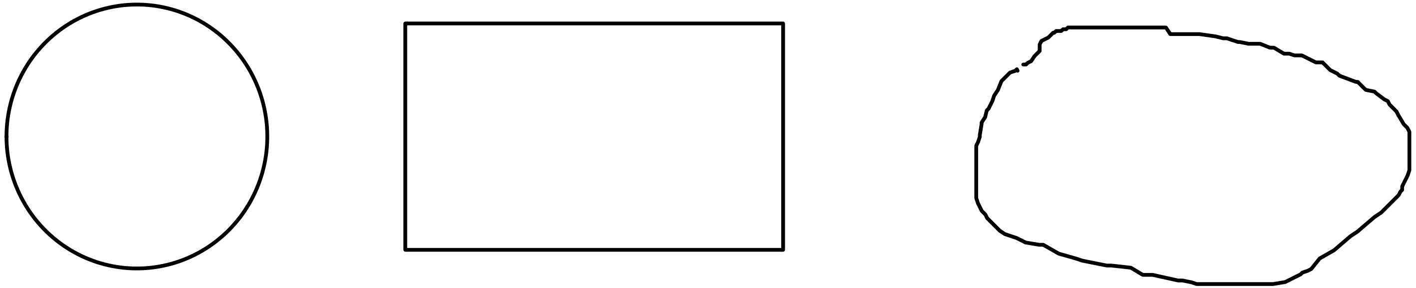
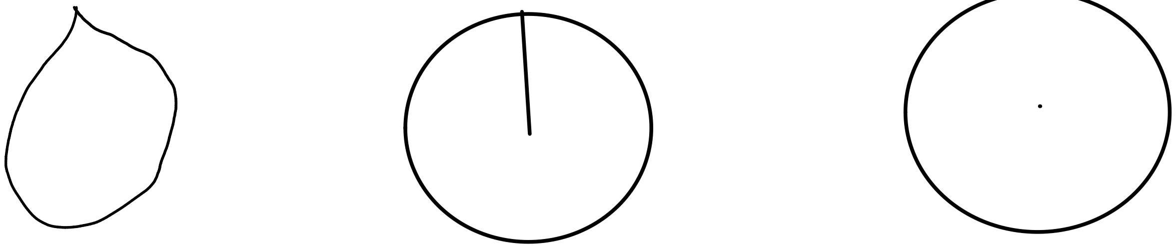
Oblasti s lipschitzovskou hranicí.



Oblasti s hranicí, která není lipschitzovská.



Věta 1 – jednozn. řešení (1)

Dk: u_1, u_2 splňují $Au=f$, A – pozitivní

$$A(u_1-u_2)=0 \qquad (A(u_1-u_2), u_1-u_2)=0 \Rightarrow u_1-u_2=0 \Rightarrow u_1=u_2$$

Věta 2 – ekvivalence řešení (1) a minima F

1) $u_0 \in D_A$ je řešení (1)

$$Fu_0 = (Au_0,u_0)-2(f,u_0) = (f,u_0)-2(f,u_0) = -(f,u_0)$$

$u = u_0+\delta$, $u \in D_A$

$$Fu = (A(u_0+\delta),u_0+\delta) - 2(f,u_0+\delta) = (Au_0,u_0)-2(f,u_0)+(A\delta,u_0)+(Au_0,\delta)+$$

$$+(A\delta,\delta)-2(f,\delta) = Fu_0+\cancel{2(Au_0,\delta)}+(A\delta,\delta)-\cancel{2(f,\delta)} = Fu_0+(A\delta,\delta)$$

$\geq Fu_0$, rovnost pro $\delta=0$, $u=u_0$

2) $\exists u_0 \in D_A: F u_0 \leq F u \quad \forall u \in D_A$

$u = u_0 + t \cdot \delta$, $t \in \mathbb{R}$, $\delta \in D_A$ - pevný, lib.

$F u = (A u_0, u_0) + t(A u_0, \delta) + t(u_0, A\delta) + t^2(A\delta, \delta) - 2(f, u_0) - 2t(f, \delta) = g(t)$

g nabývá minima pro $t = 0 \Rightarrow g'(t)|_{t=0} = 0$

$g'(t) = 2(A u_0, \delta) + 2t(A\delta, \delta) - 2(f, \delta)$, $g'(0) = 2(A u_0, \delta) - 2(f, \delta) = 0$

t.j. $(A u_0 - f, \delta) = 0 \quad \forall \delta \in D_A \Rightarrow$ platí $\forall \delta \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow A u_0 - f = 0$ t.j. $A u_0 = f$

Věta 3 - o minimu kv. funkcionálu v H_A

$$u_0: \quad \forall u \in H_A \quad (u_0, u)_A = (f, u)$$

$$F u_0 = (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) = \|u_0\|_A^2 - 2(u_0, u_0)_A = -\|u_0\|_A^2$$

$$u = u_0 + \delta, \quad Fu = \underline{(Au_0, u_0)} + 2(Au_0, \delta) + (A\delta, \delta) - \underline{2(f, u_0)} - 2(f, \delta) =$$

$$= Fu_0 + \cancel{2(u_0, \delta)_A} + (\delta, \delta)_A - \cancel{2(u_0, \delta)} = Fu_0 + \|\delta\|_A^2$$

$Fu \geq Fu_0$, rovnost $\Rightarrow \delta = 0$

□

$$Fu = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \Rightarrow Fu - Fu_0 = \|u - u_0\|_A^2$$

$$u_n \to u_0 \Leftrightarrow Fu_n \to Fu_0$$

Konstrukce orton. báze

$\{\psi_1, \psi_2, \dots\} \to$ G.-S. ortog. proces $\to \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$

$\forall N: \mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_N) = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$

$u_{\psi,N}$ - minimalizuje F na $\mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_N)$

$\Rightarrow u_{\psi,N} = u_N$ - metoda orton. řad