Pokročilé numerické metody II
12. přednáška

Parabolické rovnice

Jiří Zelinka

Parabolické DR

Rovnice vedení tepla

$u = u(x,t)$, $f = f(x,t)$, $x \in [0,1]$, $t \geq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + f \tag{1}$$

Interpretace:

$u(x,t)$ je teplota tenké tyče v daném bodě a daném čase,
funkce f zahrnuje vnější zdroje tepla,
$\alpha \geq 0$ je zpravidla konstanta – materiálové vlastnosti.

Počáteční podmínka: $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in [0,1]$

Okrajové podmínky (Dirichletovy): $u(i,t) = g_i(t)$, $t \geq 0$, $i \in \{0,1\}$

Homogenní rovnice: $f \equiv 0$.

Obecná rovnice

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + q(x,t)u = \frac{\partial}{\partial x}(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}) + f(x,t)$$

Newtonovy okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} p(0,t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \alpha_0 u(0,t) - \beta_0(t) \\ -p(1,t)\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= \alpha_1 u(1,t) - \beta_1(t) \end{aligned}$$

Interpretace okrajových podmínek

$u(0,t), u(1,t)$: teplota na krajích tyče, u Dirichletových podmínek udržujeme stanovenou teloptu v daném čase.

$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}$: udává unikání tepla z konců tyče,
volný únik tepla: $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$.

Vlastnosti rovnice

Princip maxima

Každá funkce $u(x,t)$, která splňuje **homogenní** rovnici nabývá svého maxima i minima pro $t=0$ nebo $x \in \{0,1\}$.

Podmínky kompatibility (pro Dirichletovy podmínky)

$$u_0(0) = g_0(0), \quad u_0(1) = g_1(0)$$

Rychlost šíření tepla

Pro $x \in (-\infty, \infty)$ (bez okrajových podmínek) se dá dokázat

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha \pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi$$

Pro $u_0 \geq 0$ je funkce u je všude kladná, přestože u_0 mohla být kladná jen na omezeném intervalu $\Rightarrow$ rychlost šíření tepla by musela být nekonečná.

Zhlazovací jev

Pro spojitou a omezenou funkci u_0 je řešení u dané předchozím vztahem nekonečně hladké.

Přibližné řešení hledáme na $[0,1] \times [0, T]$, $T > 0$.

Definice uzlů:
$h = 1/N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, $x_i = i\,h$,
$\tau = T/M$, $t_0 = 0$, $t_M = T$, $t_k = k\,\tau$.
Označení: $u_i^k \approx u(x_i, t_k)$.

Přibližné řešení počítáme postupně po časových vrstvách.

Diskretizaci rovnice lze provést různými způsoby.

Vyšetřování stability

- Fourierova metoda: předpokládáme, že chybu v počáteční podmínce můžeme vyjádřit pomocí komplexní Fourierovy řady, šíření poruchy sledujeme pro jeden člen řady $e^{i\lambda x}$.
- Maticová analýza stability: zkoumáme vlastní čísla transformačních matic. Pro α konstantní dostáváme tzv. Toeplitzovy matice (matice s konstantními diagonálami), které jsou navíc třídiagonální.

$$T = \begin{pmatrix} d & u & 0 & \cdots & 0 \\ l & d & u & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & l & d & u \\ 0 & \cdots & 0 & l & d \end{pmatrix} \text{typu } n \times n,$$

$\lambda_k = d + 2\sqrt{ul}\cos\frac{k\pi}{n+1},\ k = 1, \ldots, n.$

A. Explicitní schéma

Rovnici aproximujeme v bodě (x_i, t_k):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}[u_i^{k+1} - u_i^k] &= \frac{\alpha}{h^2}[u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] + f_i^k \\
u_i^{k+1} &= \frac{\alpha\tau}{h^2}[u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] + u_i^k + \tau f_i^k \\
r &= \frac{\alpha\tau}{h^2} \\
u_i^{k+1} &= r\, u_{i-1}^k + (1-2r)u_i^k + r\, u_{i+1}^k + \tau f_i^k,
\end{aligned}$$

pro $i = 1, \ldots, N-1$, chyba aproximace je $O(\tau + h^2)$.

Pro $r = \frac{1}{6}$ je chyba aproximace $O(\tau^2 + h^4)$.

$$
U^k = \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{N-2}^k \\ u_{N-1}^k \end{pmatrix}, \qquad F^k = \begin{pmatrix} \tau f_1^k + r u_0^k \\ \tau f_2^k \\ \vdots \\ f_{N-2}^k \\ f_{N-1}^k + r u_N^k \end{pmatrix}
$$

$$
U^{k+1} = A_r\, U^k + F^k
$$

$$
A_r = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & r & 1-2r & r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix}
$$

Stabilita explicitního schématu

Schema je podmíněně stabilní. spektrální poloměr A_r musí být menší nebo roven jedné, odtud

$$r \leq \frac{1}{2}$$

t.j.

$$\frac{\alpha\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Důsledek

Časový krok závisí na druhé mocnině h.

B. Implicitní schéma

Rovnici aproximujeme v bodě (x_i, t_{k+1}):

$$\frac{1}{\tau}[u_i^{k+1} - u_i^k] = \frac{\alpha}{h^2}[u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}] + f_i^{k+1}$$

$$-r\, u_{i-1}^{k+1} + (1+2r)u_i^{k+1} - r\, u_{i+1}^{k+1} = u_i^k + \tau f_i^{k+1}$$

$$B_r U^{k+1} = U^k + F^{k+1}$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 1+2r & -r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -r & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -r & 1+2r \end{pmatrix}$$

Schema je nepodmíněně stabilní, chyba je $O(\tau + h^2)$.

C. Crankovo–Nicholsonové schéma

Rovnici aproximujeme v bodě $(x_i, t_k + \tau/2)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}[u_i^{k+1} - u_i^k] &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha}{h^2}[u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] + \right.\\ &+ \left.\frac{\alpha}{h^2}[u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}]\right\} + f_i^{k+1/2}\end{aligned}$$

$$-\frac{r}{2}u_{i-1}^{k+1} + (1+r)u_i^{k+1} - \frac{r}{2}u_{i+1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{i-1}^k + (1-r)u_i^k + \frac{r}{2}u_{i+1}^k + \tau f_i^{k+1/2}$$

$$B_{r/2}U^{k+1} = A_{r/2}\, U^k + F^{k+1/2}$$

Schema je nepodmíněně stabilní, chyba je $O(\tau^2 + h^2)$.

Věta o konvergenci

Nechť řešení rovnice (1) s Dirichletovými okrajovými podmínkami má řešení, které je čtyřikrát spojitě diferencovatelné podle x a dvakrát podle t, $0 < r \leq \frac{1}{2}$. Pak

$$\max |u(x_i, t_k) - u_i^k| = O(\tau + h^2)$$

pro explicitní a implicitní schéma a

$$\max |u(x_i, t_k) - u_i^k| = O(\tau^2 + h^2)$$

pro schéma Crankovo–Nicholsonové.

Doplňky

Derivace v okrajových podmínkách:

Použijeme metodu fiktivních bodů podobně jako pro ODR.

Rovnice ve více dimenzích

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \alpha \Delta u + f$$

Rovnici řešíme na $\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Např. pro $n = 2$ a explicitní schéma vyjde (viz eliptické rovnice):

$$u_{ij}^{k+1} = r\, u_{i,j-1}^k + r\, u_{i-1,j}^k + (1-4r) u_{ij}^k + r\, u_{i+1,j}^k + r\, u_{i,j+1}^k + \tau f_{ij}^k .$$

Podmínka stability: $r \leq \frac{1}{4}$.