Pokročilé numerické metody II
8. přednáška

Variační metody

Jiří Zelinka

Principy:

- budeme pracovat v Hilbertových prostorech
- řešíme rovnice $Au = f$ pro lineární operátor A
- řešení nehledáme v jednotlivých bodech, ale hledáme funkci, která aproximuje řešení
- Předpokládané znalosti: Hilbertovy prostory nad $\mathbb{R}$ (skalární sočin (u, v)), Schwarzova nerovnost, L_2 prostory, ortogonální rozklad a projekce, Riezsova věta o reprezentaci, lineární operátory), Fourieroy řady

Nechť H je separabilní Hilbertův prostor, $A : D_A \to H$ lineární operátor (nemusí být spojitý) definovaný na definičním oboru D_A, který je hustý podporstor H.

Př.: Ω: oblast v $\mathbb{R}^2$ s Lipschitzovskou hranicí Γ,

$$Au = -\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$D_A = \{u \in C^2(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ na } \Gamma\}$.

Řešíme rovnici $Au = f$ s nulovou okrajovou podmínkou, tedy hledáme vzor funkce f.

Poznámka: Aby D_A byl podporstor, musí být okrajová podmínka nulová. Pro nenulovou okrajovou podmínku hledáme řešení ve tvaru $u = z + w$, kde z splňuje rovnici s nulovou okrajovou podmínkou a w splňuje nenulovou okrajovou podmínku.

Definice 1

Operátor A se nazývá **symetrický**, jestliže pro všechny $u, v \in D_A$ platí

$$(Au, v) = (u, Av).$$

Př. (pokračování): $Au = -\Delta u$

$$(Au, v) = -\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) v = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v =$$

(použijeme Greenovu větu: $\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \int_\Gamma uv\nu_k dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$, ν_k je k-tá souřadnice vnější normály)

$$= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x} v\nu_x + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} v\nu_y + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

vzhledem k nulovým okrajovým podmínkám. Dostali jsme symetrický výraz, stejný by vyšel pro (u, Av).

Definice 2

Symetrický operátor A se nazývá **pozitivní**, jestliže pro všechny $u \in D_A$ platí

$$(Au, u) \geq 0,$$

přičemž rovnost nastává pouze pro nulový vektor.

Př. (pokračování): $Au = -\Delta u$

$$(Au, u) = \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \geq 0.$$

Rovnost nastává pro konstantní funkci, vzhledem k nulovým okrajovým podmínkám musí být nulová.

Definice 3

Symetrický operátor A se nazývá **pozitivně definitní**, jestliže existuje konstanta $c > 0$ že pro všechny $u \in D_A$ platí

$$(Au, u) \geq c^2 \|u\|^2.$$

Poznámka

Pro konečně rozměrné prostory je A matice, pro ně pojmy **pozitivní** a **pozitivně definitní** splývájí.

Př. (pokračování):

$$(Au, u) = \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial y})^2.$$

Použijeme Fridrichsovu nerovnost:
Existují kladné konstanty c_1, c_2, že

$$\int_\Omega u^2 dx \leq c_1 \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + c_2 \int_\Gamma u^2 dS$$

Z nulových okrajových podmínek dostaneme

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \geq \frac{1}{c_1} \int_\Omega u^2 = \frac{1}{c_1} \|u\|^2,$$

takže pro konstantu c z definice máme $c = \frac{1}{\sqrt{c_1}}$.

Kvadratický funkcionál:

Pro pozitivní operátor A, $f \in H$ a rovnici

$$Au = f \tag{1}$$

zavedeme kvadratický funkcionál F předpisem

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u). \tag{2}$$

Poznámka

Kvadratický funkcionál F je definován pro všechny prvky D_A, ale jeho definiční obor může být větší. Jak vidíme z příkladu, pro $A = -\Delta$ je operátor F definován pro všechny funkce, které splňují okrajové podmínky a jejichž parciální derivace leží v $L_2(\Omega)$, tedy parciální derivace nemusí být ani spojité.

Věta 1

Je-li A pozitivní operátor, pak rovnice (1) má nejvýše jedno řešení v D_A.

Věta 2 (o minimu kvadratického funkcionálu)

Buď A pozitivní operátor a nechť $u_0 \in D_A$ je řešení rovnice (1). Pak F nabývá v D_A svého minima v u_0, t.j. $\forall u \in D_A$ platí $Fu \geq Fu_0$, přičemž rovnost nastává pouze pro $u = u_0$.
Naopak, nechť F nabývá svého minima v D_A v prvku u_0. Pak u_0 je řešením rovnice (1).

Poznámka

Dokázali jsme ekvivalenci řešení rovnice (1) a prvkem minimalizujícím kvadratický funkcionál (2), ale zatím nemáme zaručenu existenci řešení ani minima v D_A. Pro tento účel musíme prostor D_A rozšířit.

Prostor H_A

Buď A pozitivně definitní operátor definovaný na D_A. Pak na D_A můžeme zavést nový skalární součin předpisem

$$(u, v)_A = (Au, v).$$

Tím taky automaticky zavedeme normu $\|u\|_A^2 = (u, u)_A$ a metriku $\rho_A(u, v) = \|u - v\|_A$. Získáme tedy metrický prostor (D_A, ρ_A), jeho zúplněním dostaneme Hilbertův prostor, který označíme H_A.

Poznámka

Prostor H_A by bylo možné definovat i pro pozitivní operátor A. Ale pro pozitivně definitní operátor platí $\|u\|_A \geq c\|u\|$. Odtud plyne, že cauchyovské posloupnosti z D_A v metrice ρ_A jsou cauchyovské i v původní metrice indukované normou $\|\cdot\|$. Proto zúplněním (D_A, ρ_A) nemůžeme získat jiné prvky, než jsou v H. Proto $H_A \subseteq H$ a H_A je separabilní.

Lemma

Pro libovolné pevné $f \in H$ je výrazem (f, u) pro $u \in H_A$ definován spojitý (omezený) lineární funkcionál v H_A.

Důkaz: Linearita je zřejmá.Podle Schwarzovy nerovnosti

$$|(f, u)| \leq \|f\| \cdot \|u\| \leq \frac{1}{c}\|f\|\|u\|_A.$$

Pro každé $u \in H_A$. Odtud plyne omezenost, tedy spojitost funkcionálu.

Věta 3

Kvadratický funkcionál F nabývá svého minima v jediném bodě $u_0 \in H_A$.

Důkaz je založen na Riezsově větě: u_0 je prvek reprezentující (f, u) v H_A, tedy $(u_0, u)_A = (f, u)$ pro každé $u \in H_A$.

Definice

Bod $u_0 \in H_A$, v němž nabývá F svého minima, se naývá **zobecněným řešením** rovnice (1).

Poznámka

Pro normu u_0 platí:

$$|(u_0, u)_A| = |(f, u)| \leq \frac{1}{c}\|f\|\|u\|_A \Rightarrow \textit{pro } u = u_0 : \ \|u_0\|_A \leq \frac{1}{c}\|f\|.$$

Dále

$$\begin{aligned} Fu &= (Au, u) - 2(f, u) = (u, u)_A - 2(u_0, u)_A = \\ &= (u, u)_A - 2(u_0, u)_A + (u_0, u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \\ &= \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \\ Fu_0 &= (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) = (u_0, u_0)_A - 2(u_0, u_0)_A = -\|u_0\|_A^2. \end{aligned}$$

Věta

$$Fu_n \to Fu_0 \Leftrightarrow u_n \to u_0, \ \ t.j. \ \|u_n - u_0\| \to 0.$$

Metoda ortonormálních řad

Buď $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ ortonormální báze (úplný ortonormální systém) v H_A. Pak

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = (u_0, \varphi_n)_A = (f, \varphi_n).$$

Navíc

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$$

je nejlepší aproximací u_0 v lineárním obalu $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $u_N \to u_0$.

Poznámka

Někdy je možné, aby platilo $\varphi_n \in D_A$.

Ritzova metoda

Definice

Řekneme, že systém funkcí $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ tvoří bázi prostoru H_A, jestliže prvky ψ_n jsou lineárně nazávislé a $\mathcal{L}(\Psi)$ je hustý v H_A.

Poznámka

Každou funkci z H_A lze tedy s libovolnou přesností aproximovat konečnou lineární kombinací prvků báze.

Věta

Nechť $u_{\Psi,N}$ je prvek minimalizující kvadratický funkcionál F na $\mathcal{L}(\psi_1, \ldots, \psi_N)$. Pak $u_{\Psi,N} \to u_0$.

Hledání $u_{\Psi,N}$:

$$u_{\Psi,N} = \sum_{n=1}^{N} d_n \psi_n$$

$$\begin{aligned}
Fu_{\Psi,N} &= (A\sum_{n=1}^{N} d_n\psi_n, \sum_{n=1}^{N} d_n\psi_n) - 2(f, \sum_{n=1}^{N} d_n\psi_n) \longrightarrow min \\
Fu_{\Psi,N} &= \sum_{k,n=1}^{N} d_k d_n (A\psi_k, \psi_n) - 2\sum_{n=1}^{N} d_n (f, \psi_n) \longrightarrow min
\end{aligned}$$

Postupuje jako u metody nejmenších čtverců – parciální derivace podle parametrů musí být v bodě minima nulové. Tím získáme systém lineárních rovnic.

$$
\begin{pmatrix}
(A\psi_1, \psi_1) & (A\psi_1, \psi_2) & \dots & (A\psi_1, \psi_N) \\
(A\psi_2, \psi_1) & (A\psi_2, \psi_2) & \dots & (A\psi_2, \psi_N) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(A\psi_N, \psi_1) & (A\psi_N, \psi_2) & \dots & (A\psi_N, \psi_N)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} (f, \psi_1) \\ (f, \psi_2) \\ \vdots \\ (f, \psi_N) \end{pmatrix}
$$

Matice soustavy je symetrická a pozitivně definitní, lze ji také zapsat ve tvaru

$$
\begin{pmatrix}
(\psi_1, \psi_1)_A & (\psi_1, \psi_2)_A & \dots & (\psi_1, \psi_N)_A \\
(\psi_2, \psi_1)_A & (\psi_2, \psi_2)_A & \dots & (\psi_2, \psi_N)_A \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\psi_N, \psi_1)_A & (\psi_N, \psi_2)_A & \dots & (\psi_N, \psi_N)_A
\end{pmatrix},
$$

takže se jedná o Gramovu matici. Pro ortogonální funkce ψ_n dostaneme diagonální matici, pak řešení odpovídá metodě ortonormálních řad.

Galerkinova metoda

Uvažujeme rovnici

$$Au = f$$

bez dalších předpokladů (symetrie, pozitivita, ...)

Definice

Prvek $\tilde{u}_0 \in H$ se nazývá **slabým řešením** rovnice, jestliže pro všechny prvky báze Ψ platí

$$(A\tilde{u}_0, \psi_n) = (f, \psi_n).$$

Princip Galerkinovy metody: hledáme slabé řešení $\tilde{u}_{\Psi,N}$ na $\mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_N)$. Tím dostaneme formálně stejný systém rovnic jako pro Ritzovu metodu, ale nemusí platit symetrie atd., takže není zaručena existence řešení.

Galerkinovu metodu lze použít i na nelineární operátory, pak dostáváme systém nelineárních rovnic.