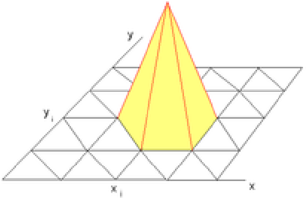
Pokročilé numerické metody II
10. přednáška

Variační metody – dokončení

Jiří Zelinka

Volba báze

Provedem triangulaci oblasti Ω. Pro každý vrchol triangulace definujeme bázovvou funkci částech lineární spojitou s hodnotou 1 v daném vrcholu, v ostatních vrcholech 0.



Řešení u je aproximováno po částech lineární spojitou funkcí.

Řešení DR pomocí variačních metod

Metoda nejmenších čtverců

Definice

Řekneme, že systém funkcí $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ tvoří A-bázi prostoru H, jestliže prvky $A\psi_n$ tvoří bázi H.

Tedy $\forall \varepsilon > 0$ lze nalézt N a konstanty $c_1,\ldots,c_N$, že

$$\|\sum_{k=1}^{N} c_k A\psi_k - f\| < \varepsilon, \text{ t.j.}$$

$$\|\sum_{k=1}^{N} A(c_k\psi_k) - f\| = \|A\sum_{k=1}^{N}(c_k\psi_k) - f\| < \varepsilon.$$

MNČ: hledáme přibližné řešení ve tvaru $u_N = \sum_{k=1}^{N} a_k\psi_k$:

$$\|Au_N - f\| \to \min$$

na $\mathcal{L}(\psi_1,\ldots,\psi_N)$.

Derivací podle parametrů dostaneme podobně jako pro Ritzovu metodu systém lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} (A\psi_1, A\psi_1) & \dots & (A\psi_1, A\psi_N) \\ (A\psi_2, A\psi_1) & \dots & (A\psi_2, A\psi_N) \\ \vdots & & \vdots \\ (A\psi_N, A\psi_1) & \dots & (A\psi_N, A\psi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, A\psi_1) \\ (f, A\psi_2) \\ \vdots \\ (f, A\psi_N) \end{pmatrix}$$

s Gramovou maticí soustavy.

Věta

Nechť A je pozitivně definitní operátor a nechť $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ je A-báze prostoru H. Pak posloupnost u_N určená metodou nejmenších čtverců konverguje v H_A a tedy i v H k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$. Navíc platí

$$\lim_{N\to\infty} Au_N = f.$$

Courantova metoda

Nechť zobecně řešení u_0 rovnice $Au = f$ leží v D_A. Sestrojíme funkcionál

$$\tilde{F}u = Fu + \|Au - f\|^2.$$

$\tilde{F}$ nabývá minima v u_0, protože u_0 minimalizuje F a $\|Au_0 - f\| = 0$. Minimalizace $\tilde{F}$ Ritzovou metodou je pracnější než minimalizace F, ale konvergence je rychlejší.

Obecnější předpoklady pro konvergenci MNČ

1. A je lineární, D_A je hustý v H.
2. $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ je A-báze prostoru H.
3. Rovnice $Au = f$ má řešení $u_0 \in D_A$.
4. Existuje $K > 0$, že pro každý $u \in D_A$ platí $\|Au\| \geq K\|u\|$.