limit nepřesáhnou
- rozdělení pojistných nároků překračujících stanovený limit má jiný parametr Poissonova rozdělení než rozdělení nároků nacházejících se pod limitem

2. Geometrické rozdělení

Definice

Diskrétní náhodná veličina N se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $p \in (0,1)$, zapisujeme $N \sim Ge(p)$, jestliže lze její pravděpodobnostní funkci psát ve tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^k, & k = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{5}$$

resp. ve tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}, & k = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \tag{6}$$

pro $p = \frac{1}{1+\beta}$, tj. $\beta = \frac{1-p}{p} > 0$.

Generující funkce:

$$G_N(s) = \frac{p}{1 - s \cdot (1 - p)} = \frac{1}{1 - \beta \cdot (s - 1)} \tag{7}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1 - p}{p} = \beta \tag{8}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{1 - p}{p^2} = \beta \cdot (1 + \beta) \tag{9}$$

3. Negativně binomické rozdělení

– Počet neúspěchů před m-tým úspěchem.

– Zobecnění geometrického rozdělení.

Definice

Diskrétní náhodná veličina N má negativně binomické rozdělení s parametry $m > 0$ a $p \in (0, 1)$, píšeme $N \sim NeBi(m, p)$, je-li pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \binom{k+m-1}{k} p^m (1-p)^k, & k = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{10}$$

Generující funkce:

$$G_N(s) = \left(\frac{p}{1 - s \cdot (1 - p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot (s - 1)}\right)^m \qquad (11)$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N) = m \cdot \frac{1 - p}{p} = m\beta \qquad (12)$$

$$\mathrm{Var}(N) = m \cdot \frac{1 - p}{p^2} = m\beta \cdot (1 + \beta) \qquad (13)$$

$$\qquad (14)$$

4. Alternativní a binomické rozdělení

Definice

Diskrétní náhodná veličina N má alternativní rozdělení s parametrem $p \in (0, 1)$, píšeme $N \sim Alt(p)$, je-li její pravděpodobnostní funkce

$$p_N(k) = \begin{cases} p, & k = 1, \\ 1 - p, & k = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{15}$$

Definice

Diskrétní náhodná veličina N se řídí binomickým rozdělením s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, zapisujeme $N \sim Bi(n,p)$, pokud je pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & k = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{16}$$

Generující funkce:

$$G_N(s) = \big(1 + p \cdot (s-1)\big)^n \tag{17}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N) = np \tag{18}$$

$$\mathrm{Var}(N) = np \cdot (1-p) \tag{19}$$

Modely počtu pojistných událostí

rozhodujeme-li se při modelování počtu pojistných událostí, jaké pravděpodobnostní rozdělení použít, pak je nám nápomocen vztah mezi číselnými charakteristikami náhodné veličiny N

- Poissonovo rozdělení: $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N)$ ... ***equidispersion***
- Negativně binomické rozdělení: $\mathrm{E}(N) < \mathrm{Var}(N)$ ... ***overdispersion***
- Binomické rozdělení: $\mathrm{E}(N) > \mathrm{Var}(N)$ ... ***underdispersion***

Třída rozdělení $(a, b, 0)$

Definice

Nechť $p_N(k) = P(N = k)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny N. Řekneme, že je členem třídy rozdělení $(a, b, 0)$, jestliže existují reálné konstanty a a b takové, že platí

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} = a + \frac{b}{k} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{20}$$

- pravděpodobnost $p_N(0)$ dopočítáme z $\sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) = 1$
- do třídy obecných rozdělení $(a, b, 0)$ patří právě Poissonovo rozdělení, negativně binomické a binomické rozdělení

- Pro Poissonovo rozdělení je $a = 0$ a $b = \lambda$.
- Pro binomické je $a = -\frac{p}{1-p} < 0$ a $b = (n+1)\frac{p}{1-p}$.
- Pro NeBi je $a = 1 - p > 0$ a $b = (m-1)(1-p)$.

- pro konkrétní datový soubor s velkým množstvím pozorování lze určit vhodný model pomocí formule (20)
- formuli přepíšeme do tvaru

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} \cdot k = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{21}$$

- podíl $\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)}$ odhadneme na základě pozorovaných četností n_k a n_{k-1} hodnot k a $k-1$

$$\frac{\widehat{p_N(k)}}{\widehat{p_N(k-1)}} \cdot k = \frac{n_k}{n_{k-1}} \cdot k. \tag{22}$$

- graf procházející body $\left[k, k \cdot \frac{n_k}{n_{k-1}}\right]$ by měl přibližně vykazovat lineární průběh

- podle směrnice a dané přímky zvolíme vhodný model

  nulová směrnice $\rightarrow$ Poissonovo rozdělení

  záporná směrnice $\rightarrow$ binomické rozdělení

  kladná směrnice $\rightarrow$ negativně binomické rozdělení

Třída rozdělení $(a, b, 1)$

- rozdělení třídy $(a, b, 0)$ často nepopisují adekvátně data, s nimiž se v praxi setkáváme

  Hlavní příčina:
  - rozdělení třídy $(a, b, 0)$ nejsou s to vystihnout tvar dat v jistých částech rozdělení, zejména hodnotu v nule.

- budeme se věnovat rozložení pravděpodobnosti v nule (pravděpodobnost, že nenastane žádná pojistná událost během stanoveného časového období) – např. u pojištění odpovědnosti, majetku aj. je pravděpodobnost v nule *největší*

- úpravou pravděpodobnosti v nule lze třídu rozdělení $(a, b, 0)$ rozšířit na třídu $(a, b, 1)$

Definice

Nechť $p_N(k)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny N. Řekneme, že je členem třídy rozdělení $(a, b, 1)$ za předpokladu, že existují konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} = a + \frac{b}{k} \quad \text{pro } k = 2, 3, \dots \tag{23}$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)$ může nabývat libovolných hodnot na $(0, 1\rangle$, zbývající pravděpodobnost je v $k = 0$, jelikož $p_N(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k) = 1$

U třídy $(a, b, 1)$ rozlišujeme dvě podtřídy

$p_N(0) = 0 \ldots$ **rozdělení useknuté v nule** s $p_N^T(k)$

$p_N(0) > 0 \ldots$ **rozdělení modifikované v nule** s $p_N^M(k)$

1. Rozdělení modifikovaná v nule

lze na ně pohlížet jako na směs rozdělení třídy $(a, b, 0)$ a degenerovaného rozdělení se všemi pravděpodobnostmi soustředěnými v nule

- $G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \cdot s^k$ je generující funkce rozdělení třídy $(a, b, 0)$
  $G_N^M(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N^M(k) \cdot s^k$ je generující funkce příslušného v nule modifikovaného rozdělení třídy $(a, b, 1)$
- platí, že $p_N^M(k) = c \cdot p_N(k)$ pro $k = 1, 2, \ldots; c \in \mathbb{R}^+$ a $p_N^M(0)$ je libovolně zvolené z intervalu $(0, 1)$. Musíme *vypočítat hodnotu* c.

- potom

$$\begin{aligned} G_N^M(s) &= p_N^M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_N^M(k) \cdot s^k = \\ &= p_N^M(0) + c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k) \cdot s^k = \\ &= p_N^M(0) + c \cdot \big(G_N(s) - p_N(0)\big) \end{aligned} \tag{24}$$

- z platnosti $G_N^M(1) = G_N(1) = 1$ plyne $1 = p_N^M(0) + c \cdot \big(1 - p_N(0)\big)$
- odtud $c = \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)}$
- tudíž

$$p_N^M(k) = \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot p_N(k) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

- dostaneme generující funkci modifikovaného rozdělení

$$
\begin{aligned}
G_N^M(s) &= p_N^M(0) + c \cdot \big(G_N(s) - p_N(0)\big) = \\
&= p_N^M(0) + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot \big(G_N(s) - p_N(0)\big) = \\
&= \frac{p_N^M(0) - p_N(0)}{1 - p_N(0)} + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot G_N(s) = \\
&= \frac{p_N^M(0) - 1 + 1 - p_N(0)}{1 - p_N(0)} + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot G_N(s) = \\
&= \left(1 - \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)}\right) + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot G_N(s)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

2. Rozdělení useknutá v nule

lze chápat jako speciální typ v nule modifikovaného rozdělení s hodnotou $p_N^M(0) = 0$

- $G_N^T(s)$ je generující funkce v nule useknutého rozdělení
- potom z (25), (26) a $p_N^M(0) = 0$ získáme

$$p_N^T(k) = \frac{p_N(k)}{1 - p_N(0)} \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

$$G_N^T(s) = \frac{G_N(s) - p_N(0)}{1 - p_N(0)} \tag{28}$$

a) rozšířené useknuté negativně binomické (ETNB) rozdělení

množina možných hodnot parametru m je rozšířena z $m > 0$ na $m > -1$, přičemž $m \neq 0$

Pravděpodobnostní funkce:

$$p_N^T(k) = \begin{cases} \frac{\binom{k+m-1}{k} \cdot (1-p)^k}{p^{-m}-1}, & k = 1, 2, \ldots; p \in (0,1), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{29}$$

resp.

$$p_N^T(k) = \begin{cases} \frac{\binom{k+m-1}{k} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{(1+\beta)^m-1} = & k = 1, 2, \ldots; \\ = \frac{(k+m-1)\cdot \ldots \cdot (m+1)\cdot m}{k! \cdot ((1+\beta)^m - 1)} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, & \beta = \frac{1-p}{p} > 0, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases} \tag{30}$$

b) logaritmické rozdělení

- je limitním případem ETNB rozdělení pro $m \to 0$
- neexistuje k němu odpovídající rozdělení ve třídě $(a, b, 0)$

Pravděpodobnostní funkce:

$$p_N^T(k) = \begin{cases} -\frac{(1-p)^k}{k \cdot \ln(p)}, & k = 1, 2, \ldots ; p \in (0,1), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{31}$$

resp.

$$p_N^T(k) = \begin{cases} \frac{\beta^k}{k(1+\beta)^k \ln(1+\beta)}, & k = 1, 2, \ldots ; \beta = \frac{1-p}{p} > 0, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases} \tag{32}$$

Opět lze dokázat že další taková rozdělení *neexistují*.

Další třídy čítacích rozdělení vytvoříme pomocí dvou *operací*

– *Skládání*

– *Míšení* (směsi)