Pokročilé numerické metody II
11. přednáška

Metody konečných diferencí pro eliptické rovnice

Jiří Zelinka

Ω: oblast v $\mathbb{R}^m$ s Lipschitzovskou hranicí Γ.

Gauss, Green, Ostrogradský:

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \int_\Gamma uv\nu_k dS - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

Fridrichsova nerovnost:

Existují konstanty c_1, c_2, že

$$\int_\Omega u^2 dx \leq c_1 \sum_{i=1}^m \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + c_2 \int_\Gamma u^2 dS$$

Poincarého nerovnost:

Existují konstanty c_3, c_4, že

$$\int_\Omega u^2 dx \leq c_3 \sum_{i=1}^m \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + c_4 \left(\int_\Omega u \right)^2 dx$$

Eliptické rovnice

Ω: oblast v $\mathbb{R}^m$ s Lipschitzovskou hranicí Γ.

Rovnice:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + q(x)u = f(x)$$

Okrajová podmínka:

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n_c} + \beta(x)u = \gamma(x)$$

$a_{ij} = a_{ji}$, q, f: funkce definované v Ω

α, β, γ: funkce definované na Γ

$\frac{\partial u}{\partial n_c}$: derivace ve směru *konormály*

$$\frac{\partial u}{\partial n_c} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_j)$$

$\cos(\nu, x_j)$: úhel, který svírá vnější normála v daném bodě s osou x_j.

Eliptičnost:

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) z_i z_j \geq p_0 \sum_{i=1}^{m} z_i^2, \quad \forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^m$$

$\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$

Typy okrajových podmínek

$\alpha = 0$: Dirichletova okrajová podmínka

$\beta = 0$: Neumannova okrajová podmínka

$\alpha, \beta > 0$: Newtonova okrajová podmínka

Sestavení diferenčního schematu

Lineární samoadjungovaná rovnice v $\mathbb{R}^2$

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q(x,y)u = f(x,y)$$

Síť: systém rovnoběžek $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$,
$h > 0$: (integrační) krok.

Označení: $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$, podobně ostatní.

Diferenční proximace operátoru L:

$$\begin{aligned} h^2 L^1 u_{ij} &= [4p_{ij} + h^2 q_{ij}]u_{ij} - \\ &- [p_{ij} + \frac{h}{2}\frac{\partial p_{ij}}{\partial x}]u_{i+1,j} - [p_{ij} - \frac{h}{2}\frac{\partial p_{ij}}{\partial x}]u_{i-1,j} - \\ &- [p_{ij} + \frac{h}{2}\frac{\partial p_{ij}}{\partial y}]u_{i,j+1} - [p_{ij} - \frac{h}{2}\frac{\partial p_{ij}}{\partial y}]u_{i,j-1} \end{aligned}$$

Diferenční proximace operátoru L bez derivcí p

Označení: $p_{i+1/2,j} = p(x_i + \frac{h}{2}, y_j)$, podobně další.

$$\begin{aligned} h^2 L^2 u_{ij} &= [p_{i+1/2,j} + p_{i-1/2,j} + p_{i,j+1/2} + p_{i,j-1/2} + h^2 q_{ij}]u_{ij} - \\ &- p_{i+1/2,j} u_{i+1,j} - p_{i-1/2,j} u_{i-1,j} - \\ &- p_{i,j+1/2} u_{i,j+1} - p_{i,j-1/2} u_{i,j-1} \end{aligned}$$

Matice soustavy je symetrická.

Věta 1

Nechť p má v $\bar{\Omega}$ spojité první parciální derivace a nechť q je spojitá v Ω. Dále nechť u má v $\bar{\Omega}$ spojité parciální derivace do čtvrtého řádu. Pak platí

$$L^1 u_{ij} = (Lu)(x_i, y_j) + O(h^2).$$

Věta 2

Nechť p má v $\bar{\Omega}$ spojité první parciální derivace a nechť q je spojitá v Ω. Dále nechť u má v $\bar{\Omega}$ spojité parciální derivace do čtvrtého řádu. Pak platí

$$L^2 u_{ij} = (Lu)(x_i, y_j) + O(h^2).$$

Příklady

Poissonova rovnice

$$-\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Laplaceova rovnice

$$-\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Aproximace:

$$\frac{1}{h^2}[4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}] = f_{i,j}$$

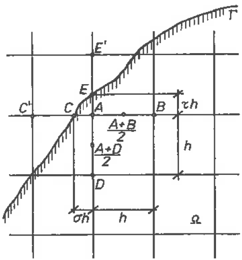
Přepis okrajových podmínek

Uzly sítě

vnitřní: všechny sousední uzly leží v $\bar{\Omega}$
hraniční: pokud není vnitřní a aspoň jeden soused je vnitřní.

Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = \gamma(x,y)$ na Γ.

Collatzova lineární interpolace:



Potřebujeme rovnici pro bod A,
využijeme přímku spojující A,B:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{h-x}{h}u(A) + \frac{x}{h}u(B) + O(h^2) \\
u(C) &= (1+\sigma)u(A) - \sigma u(B) + O(h^2)
\end{aligned}
$$

Hraninčí operátor: $(l^C)_A = u_A - \frac{\sigma}{1+\sigma}u_B$

Okrajová podmínka: $(l^C)_A = \frac{1}{1+\sigma}\gamma(C)$

Rovnice pro bod A:

$$u_A - \frac{\sigma}{1+\sigma} u_B = \frac{1}{1+\sigma}\gamma(C)$$

Alternativní rovnice:

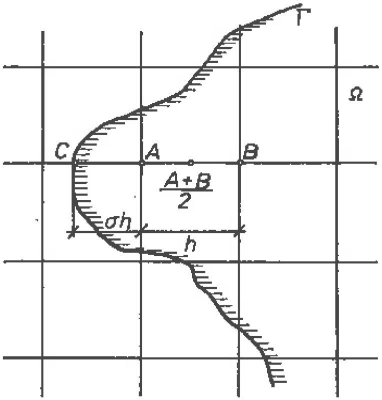
$$u_A - \frac{\tau}{1+\tau} u_D = \frac{1}{1+\tau}\gamma(E)$$

Zachování symetrie:

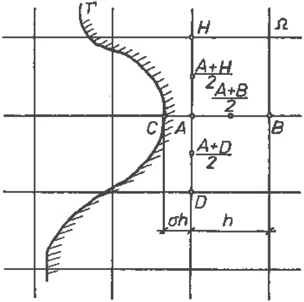
$$\left[\frac{1+\sigma}{\sigma} p(\frac{A+B}{2}) + \frac{1+\tau}{\tau} p(\frac{A+D}{2})\right] u_A - p(\frac{A+B}{2}) u_B - p(\frac{A+D}{2}) u_D =$$

$$= \frac{1}{\sigma} p(\frac{A+B}{2}) \gamma(C) + \frac{1}{\tau} p(\frac{A+D}{2}) \gamma(E)$$

Různé tvary hranice



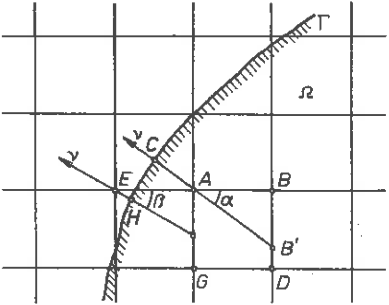
$$\frac{1+\sigma}{\sigma}p(\frac{A+B}{2})u_A - p(\frac{A+B}{2})u_B = \frac{1}{\sigma}p(\frac{A+B}{2})\gamma(C)$$



$$\left[\frac{1+\sigma}{\sigma}p(\frac{A+B}{2}) + p(\frac{A+D}{2}) + p(\frac{A+H}{2})\right] u_A -$$

$$-p(\frac{A+B}{2})u_B - p(\frac{A+D}{2})u_D - p(\frac{A+H}{2})u_H = \frac{1}{\sigma}p(\frac{A+B}{2})\gamma(C)$$

Neumannova okrajová podmínka: $\frac{\partial u}{\partial n_c} = \gamma$



$$\frac{\partial u}{\partial n_c}(C) = \frac{\partial u}{\partial n_c}(A) + O(h) = \frac{u(A) - u(B')}{\frac{h}{\cos\alpha}} + O(h)$$

$$u(B') = \tan\alpha u(D) + (1 - \tan\alpha)u(B) + O(h^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_c}(C) = \frac{\cos\alpha}{h}[u(A) - (1 - \tan\alpha)u(B) - \tan\alpha u(D)] + O(h)$$

$$u(A) - (1 - \tan\alpha)u(B) - \tan\alpha u(D) = \frac{h}{\cos\alpha}\gamma(C)$$

Newtonova okrajová podmínka:
Kombinací předchozích postupů, chyba je opět $O(h)$.