Nové třídy rozdělení vytvoříme z třídy (a,b,1) pomocí dvou *operací*

– *Skládání*

– *Míšení* (směsi)

Budeme uvažovat pouze diskrétní rozdělení s hodnotami v $\mathbb{N}_0$, t.j.

čítací rozdělení.

Sdružená pravděpodobnostní funkce: $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ je

definovaná vztahem

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y).$$

Analogicky se definuje sdružená pravděpodobnostní funkce pro více náhodných veličin. Následující lemma dává dobře ověřitelné kriterium nezávislosti.

Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Ze znalosti sdružené pravděpodobnostní funkce $f_{X,Y}$ můžeme vypočítat *marginální pravděpodobnostní funkce* f_X a f_Y. Máme

$$
\begin{aligned}
f_X(x) = P(X = x) &= P\Big(\bigcup_y (\{X = x\} \cap \{Y = y\})\Big) \\
&= \sum_y P(X = x \wedge Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x, y).
\end{aligned}
$$

Podmíněná pravděpodobnost a podmíněné očekávání

Připomeňme definici podmíněné pravděpodobnosti pro jevy,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

V modelech pojistné a finanční matematiky je obvykle pravděpodobnost podmíněná informací, kterou máme v danou chvíli.

Podmíněná pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y za podmínky $X = x$, kterou budeme označovat $f_{Y|X}(. \mid x)$, je definována jako

$$f_{Y|X}(y \mid x) = P(Y = y \mid X = x),$$

pro každé x takové, že $P(X = x) > 0$.

Z definice máme

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(Y = y \wedge X = x)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)},$$

tedy

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)},$$

což je analogický vztah jako platí pro podmíněné pravděpodobnosti jevů.

Víme-li, že $X = x$, pak Y má novou pravděpodobnostní funkci

$f_{Y|X}(y \mid x)$ jakožto funkci y (x je pevné).

Očekávání vůči této funkci je podmíněné očekávání Y za

podmínky $X = x$, které označíme $\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$.

Funkce (tj. náhodná veličina)

$$\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$$

se nazývá ***podmíněné očekávání*** Y při znalosti X.

Věta o celkovém očekávání: Pro podmíněné očekávání

$\Psi(x) = E(Y \mid X = x)$ platí

$$E(\Psi(x)) = E(Y),$$

tedy

$$E(Y) = E(E(Y|X)).$$

- Opravdu, střední hodnotu náhodné veličiny $\mathrm{E}(Y|X)$ lze vypočítat jako

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\big[\mathrm{E}(Y|X)\big] &= \sum_x \mathrm{E}(Y|X=x)\cdot f_X(x) = \\
&= \sum_x \sum_y y \cdot f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x) = \\
&= \sum_y y \sum_x f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x) = \\
&= \sum_y y\cdot f_Y(y) = \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Podmíněný rozptyl

Platí důležitý vztah pro výpočet celkového rozptylu.

Zákon o celkovém rozptylu:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|Y)] \tag{2}$$

– EVVE's law.

Důkaz:

Víme že

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}(X^2|Y) - (\mathrm{E}(X|Y))^2$$

Tedy podle zákona o celkovém očekávání máme

$$Var(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 =$$

$$\mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X^2|Y)]\} - [\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)]^2$$

$$- \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)^2) + \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)^2) =$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)].$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Diskrétní (čítací) složená rozdělení

lze získat procesem skládání dvou libovolných diskrétních rozdělení

Definice: Nechť N je diskrétní náhodná veličina a nechť $M_1, M_2, \ldots$ jsou IID (vzájemně nezávislé, stejně rozdělené) diskrétní náhodné veličiny. Předpokládejme, že M_i pro $i = 1, 2, \ldots$ nezávisejí na N. Potom náhodná veličina

$$S = \sum_{i=1}^{N} M_i$$

má složené rozdělení.

– Máme tedy součet náhodného počtu náhodných veličin

Pojistná praxe

- náhodná veličina N může např. udávat počet různých dopravních nehod
- náhodné proměnné $M_i, i = 1, 2, \ldots, N$ představují počet zraněných z i-té nehody
- náhodný součet S udává celkový počet zraněných

Proč složená?

Označení: N ... primární (vnější) M ... sekundární (vnitřní)

Nechť M má generující funkcí $G_M(s)$. Pak pro generující funkci S platí

$$G_S(s) = G_N\big(G_M(s)\big) \quad \text{pro } s \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

kde $G_N(s)$ představuje generující funkci primárního rozdělení a $G_M(s)$ generující funkci sekundárního rozdělení.

Pravděpodobnostní funkce složeného rozdělení

- pravděpodobnost, že dojde právě ke k pojistným nárokům (= zraněním) lze vyjádřit z věty o celkové pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S=k|N=n)\cdot P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M_1+M_2+\cdots+M_N=k|N=n)\cdot P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M_1+M_2+\cdots+M_n=k)\cdot P(N=n) \end{aligned} \tag{4}$$

- Víme, že pst. funkce součtu nezávislých n.v. je konvoluce

- označme jednotlivé pst. funkce

$$g_S(n) = P(S = n),\ q_M(n) = P(M = n),\ p_N(n) = P(N = n)$$

- potom (4) lze zapsat

$$g_S(k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_M^{*n}(k) \cdot p_N(n) \tag{5}$$

Pro praktický výpočet se nehodí, výpočet konvoluce je náročný.

Číselné charakteristiky

Střední hodnota:

- očekávání složené náhodné veličiny S vypočítáme ze znalosti vlastnosti podmíněné střední hodnoty náhodné veličiny S za podmínky $N = n$
- M_i pro $i = 1, 2, \ldots$ jsou IID, píšeme $M \sim M_i$ pro libovolné i.
- Tedy podle věty o celkovém očekávání dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(S|N=n) \cdot P(N=n) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M_1 + M_2 + \cdots + M_N | N=n) \cdot P(N=n) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M_1 + M_2 + \cdots + M_n) \cdot P(N=n) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M) \cdot n \cdot P(N=n) = \mathrm{E}(M) \cdot \mathrm{E}(N)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Rozptyl:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S|N)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(S|N)] = \\ &= \mathrm{E}\big(N \cdot \mathrm{Var}(M)\big) + \mathrm{Var}\big(N \cdot \mathrm{E}(M)\big) = \\ &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(M) + \mathrm{Var}(N) \cdot \big(\mathrm{E}(M)\big)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Moment generující funkce:

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}|N=n)\cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(M_1+M_2+\cdots+M_N)}|N=n\right)\cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(M_1+M_2+\cdots+M_n)}\right)\cdot P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_M(t)\right)^n \cdot P(N=n) = \mathrm{E}\left([M_M(t)]^N\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{N\cdot\ln(M_M(t))}\right) = M_N\left(\ln[M_M(t)]\right),\ t \geq 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

Jak efektivně vypočítat pst. funkci složeného rozdělení?

Věta (Panjerova rekurze)

Je-li primární rozdělení členem třídy $(a, b, 0)$, *pak platí rekurentní vztah*

$$g_S(k) = \frac{1}{1 - a \cdot q_M(0)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{jb}{k}\right) q_M(j) \cdot g_S(k-j), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Analogie platí i pro třídu $(a, b, 1)$.

Věta

Je-li primární rozdělení členem třídy $(a, b, 1)$, potom

$$g_S(k) = \frac{\left[p_N(1) - (a+b)p_N(0)\right] \cdot q_M(k) + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{jb}{k}\right) q_M(j) \cdot g_S(k-j)}{1 - a \cdot q_M(0)}$$

pro $k = 1, 2, \ldots$

$$(10)$$

- výše uvedené rekurentní formule v sobě nezahrnují konvoluci,

  tím výrazně ulehčují naše výpočty
- k jejich použití musíme znát hodnotu $g_S(0)$

Věta

Pro každé složené rozdělení platí

$$g_S(0) = G_N\big(q_M(0)\big), \tag{11}$$

kde $G_N(s)$ je generující funkce primárního rozdělení a $q_M(0)$ je pravděpodobnost, že náhodná veličina M ze sekundárního rozdělení nabude hodnoty 0, tj. $P(M = 0)$.

1. Diskrétní složené Poissonovo rozdělení

je považováno za nejdůležitější diskrétní složené rozdělení, neboť právě Poissonovo rozdělení bývá nejčastěji využíváno k popisu počtu škod

Definice

Nechť mají IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ společnou distribuční funkci $F_M(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Pak náhodný součet $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ má složené Poissonovo rozdělení s parametry λ a $F_M(k)$, značíme $S \sim CPo\big(\lambda, F_M(k)\big)$, jestliže se N řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$.

Tedy

$$P(N = n) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{12}$$

Označení: Poisson - M, např. Poisson - geometrické, pokud M má geometrické rozdělení.

- připomeňme si, že $N \sim Po(\lambda)$ má $G_N(s) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (s-1)}$

  a $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N) = \lambda$

- pravděpodobnost, že nedojde k žádné pojistné události na pojistném kmeni s primárním Poissonovým rozdělením, vyplývá ze vztahu (11)

$$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (q_M(0)-1)} \tag{13}$$

- pravděpodobnost, že v portfoliu nastane právě k pojistných událostí, vypočítáme dle vztahu (9), kde $a = 0$ a $b = \lambda$

$$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j), \quad k = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Generující funkce:

$$G_S(s) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (G_M(s) - 1)} \quad \text{pro } s \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

kde $G_M(s)$ je generující funkce sekundárního rozdělení

Moment generující funkce:

$$M_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (M_M(t) - 1)} \quad \text{pro } t \geq 0, \tag{16}$$

kde $M_M(t)$ je moment generující funkce sekundárního rozdělení

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathsf{E}(S) = \mathsf{E}(M) \cdot \mathsf{E}(N) = \lambda \mathsf{E}(M) \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(S) &= \mathsf{E}(N) \cdot \mathsf{Var}(M) + \mathsf{Var}(N) \cdot \big(\mathsf{E}(M)\big)^2 = \\ &= \lambda \mathsf{Var}(M) + \lambda \big(\mathsf{E}(M)\big)^2 = \lambda\big[\mathsf{Var}(M) + \big(\mathsf{E}(M)\big)^2\big] = \\ &= \lambda\big[\mathsf{E}(M^2) - \big(\mathsf{E}(M)\big)^2 + \big(\mathsf{E}(M)\big)^2\big] = \lambda \mathsf{E}(M^2)\end{aligned} \tag{18}$$

Věta

Nechť $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Dále nechť S_j má složené Poissonovo rozdělení s parametrem λ_j pro primární rozdělení a se sekundárním rozdělením $\{q_j(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom součet $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ má také složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ a sekundárním rozdělením $\{q_S(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$, kde

$$q_S(k) = \frac{\lambda_1 q_1(k) + \lambda_2 q_2(k) + \cdots + \lambda_n q_n(k)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j q_j(k),$$

$$k = 0, 1, \ldots \tag{19}$$

Pojistná praxe

- mějme n různých, vzájemně nezávislých portfolií, kde se celkový počet nároků jednotlivých portfolií řídí složeným Poissonovým rozdělením, potom se celkový počet nároků vzniklý kombinací těchto n portfolií bude také řídit složeným Poissonovým rozdělením
- uvažujeme-li pojistné portfolio na dobu n let a předpokládáme-li, že celkové počty nároků jednotlivých let jsou navzájem nezávislé a mají složené Poissonovo rozdělení, pak celkový počet nároků vzniklý za n let bude mít také složené Poissonovo rozdělení

Příklady diskrétních složených Poissonových rozdělení

a) Negativně binomické rozdělení

- získáme složením primárního Poissonova a sekundárního logaritmického rozdělení
- generující funkce negativně binomického rozdělení je dána ve tvaru
$$G_{N'}(s) = \left(\frac{1}{1-\beta(s-1)} \right)^m, \quad m > 0, \beta > 0, s \in \mathbb{R}$$
- ověříme, že generující funkce složeného rozdělení $G_S(s) = G_N(G_M(s))$, kde $G_N(s)$ představuje generující funkci Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ a $G_M(s)$ generující funkci logaritmického rozdělení s parametrem $\beta > 0$, je totožná s generující funkcí negativně binomického rozdělení

b) Další rozdělení

Poisson-binomické rozdělení
Poissonovo rozdělení
binomické rozdělení
$\lambda > 0; p \in (0,1), n \in \mathbb{N}$
$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda \cdot ((1-p)^n - 1)}$
$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \cdot g_S(k-j)$

Neymanovo rozdělení typu A
Poissonovo rozdělení (parametr λ_1)
Poissonovo rozdělení (parametr λ_2)
$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0$
$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot (\mathrm{e}^{-\lambda_2} - 1)}$
$g_S(k) = \frac{\lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2}}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\lambda_2^j}{j!} \cdot g_S(k-j)$
Poisson-ETNB rozdělení
Poissonovo rozdělení
ETNB rozdělení
$\lambda > 0; p \in (0,1),$ resp. $\beta > 0, m > -1, m \neq 0$
$g_S(0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$
$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\binom{j+m-1}{j} \cdot (1-p)^j}{p^{-m} - 1} \cdot g_S(k-j)$ $g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{(j+m-1) \cdot \ldots \cdot (m+1) \cdot m}{j! \cdot ((1+\beta)^m - 1)} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^j \cdot g_S(k-j)$

2. Další diskrétní složená rozdělení

Definice

Nechť mají IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ distribuční funkci $F_M(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Potom řekneme, že náhodná veličina $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ má složené geometrické rozložení s parametry p a $F_M(k)$, píšeme $S \sim CGe\big(p, F_M(k)\big)$, má-li N geometrické rozložení s parametrem $p \in (0,1)$, tj.

$$P(N = n) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^n, & n = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{n+1}}, & n = 0, 1, \ldots; \\ & \beta > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{20}$$

- analogicky nadefinujeme složené negativně binomické rozdělení a složené binomické rozdělení

Složené geometrické rozdělení
$p \in (0,1)$, resp. $\beta > 0$
$g_S(0) = \frac{p}{1-q_M(0)+p\cdot q_M(0)} = \frac{1}{1+\beta-\beta\cdot q_M(0)}$
$a = 1-p = \frac{\beta}{1+\beta}, b = 0$
$g_S(k) = \frac{1-p}{1-(1-p)\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} q_M(j)\cdot g_S(k-j)$ $g_S(k) = \frac{\beta}{1+\beta-\beta\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} q_M(j)\cdot g_S(k-j)$
$G_S(s) = \frac{p}{1-G_M(s)\cdot(1-p)} = \frac{1}{1-\beta\cdot\left(G_M(s)-1\right)}$
$M_S(t) = \frac{p}{1-M_M(t)\cdot(1-p)} = \frac{1}{1-\beta\cdot\left(M_M(t)-1\right)}$
$\mathrm{E}(S) = \frac{1-p}{p}\cdot \mathrm{E}(M) = \beta\cdot\mathrm{E}(M)$
$\mathrm{Var}(S) = \frac{1-p}{p}\cdot\mathrm{Var}(M) + \frac{1-p}{p^2}\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2 =$ $= \beta\cdot\mathrm{Var}(M) + \beta\cdot(1+\beta)\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2$

Složené negativně binomické rozdělení
$m > 0, p \in (0,1),$ resp. $\beta > 0$
$g_S(0) = \left(\frac{p}{1-q_M(0)\cdot(1-p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(q_M(0)-1)}\right)^m$
$a = 1-p = \frac{\beta}{1+\beta}, b = (m-1)\cdot(1-p) = (m-1)\cdot\frac{\beta}{1+\beta}$
$g_S(k) = \frac{1-p}{1-(1-p)\cdot q_M(0)}\sum_{j=1}^{k}\frac{k+j\cdot(m-1)}{k}\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$ $g_S(k) = \frac{\beta}{1+\beta-\beta q_M(0)}\sum_{j=1}^{k}\frac{k+j\cdot(m-1)}{k}\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$
$G_S(s) = \left(\frac{p}{1-G_M(s)\cdot(1-p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(G_M(s)-1)}\right)^m$
$M_S(t) = \left(\frac{p}{1-M_M(t)\cdot(1-p)}\right)^m = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(M_M(t)-1)}\right)^m$
$\mathrm{E}(S) = m\cdot\frac{1-p}{p}\cdot\mathrm{E}(M) = m\cdot\beta\cdot\mathrm{E}(M)$
$\mathrm{Var}(S) = m\cdot\frac{1-p}{p}\cdot\left[\mathrm{Var}(M)+\frac{1}{p}\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2\right] =$ $= m\cdot\beta\cdot\mathrm{E}(M^2)+m\cdot\beta^2\cdot\left(\mathrm{E}(M)\right)^2$

Složené binomické rozdělení
$p \in (0,1), n \in \mathbb{N}$
$g_S(0) = \left(1 - p \cdot (q_M(0) - 1)\right)^n$
$a = -\frac{p}{1-p}, b = (n+1) \cdot \frac{p}{1-p}$
$g_S(k) = \frac{p}{1-p+p \cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} \frac{j \cdot (n+1) - k}{k} \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j)$
$G_S(s) = \left(1 + p \cdot (G_M(s) - 1)\right)^n$
$M_S(t) = \left(1 + p \cdot (M_M(t) - 1)\right)^n$
$\mathrm{E}(S) = n \cdot p \cdot \mathrm{E}(M)$
$\mathrm{Var}(S) = n \cdot p \cdot \mathrm{E}(M^2) - n \cdot p^2 \cdot \left(\mathrm{E}(M)\right)^2$

Tabulka: Další složená rozdělení