Pokročilé numerické metody II
7. přednáška

Okrajové úlohy pro ODR
Metoda střelby
Diferenční metoda

Jiří Zelinka

Okrajové úlohy

Základní úloha druhého řádu

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$$

Zobecnění – každou rovnici vyššího řádu lze přepsat pomocí systému ODR:

$$Y' = \boldsymbol{f}(x, Y), \quad r(Y(a), Y(b)) = 0$$

a, b jsou různé body intervalu, zpravidla krajní body.
Separované okrajové podmínky:

$$r_1(Y(a)) = 0, \quad r_2(Y(b)) = 0$$

Lineární okrajové podmínky:

$$UY(a) + VY(b) = \boldsymbol{c}, \quad U, V \text{ matice}$$

Lineární separované okrajové podmínky:

$$U_1 Y(a) = \boldsymbol{c_1}, \quad V_1 Y(b) = \boldsymbol{c_2}$$

Pro $U = I$, $V = 0$ dostávám počáteční úlohu.

Okrajová úloha nemusí mít řešení

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 1,$$

nebo jich může mít nekonečně mnoho

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

Lineární okrajová úloha druhého řádu

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$$

Separované lineární okrajové podmínky

$$\begin{aligned} -\alpha_1 p(a)y'(a) + \beta_1 y(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2 p(a)y'(b) + \beta_2 y(b) &= \gamma_2 \end{aligned}$$

Funkce p, p' q f jsou spojité, následující podmínky zajišťují existenci řešení:

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0$$

Metoda střelby – převod na počáteční úlohu

Základní úloha druhého řádu:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$$

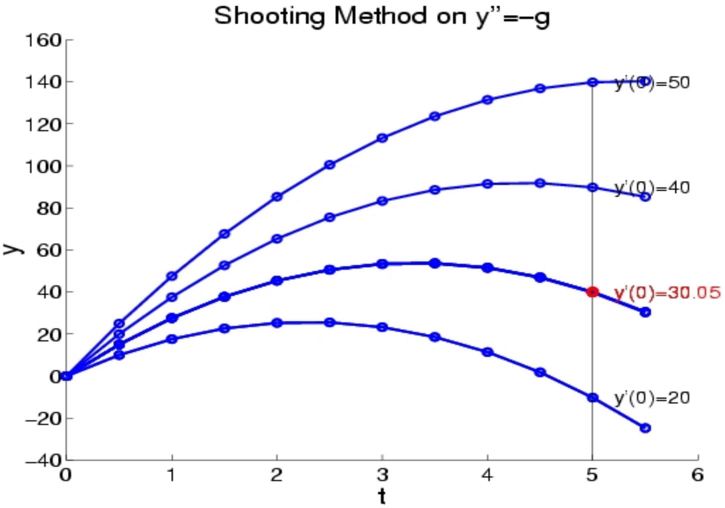
Pro počáteční úlohu $y(a) = y_a$, $y'(a) = \alpha$ existuje jediné řešení $y(x) = y(x, \alpha)$. Hledáme tedy takovou hodnotu $\tilde{\alpha}$, aby $y(b, \tilde{\alpha}) = y_b$.

Řešíme nelineární rovnici

$$F(\alpha) = 0, \quad F(\alpha) = y(b, \alpha) - y_b,$$

ovšem řešení y hledáme numericky.

Nastavíme tedy hodnotu směrnice tečny k řešení y v bodě a a snažíme se „trefit“ do bodu $[b, y_b]$.


Shooting Method on y''=–g
y
t
y'(0)=50
y'(0)=40
y'(0)=30.05
y'(0)=20
160
140
120
100
80
60
40
20
0
–20
–40
0
1
2
3
4
5
6

Iterační metody pro řešení rovnice $F(\alpha) = 0$

- bisekce – potřebujeme 2 počáteční iterace, $F(\alpha_0) < 0$, $F(\alpha_1) > 0$
- Newtonova metoda – potřebujeme znát $\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}$
- metoda sečen – potřebujeme 2 počáteční iterace

Newtonova metoda:

Položme $z(x, \alpha) = \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha}$, pak $\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = z(b, \alpha)$.

Označme $z' = \frac{\partial z(x,\alpha)}{\partial x}$, pak z splňuje počáteční úlohu

$$z'' = f_y z + f_{y'} z', \quad z(a, \alpha) = 0,\ z'(a, \alpha) = 1$$

(derivací rovnice a podmínek podle α). Počáteční iterace:

$$\alpha_0 = \frac{y_b - y_a}{b - a}, \quad \text{pak} \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{F(\alpha_k)}{F'(\alpha_k)}$$

Metoda sečen:

Počáteční iterace:

$$\alpha_0 = \frac{y_b - y_a}{b - a}$$

Podle výsledku $F(\alpha_0)$ provedeme korekci:

$$\alpha_1 = \frac{y_b - y_a - F(\alpha_0)}{b - a} = \alpha_0 - \frac{F(\alpha_0)}{b - a},$$

pak

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{F(\alpha_k) - F(\alpha_{k-1})} F(\alpha_k).$$

Lineární okrajová úloha

$$Y' = AY + \boldsymbol{f}, \quad UY(a) + VY(b) = \boldsymbol{c}, \quad A:\ m \times m$$

Pro počáteční podmínku $Y(a) = \boldsymbol{\alpha}$ dostaneme

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = U\boldsymbol{\alpha} + VY(b, \boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{c},$$

řešíme rovnici

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = 0.$$

Buď Y_0 řešení rovnice s nulovými počátečními podmínkami, $Y_0(x) = Y(x, \mathbf{0})$.

Dále nechť Y_i je řešení homogenní počáteční úlohy $Y' = AY$ s počáteční podmínkou

$$Y(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array},$$

položme

$$\boldsymbol{Y} = [Y_1, \ldots, Y_m],$$

pak

$$Y(x, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{\alpha} + Y_0(x).$$

$$
\begin{aligned}
0 &= F(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = U\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + VY(b,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \boldsymbol{c} \\
&= U\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + V(\boldsymbol{Y}(b)\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + Y_0(b)) - \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{c} - VY_0(b) &= [U + V\boldsymbol{Y}(b)]\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \\
\tilde{\boldsymbol{\alpha}} &= [U + V\boldsymbol{Y}(b)]^{-1}(\boldsymbol{c} - VY_0(b))
\end{aligned}
$$

Řešení pro zjištěné $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ není potřeba počítat znovu:

$$
Y(x) = Y(x,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{Y}(x)\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + Y_0(x)
$$

Diferenční metody

Lineární okrajová úloha druhého řádu

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$$

$$\begin{aligned} -\alpha_1 p(a)y'(a) + \beta_1 y(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2 p(a)y'(b) + \beta_2 y(b) &= \gamma_2 \end{aligned}$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0, \quad i \in \{1,2\}.$$

Řešení hledáme na síti (ekvidistantních) uzlů $(x_0, \ldots, x_n)$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{i+1} - x_i = h$.

Náhrada derivací (a chyby formulí)

$$
\begin{aligned}
y'(x_i) &= \frac{1}{h}[y(x_{i+1}) - y(x_i)] + O(h) \\
y'(x_i) &= \frac{1}{h}[y(x_i) - y(x_{i-1})] + O(h) \\
y'(x_i) &= \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + O(h^2) \\
y''(x_i) &= \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] + O(h^2)
\end{aligned}
$$

Odvození: z Taylorova rozvoje.

Nahrazením derivací diferencemi dostaneme třídiagonální systém lineárních rovnic.

Náhrada rovnice, pokud známe p' ($p_i = p(x_i)$, atd.):

$$-p_i \frac{1}{h^2}[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] - p'_i \frac{1}{2h}[y_{i+1} - y_{i-1}] + q_i y_i = f_i$$

Náhrada rovnice, pokud neznáme p':

Položíme $z = py'$, $(z_i)' \approx \frac{z_{i+1/2} - z_{i-1/2}}{h}$, pak

$$z_{i+1/2} = p_{i+1/2} y'_{i+1/2} \approx p_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

$$z_{i-1/2} = p_{i-1/2} y'_{i-1/2} \approx p_{i-1/2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h}.$$

Celkem

$$-\frac{p_{i+1/2} y_{i+1} - (p_{i+1/2} + p_{i-1/2}) y_i + p_{i-1/2} y_{i-1}}{h^2} + q_i y_i = f_i$$

soustava je symetrická.

Náhrada derivací v okrajových podmínkách:

1. dvoubodové formule – mají chybu $O(h)$
2. tříbodové formule

   $y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + O(h^2)$
   $y_n' = \frac{1}{2h}(y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n) + O(h^2)$
   poruší se třídiagonalita matice soustavy
3. metoda fiktivních bodů

   $y_0' = \frac{1}{2h}(y_1 - y_{-1}) + O(h^2)$
   $y_n' = \frac{1}{2h}(y_{n+1} - y_{n-1}) + O(h^2)$
   přidáme základní rovnici pro y_0 a y_n a vyjádříme y_{-1} a y_{n+1}.