Pokročilé numerické metody II
9. přednáška

Variační metody:
použití na řešení DR

Jiří Zelinka

Řešení DR pomocí variačních metod

Princip:

- řešíme rovnici $Au = f$ pro lineární operátor A
- ověříme, že A je symetrický pozitivně definitní operátor
- najdeme vhodnou bázi
- najdeme přibližné řešení Ritzovou metodou

ODR

$$Au = -(pu')' + ru = f \quad \text{na } [a, b]$$

p, p' a r jsou spojité funkce na $[a, b]$.

$$H = L_2(a, b),\ p(x) \geq p_0 > 0,\ r(x) \geq 0 \text{ na } [a, b].$$

Okrajové podmínky

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0,\ \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0,$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0,\ \alpha + \beta > 0,\ \gamma + \delta > 0.$$

Speciální případy

1. $u(a) = 0,\ u(b) = 0$
2. $u'(a) = 0,\ u'(b) = 0$
3. $u(a) = 0,\ u'(b) = 0$
4. $u'(a) - \beta u(a) = 0,\ u'(b) + \delta u(b) = 0,\ \beta, \delta > 0$

Symetrie:

$$(Au, v) = -\int_a^b (pu')'v + \int_a^b ruv = -[pu'v]_a^b + \int_a^b pu'v' + \int_a^b ruv$$

Pro první tři typy okrajových podmínek první člen vypadne a dostaneme symetrický výraz. Pro čtvrtý typ dostaneme:

$$-[pu'v]_a^b = -p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) =$$

$$= \delta p(b)u(b)v(b) + \beta p(a)u(a)v(a),$$

což je opět symetrický výraz vzhledem k u a v.

Pozitivita:

Pro první tři typy okrajových podmínek dostaneme

$$(Au, u) = \int_a^b pu'^2 + \int_a^b ru^2 \geq 0.$$

Protože $p \geq p_0 > 0$, je rovnost možná jen pro

$$\int_a^b u'^2 = 0 \Rightarrow u' = 0 \Rightarrow u \equiv C.$$

Vzhledem k nulovosti u v krajním bodě intervalu pro první a třetí typ okrajových podmínek musí být $u \equiv 0$.

Pro druhý typ potřebujeme pro pozitivitu dodatečnou podmínku, např $r(x) \geq r_0 > 0$.

Pro čtvrtý typ máme

$$(Au, u) = \delta p(b)u^2(b) + \beta p(a)u^2(a) + \int_a^b pu'^2 + \int_a^b ru^2 \geq 0.$$

Opět $u \equiv C$, ale také $u^2(a) = 0$, odtud $u \equiv 0$.

Pozitivní definitnost:

Fridrichsova nerovnost pro funkci jedné proměnné:

$$\begin{aligned}
\int_a^b u^2 &\leq c_1 \int_a^b u'^2 + c_2 u^2(a) \\
\int_a^b u^2 &\leq c_1 \int_a^b u'^2 + c_2 u^2(b) \\
\int u^2 &\leq c_1 \int u'^2 + c_2[u^2(a) + u^2(b)]
\end{aligned}$$

Pro okrajové podmínky 1 a 3 vyjde

$$(Au, u) \geq p_0 \int_a^b u'^2 \geq \frac{p_0}{c_1} \int_a^b u^2 = \frac{p_0}{c_1} \|u\|^2.$$

Pro 2 použijeme dodatečný předpoklad $r(x) \geq r_0 > 0$ (stačí $r(x) > 0$ alespoň v jednom bodě). Pak

$$(Au, u) \geq r_0 \int_a^b u^2 = \frac{r_0}{c_1} \|u\|^2.$$

Pro 4:

$$(Au, u) = \delta p(b) u^2(b) + \beta p(a) u^2(a) + \int_a^b p u'^2 + \int_a^b r u^2 \geq$$

$$\geq p_0 \int_a^b u'^2 + p_0 k [u^2(a) + u^2(b)] \text{ pro } k = \min\{\beta, \delta\}.$$

$$(Au,u) \geq \frac{p_0}{c_1} c_1 \int_a^b u'^2 + \frac{p_0 k}{c_2} c_2 [u^2(a) + u^2(b)] \geq$$

$$\geq C^2 \left(c_1 \int_a^b u'^2 + c_2 [u^2(a) + u^2(b)] \right) \geq C^2 \|u\|^2$$

pro $C^2 = \min\{\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 k}{c_2}\}$.

Volba báze

- ortogonální báze
- Na $[a,b]$ zvolíme uzlové body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Bázové funkce ψ_i má hodnotu 1 v x_i a 0 v ostatních uzlových bodech. Řešení aproximujeme po částech lineární spojitou funkcí (lineárním splajnem).
- Pro rovnice vyšších řádů volíme splajny vyšší spojitosti.

Eliptické PDR

Na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ s lipschitzovskou hranicí Γ řešíme rovnici

$$Au = -\sum_{ij=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + cu = f, \;\; a_{ij} = a_{ji}$$

Elipticita:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) z_i z_j \geq p_0 \sum_{i=1}^{N} z_i^2, \quad \forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^N, \;\; p_0 > 0.$$

Okrajové podmínky

Dirichletova $u = 0$ na Γ

Neumannova $Nu = \frac{\partial u}{\partial n_c} = 0$

Newtonova $Nu + \sigma u = 0$, $\sigma \geq \sigma_0 > 0$

$Nu = \frac{\partial u}{\partial n_c}$: derivace ve směru *konormály*

$$Nu = \frac{\partial u}{\partial n_c} = \sum_{ij=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)$$

$\cos(\nu, x_i)$: úhel, který svírá vnější normála v daném bodě s osou x_i (směrový kosinus).
S použitím Greenovy věty dostaneme

$$\begin{aligned}
(Au, v) &= -\int_\Omega \sum_{ij=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) v + \int_\Omega cuv \\
&= -\int_\Gamma \sum_{ij=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) v + \int_\Omega \sum_{ij=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega cuv \\
&= -\int_\Gamma Nuv + \int_\Omega \sum_{ij=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega cuv
\end{aligned}$$

Pro Dirichletovu a Neumannovu okrajovou podmínku dostaneme

$$(Au, v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{ij=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int\limits_{\Omega} cuv = (u, Av)$$

Pro Newtonovu okrajovou podmínku dostaneme

$$(Au, v) = \int\limits_{\Gamma} \sigma uv + \int\limits_{\Omega} \sum_{ij=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int\limits_{\Omega} cuv = (u, Av)$$

Pozitivní definitnost

Dirichletova podmínka

$$(Au,u) = \int\limits_\Omega \sum_{ij=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int\limits_\Omega cu^2 \geq p_0 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2$$

Podle Fridrichsovy nerovnosti

$$(Au,u) \geq \frac{p_0}{c_1} c_1 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \geq \frac{p_0}{c_1} \int\limits_\Omega u^2 = \frac{p_0}{c_1} \|u\|^2$$

Newtonova podmínka

$$(Au,u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{ij=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int\limits_{\Omega} cu^2 + \int\limits_{\Gamma} \sigma u^2$$

$$\geq p_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 + \sigma_0 \int\limits_{\Gamma} u^2 = \frac{p_0}{c_1} c_1 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 + \frac{\sigma_0}{c_2} c_2 \int\limits_{\Gamma} u^2$$

$$(Au,u) \geq C^2 \|u\|^2 \; pro \; C^2 = \min\{\frac{p_0}{c_1}, \frac{\sigma_0}{c_2}\}.$$

Neumannova podmínka – potřebujeme dodatečnou podmínku

$$c(x) \geq c_0 > 0.$$

Pak

$$(Au,u) \geq c_0 \int\limits_{\Omega} u^2 = c_0 \|u\|^2.$$