Pokročilé numerické metody II
3. přednáška

Metody Rungeho-Kutty – vlastnosti

Jiří Zelinka

Metody Taylorova rozvoje

$$y(x+h) = y(x)+hy'(x)+\frac{1}{2}h^2y''(x)+\cdots+\frac{1}{n!}h^ny^{(n)}(x)+O(h^{n+1})$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))f(x, y(x))$$

$$y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + f_y^2f$$

Metody Rungeho–Kutty (explicitní)

Explicitní metoda Rungeho–Kutty stupně s:

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_s k_s)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + c_2 h, y_i + h a_{21} k_1) \\
k_3 &= f(x_i + c_3 h, y_i + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
&\vdots \\
k_s &= f\left(x_i + c_s h, y_i + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} k_j\right)
\end{aligned}$$

Butcherovy tabulky

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

Podmínky řádu ($lte_i = O(h^{p+1})$):

$p = 1$: $\sum\limits_{j=1}^{s} b_j = 1$

$p = 2$: $\sum\limits_{j=1}^{s} b_j = 1$, $\sum\limits_{j=2}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$

$p = 3$: předchozí $+ \sum\limits_{j=2}^{s} b_j c_j^2 = \frac{1}{3}$, $\sum\limits_{j=3}^{s} \sum\limits_{l=2}^{j-1} b_j a_{jl} c_l = \frac{1}{6}$

Další podmínka: $c_j = \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl}$ – splňují všechny používané metody

Vztah mezi stupněm a řádem metody

$p(s)$: maximální dossažitelný řád pro metodu stupně s

$$
\begin{aligned}
p(s) &= s, && s = 1, \dots, 4 \\
p(5) &= 4 \\
p(6) &= 5 \\
p(7) &= 6 \\
p(8) &= 6 \\
p(9) &= 7 \\
p(s) &\leq s - 2, && s \geq 10
\end{aligned}
$$

Příklady explicitních metod R–K

Metody druhého řádu

Modifikovaná EM (midpoint EM)

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Heunova metoda

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Ralstonova m. 2. řádu

$$\begin{array}{c|cc} 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Obecná m. 2. řádu ($ab = 1/2$)

$$\begin{array}{c|cc} a & a & \\ \hline & 1-b & b \end{array}$$

Příklady explicitních metod R–K

Metody vyšších řádů

Ralstonova m. 3. řádu

$$\begin{array}{c|ccc}
1/2 & 1/2 & & \\
3/4 & 0 & 3/4 & \\
\hline
 & 2/9 & 1/3 & 4/9
\end{array}$$

Klasická m. R–K

$$\begin{array}{c|cccc}
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

Stabilita explicitních metod R–K

Testovací úloha vede na rovnici $y_{i+1} = P_s(z)y_i$ pro $h\lambda = z$, P_s je polynom stupně s.

Podmínka stability: $|P_s(z)| < 1$,
oblast stability $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |P_s(z)| < 1\}$

Pro $p = s \leq 4$ je $P_s(z) = \sum_{j=0}^{p} \frac{z^j}{j!}$, proto jsou oblasti stability pro metody stejného stupně stejné.

Intervaly stability:

s	1	2	3	4
	$(-2, 0)$	$(-2, 0)$	$(-2.51, 0)$	$(-2.79, 0)$

Příklad: (částečně ve cvičení)

Implicitní metody Rungeho–Kutty

$$k_l = f(x_i + c_l h, y_i + h \sum_{j=1}^{s} a_{lj} k_j), \; l = 1, \dots, s$$

– systém nelineárních rovnic pro $k_1, \dots, k_s$ v každém kroku.

Butcherovy tabulky

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
\end{array}$$

Podmínky řádu jsou stejné jako pro explicitní metody.

Semi-implicitní metody Rungeho–Kutty

$$k_l = f(x_i + c_l h, y_i + h \sum_{j=1}^{l} a_{lj} k_j), \;\; l = 1, \ldots, s$$

– jedna nelineární rovnice pro k_l v l-tém každém kroku.

Butcherovy tabulky

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & & & \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s,s} \\ \hline & b_1 & b_2 & \ldots & b_s \end{array}$$

Příklad – Rozšířená lichoběžníková metoda (TRX2):

$$
\begin{aligned}
y(x_{i+1}) &= y_i + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{4}[f(x_i, y_i) + 2f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \\
y_{i+1/2} &= y_i + \frac{h}{4}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})] \\
y_{i+1} &= y_{i+1/2} + \frac{h}{4}[f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \\
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{4}h(k_1 + k_2)) \\
k_3 &= f(x_i + h, y_i + \frac{1}{4}h(k_1 + 2k_2 + k_3))
\end{aligned}
$$

Butcherova tabulka

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Stabilita metody

ve cvičení

Řízení délky kroku

Měníme krok $h = h_i$ tak, aby lokální chyba le_i byla zhruba pořád stejně velká.

Strategie **EPS** (*error per step*): $\|le_i\| \leq \varepsilon$

Strategie **EPUS** (*error per unit step*): $\|le_i\| \leq h_i\varepsilon$

Odhad lokální chyby – metoda polovičního kroku

z y_i určíme přibližnou hodnotu řešení $\bar{y}_{i+1}$ s krokem h, pak určíme přibližnou hodnotu $\tilde{y}_{i+1}$ se dvěma polovičními kroky $h/2$.

Porovnáním $\tilde{y}_{i+1}$ a $\bar{y}_{i+1}$ získáme odhad lokální chyby.