Pokročilé numerické metody II
4. přednáška

Vícekrokové metody

Jiří Zelinka

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y),\ y(x_0)=y_0 \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx \end{aligned}$$

Označení:

$y'_j = f_j = f(x_j, y_j)$

Adamsova–Bashforthova metoda

Funkci f aproximujeme interpolačním polynomem v bodech $x_{i-s}, x_{i-s+1}, \dots, x_i$

Diference:

$$\begin{aligned} \Delta f_j &= f_{j+1} - f_j \\ \Delta^2 f_j &= \Delta f_{j+1} - \Delta f_j = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j \\ \Delta^3 f_j &= \Delta^2 f_{j+1} - \Delta^2 f_j = f_{j+3} - 3f_{j+2} + 3f_{j+1} - f_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

Newtonův interpolační polynom pro interpolaci vzad:

$$\begin{aligned}
x &= x_i + th \\
\binom{t}{j} &= \frac{t(t-1)\cdots(t-j+1)}{j!} \\
P(x_i + th) &= f_i + \binom{t}{1}\Delta f_{i-1} + \binom{t}{2}\Delta^2 f_{i-2} + \cdots + \\
&+ \binom{t+s-1}{s}\Delta^s f_{i-s} \\
y_{i+1} &= y_i + h\int\limits_0^1 P(x_i + th)dt
\end{aligned}$$

Adamsův extrapolační vzorec:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h[f_i + b_1 \Delta f_{i-1} + b_2 \Delta^2 f_{i-2} + \cdots + b_s \Delta^s f_{i-s}] \\
b_j &= \int\limits_0^1 \binom{t}{j} dt = \frac{1}{j!} \int\limits_0^1 t(t-1)\cdots(t-j+1) dt
\end{aligned}
$$

Koeficienty b_j:

j	1	2	3	4	5
b_j	1/2	5/12	3/8	251/720	95/288

b_j nezávisí na s, $b_0 = 1$.

Při použití Lagrangeova interpolačního polynomu dostaneme formuli

$$y_{i+1} = y_i + h[b_{s,0} f_i + b_{s,1} f_{i-1} + b_{s,2} f_{i-2} + \cdots + b_{s,s} f_{i-s}]$$

$$b_{s,j} = \frac{(-1)^j}{j!(s-j)!} \int\limits_0^1 \frac{t(t+1)(t+2)\cdots(t+s)}{t+j} dt$$

s	$b_{s,0}$	$b_{s,1}$	$b_{s,2}$	$b_{s,3}$	$b_{s,4}$
0	1				
1	3/2	-1/2			
2	23/12	-16/12	5/12		
3	55/24	-59/24	37/24	-9/24	
4	1901/720	-2774/720	2616/720	-1274/720	521/720

Adamsova–Multonova metoda

Funkci f aproximujeme interpolačním polynomem v bodech $x_{i-s}, x_{i-s+1}, \ldots, x_i, x_{i+1}$

Adamsův interpolační vzorec:

Je použit Newtonův interpolační polynom

$$\begin{aligned} x &= x_{i+1} + th \\ y_{i+1} &= y_i + h[f_{i+1} + c_1 \Delta f_i + c_2 \Delta^2 f_{i-1} + \cdots + c_{s+1} \Delta^{s+1} f_{i-s}] \\ c_j &= \frac{1}{j!} \int\limits_{-1}^{0} t(t+1) \cdots (t+j-1) dt \end{aligned}$$

Koeficienty c_j:

j	1	2	3	4	5
c_j	-1/2	-1/12	-1/24	-19/720	-3/160

c_j nezávisí na s, $c_0 = 1$.

Použití Lagrangeova interpolačního polynomu:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=-1}^{s} c_{s,j} f_{i-j}$$

$$c_{s,j} = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!(s-j)!} \int\limits_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)(t+2)\cdots(t+s)}{t+j} dt$$

s	$c_{s,-1}$	$c_{s,0}$	$c_{s,1}$	$c_{s,2}$	$c_{s,3}$
-1	1				
0	1/2	1/2			
1	5/12	8/12	-1/12		
2	9/24	19/24	-5/24	1/24	
3	251/720	646/720	-264/720	106/720	-19/720

Obecná vícekroková metoda

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^{s} a_j y_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{s} b_j y'_{i-j}$$

$b_{-1} = 0$: explicitní metoda, $b_{-1} \neq 0$: implicitní metoda

Formule se nazývá **řádu** r, jestliže je přesná pro polynomy do stupně r (pozor, nejedná se o řád přesnosti).

Podmínky řádu:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{s} a_j &= 1 \\
-\sum_{j=0}^{s} j a_j + \sum_{j=-1}^{s} b_j &= 1 \\
\sum_{j=0}^{s} (-j)^k a_j + k \sum_{j=-1}^{s} (-j)^{k-1} b_j &= 1,\ k = 2, \dots, r
\end{aligned}$$

Metoda, která splňuje první dvě rovnice se nazývá **konzistentní**.

Lokální diskretizační chyba:

$$y(x_{i+1}) = \sum_{j=0}^{s} a_j y(x_{i-j}) + h \sum_{j=-1}^{s} b_j y'(x_{i-j}) + lte_i$$

Z Taylorova rozvoje:

$$y(x_{i-j}) = y(x_i) - jhy'(x_i) + \frac{j^2h^2}{2} y''(x_i) + \cdots + \frac{(-1)^r j^r h^r}{r!} y^{(r)}(x_i) +$$

$$+ \frac{1}{r!} \int_{x_i}^{x_{i-j}} (x_{i-j} - t)^r y^{(r+1)}(t) dt$$

$$y'(x_{i-j}) = y'(x_i) - jhy''(x_i) + \cdots + \frac{(-1)^{r-1} j^{r-1} h^{r-1}}{(r-1)!} y^{(r)}(x_i) +$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{x_i}^{x_{i-j}} (x_{i-j} - t)^{r-1} y^{(r+1)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} lte_i &= \frac{1}{r!} \left[\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t)^r y^{(r+1)}(t) dt - \right. \\ &- \sum_{j=0}^{s} a_j \int\limits_{x_i}^{x_{i-j}} (x_{i-j} - t)^r y^{(r+1)}(t) dt - \\ &- \left. rh \sum_{j=-1}^{s} b_j \int\limits_{x_i}^{x_{i-j}} (x_{i-j} - t)^{r-1} y^{(r+1)}(t) dt \right] \end{aligned}$$

$$lte_i = \frac{1}{r!}\int\limits_{x_{i-s}}^{x_{i+1}} G(t)y^{(r+1)}(t)dt$$

G se nazývá **účinková funkce**

$$\begin{aligned} G(t) &= \overline{(x_{i+1}-t)}^{r} - rhb_{-1}\overline{(x_{i+1}-t)}^{r-1} + \\ &+ \sum_{j=1}^{s}[a_j\overline{(x_{i-j}-t)}^{r} + rhb_j\overline{(x_{i-j}-t)}^{r-1}] \end{aligned}$$

$\overline{(x_{i-j}-t)}$ je funkce $x_{i-j}-t$ doplněná nulovou funkcí mimo interval $[x_{i-j}, x_i]$, resp. $[x_i, x_{i+1},]$.

Pokud G nemění znaménko na $[x_{i-s}, x_{i+1}]$ pak podle věty o střední hodnotě integrálu

$$lte_i = \frac{y^{(r+1)}(\eta)}{r!} \int\limits_{x_{i-s}}^{x_{i+1}} G(t)dt \quad x_{i-s} < \eta < x_{i+1}.$$

Pak

$$lte_i = Ch^{r+1} y^{(r+1)}(\eta)$$

Pokud G mění znaménko na $[x_{i-s}, x_{i+1}]$, pak platí

$$|lte_i| \leq \frac{|y^{(r+1)}(\xi)|}{r!} \int\limits_{x_{i-s}}^{x_{i+1}} |G(t)|dt$$

kde ξ je bod z $[x_{i-s}, x_{i+1}]$, v němž nabývá $|y^{(r+1)}|$ svého maxima.