Pokročilé numerické metody II
5. přednáška

Vícekrokové metody: D–stabilita a konvergence

Jiří Zelinka

Vícekrokové metody – opakování

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y),\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \end{aligned}$$

Adamsova–Bashforthova metoda

Funkci f aproximujeme interpolačním polynomem v bodech $x_{i-s}, x_{i-s+1}, \dots, x_i$

Adamsův extrapolační vzorec:

$$y_{i+1} = y_i + h[f_i + b_1\Delta f_{i-1} + b_2\Delta^2 f_{i-2} + \cdots + b_s\Delta^s f_{i-s}]$$

Koeficienty b_j**:**

j	1	2	3	4	5
b_j	1/2	5/12	3/8	251/720	95/288

b_j nezávisí na s, $b_0 = 1$.

Při použití Lagrangeova interpolačního polynomu dostaneme formuli

$$y_{i+1} = y_i + h[b_{s,0}f_i + b_{s,1}f_{i-1} + b_{s,2}f_{i-2} + \cdots + b_{s,s}f_{i-s}]$$

s	$b_{s,0}$	$b_{s,1}$	$b_{s,2}$	$b_{s,3}$	$b_{s,4}$
0	1				
1	3/2	-1/2			
2	23/12	-16/12	5/12		
3	55/24	-59/24	37/24	-9/24	
4	1901/720	-2774/720	2616/720	-1274/720	521/720

Adamsova–Multonova metoda

Funkci f aproximujeme interpolačním polynomem v bodech $x_{i-s}, x_{i-s+1}, \dots, x_i, x_{i+1}$

Adamsův interpolační vzorec:

$$y_{i+1} = y_i + h[f_{i+1} + c_1 \Delta f_i + c_2 \Delta^2 f_{i-1} + \cdots + c_{s+1} \Delta^{s+1} f_{i-s}]$$

Koeficienty c_j:

j	1	2	3	4	5
c_j	-1/2	-1/12	-1/24	-19/720	-3/160

c_j nezávisí na s, $c_0 = 1$.

Použití Lagrangeova interpolačního polynomu:

s	$c_{s,-1}$	$c_{s,0}$	$c_{s,1}$	$c_{s,2}$	$c_{s,3}$
-1	1				
0	1/2	1/2			
1	5/12	8/12	-1/12		
2	9/24	19/24	-5/24	1/24	
3	251/720	646/720	-264/720	106/720	-19/720

Obecná vícekroková metoda

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^{s} a_j y_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{s} b_j y'_{i-j},$$

$y_0, \dots, y_s$ – počáteční hodnoty.

$b_{-1} = 0$: explicitní metoda, $b_{-1} \neq 0$: implicitní metoda

Formule se nazývá **řádu** r, jestliže je přesná pro polynomy do stupně r.

Podmínky řádu:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{s} a_j &= 1 \\ -\sum_{j=0}^{s} j a_j + \sum_{j=-1}^{s} b_j &= 1 \\ \sum_{j=0}^{s} (-j)^k a_j + k \sum_{j=-1}^{s} (-j)^{k-1} b_j &= 1, \ k = 2, \dots, r \end{aligned}$$

Metoda, která splňuje první dvě rovnice se nazývá **konzistentní**.

Lokální diskretizační chyba:

$$y(x_{i+1}) = \sum_{j=0}^{s} a_j y(x_{i-j}) + h \sum_{j=-1}^{s} b_j y'(x_{i-j}) + lte_i$$

$$lte_i = \frac{1}{r!} \int_{x_{i-s}}^{x_{i+1}} G(t) y^{(r+1)}(t) dt$$

G se nazývá **účinková funkce**

$$\begin{aligned} G(t) &= \overline{(x_{i+1} - t)}^{r} - rhb_{-1}\overline{(x_{i+1} - t)}^{r-1} + \\ &+ \sum_{j=1}^{s} [a_j \overline{(x_{i-j} - t)}^{r} + rhb_j \overline{(x_{i-j} - t)}^{r-1}] \end{aligned}$$

Pokud G nemění znaménko na $[x_{i-s}, x_{i+1}]$ pak podle věty o střední hodnotě integrálu

$$lte_i = \frac{y^{(r+1)}(\eta)}{r!} \int\limits_{x_{i-s}}^{x_{i+1}} G(t)dt \quad x_{i-s} < \eta < x_{i+1}.$$

Pak

$$lte_i = Ch^{r+1} y^{(r+1)}(\eta)$$

Pokud G mění znaménko na $[x_{i-s}, x_{i+1}]$, pak platí

$$|lte_i| \leq \frac{|y^{(r+1)}(\xi)|}{r!} \int\limits_{x_{i-s}}^{x_{i+1}} |G(t)|dt$$

kde ξ je bod z $[x_{i-s}, x_{i+1}]$, v němž nabývá $|y^{(r+1)}|$ svého maxima.

Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = b_n$$

k je řád rovnice, $a_k \neq 0$.
Pro $b_n = 0$ dostaneme homogenní rovnici.

Pro každé počáteční hodnoty $y_0, \ldots, y_{k-1}$ dostaneme jednoznačně určené řešení.

Řešení homogenního systému tvoří k-rozměrný vektorový prostor, jeho báze se nazývá **fundamentální systém řešení**, její prvky označíme ${y_1}_n, \ldots, {y_k}_n$.

Obecné řešení homogenní rovnice je lineární kombinace prvků FSŘ, obecné řešení nehomogenní rovnice je součet partikulárního řešení a obecného řešení homogenní rovnice.

Prvky FSŘ jsou definovány pomocí řešení *charakteristické rovnice*

$$a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

resp. pomocí kořenů charakteristického polynomu. Je-li kořen z_l reálný, násobnosti r, pak FSŘ obsahuje prvky
$z_l^n,\ nz_l^n,\ n^2 z_l^n, \ldots, n^{r-1} z_l^n$.

Je-li kořen z_l komplexní násobnosti r, $z_l = \rho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$, obsahuje FSŘ prvky
$\rho^n \cos n\varphi,\ n\rho^n \cos n\varphi, \ldots,\ n^{r-1}\rho^n \cos n\varphi,$
$\rho^n \sin n\varphi,\ n\rho^n \sin n\varphi, \ldots,\ n^{r-1}\rho^n \sin n\varphi.$

Konvergence metody

Definice

Nechť počáteční hodnoty $y_0, \ldots, y_s$ splňují podmínku

$$\lim_{h \to 0_+} y_j = y_0, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Metoda se nazývá **konvergentní v bodě** x, jestliže

$$\lim_{h \to 0_+} y_n = y(x), \quad nh = x - x_0.$$

Metoda se nazývá **konvergentní na intervalu** $[a, b]$, jestliže je konvergentní $\forall x \in [a, b]$.

D–stabilita

Definice

Metoda se nazývá **D–stabilní** (stabilní podle Dahlquista, 'zero stability'), jestliže pro všechna řešení z_l charakteristické rovnice (kořeny charakteristického polynomu)

$$z^{s+1} = \sum_{j=1}^{s} a_j z^{s-j}$$

platí $|z_l| \leq 1$ a pokud $|z_l| = 1$, je z_l jednoduchý.

Věta

Metoda je konvergentní právě tehdy, když je konzistentní a D–stabilní.

Řád konvergence D–stabilních metod

Pro k–krokové D–stabilní metody platí pro jejich řád konvergence p (tzv. **první Dahlquistova bariéra**):

$p \leq k$	pro explicitní metody
$p \leq k+1$	pro implicitní metody, k liché
$p \leq k+2$	pro implicitní metody, k sudé

Stabilita

Testovácí úloha: $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$

Obecná $s+1$ kroková formule:

$$y_{i+1}(1 - h\lambda b_{-1}) = \sum_{j=1}^{s} (a_j + h\lambda b_j) y_{i-j}$$

Charakteristická rovnice:

$$(1 - h\lambda b_{-1}) z^{s+1} = \sum_{j=1}^{s} (a_j + h\lambda b_j) z^{s-j}$$

Buď z_0 řešení charakteristické rovnice, pro které $\lim\limits_{h\to 0} z_0 = 1$, $z_1, \ldots, z_s$ ostatní řešení. Oblast stability je množina komplexních čísel $z = h\lambda$, pro které $|\frac{z_l}{z_0}| \le 1$, $l = 1, \ldots, s$, přičemž pro $|z_l| = |z_0|$ je $|z_l|$ jednoduchý kořen.

Explicitní vícekrokové metody nemoou být absolutně stabilní, implicitní vícekrokové metody, které jsou absolutně stabilní mají řád přesnosti maximálně 2 (tzv. **druhá Dahlquistova bariéra**).

Metody prediktor–korektor

Kombinace explicitní (prediktor) a implicitní (korektor) metody stejných řádů přesnosti.

Příklad 1:

prediktor	$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$	AB metoda
korektor	$y_{i+1}^{(r+1)} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1}^{(r)} + f_i)$	LM

Příklad 2:

prediktor	$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$	AB
korektor	$y_{i+1}^{(r+1)} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1}^{(r)} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$	AM

Metody prediktor–korektor se zpravidla používají s proměnnou délkou kroku, který se mění na základě odhadu lokální chyby.