# Pokročilé numerické metody II
# 13. přednáška

## Parabolické rovnice
## Hyperbolické rovnice

Jiří Zelinka

## Rovnice vedení tepla ve více dimenzích

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \alpha \Delta u + f$$

Rovnici řešíme na $\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Např. pro $n = 2$ a explicitní schéma vyjde (viz eliptické rovnice):

$$u_{ij}^{k+1} = r\, u_{i,j-1}^k + r\, u_{i-1,j}^k + (1-4r) u_{ij}^k + r\, u_{i+1,j}^k + r\, u_{i,j+1}^k + \tau f_{ij}^k .$$

Podmínka stability: $r \leq \frac{1}{4}$.

## Metoda střídavých směrů

Snaha o ekonomický výpočet – pouze třídiagonální matice:

Při přechodu od vrstvy $k$ k vrstvě $k+1$ použijeme mezivrstvu $k+1/2$ a použijeme různé typy aproximací.

V prvním půlkroku aproximujeme $u_{xx}$ implicitně (pomocí vrstvy $k+1/2$) a $u_{yy}$ explicitně (pomocí vrstvy $k$). V druhém půlkroku je to obráceně. Časový krok je $\tau/2$.

Pro homogenní rovnici máme:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2}-u_{i,j}^{k}}{\tau}=\frac{\alpha}{2}\left[\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2}+\frac{u_{i,j-1}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i,j+1}^{k}}{h_y^2}\right]$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1/2}}{\tau}=\frac{\alpha}{2}\left[\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2}+\frac{u_{i,j-1}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j+1}^{k+1}}{h_y^2}\right]$$

Schéma je absolutně stabilní s diskretizační chybou $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

Problémy mohou být pro obecnou oblast s aproximací na hranici.

**Vlnová rovnice**

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + f$$

**Interpretace:**
$u(x, t)$ je vychýlení struny v daném bodě a daném čase.
$c$ je rychlost šíření vlny, často klademe $c = 1$.

Počáteční podmínky:

$u(x, 0) = u_0(x)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = u_1(x)$, $x \in [0, 1]$

Okrajové podmínky (Dirichletovy):

$u(i, t) = g_i(t)$, $t \geq 0$, $i \in \{0, 1\}$

Přibližné řešení hledáme na $[0,1] \times [0,T]$, $T > 0$.

Definice uzlů:
$h = 1/N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, $x_i = i\,h$,
$\tau = T/M$, $t_0 = 0$, $t_M = T$, $t_k = k\,\tau$.
Označení: $u_i^k \approx u(x_i, t_k)$.

Přibližné řešení počítáme postupně pomocí tří časových vrstev:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau^2}[u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}] &= \frac{\sigma}{h^2}[u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}] + \\
&+ \frac{1-2\sigma}{h^2}[u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] + \\
&+ \frac{\sigma}{h^2}[u_{i-1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1}] + f_i^k
\end{aligned}
$$

Diskretizační chyba: $O(\tau^2 + h^2)$

$\sigma \geq 0$: váha diferenčního schématu.
$\sigma = 0$: explicitní schéma, podmínka stability je $\tau/h \leq 1$.
$\sigma = 1$: implicitní schéma, absolutně stabilní.

## Začátek výpočtu

Počáteční vrstvu ($k = 0$) získáme z počáteční podmínky pro $u_0$.

První vrstvu získáme z odhadu první derivace (funkce $u_1$), s využitím centrální diferenční formule pro počáteční vrstvu s chybou $O(\tau^2)$, fiktivních bodů (vrstva pro $k = -1$) a rovnice pro vrstvy $-1, 0, 1$.

# Metoda přímek (klasická)

Metodu lze použít pro časově závislé rovnice s jednou prostorovou proměnnou.

Princip spočívá v tom, že diskretizujeme pouze prostorovou proměnnou a rovnici pak řešíme jako systém ODR.

Rovnice:

$$u_t = f(x, t, u_x, u_{xx}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Počáteční podmínka:

$u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in [0, 1]$

Okrajové podmínky (Dirichletovy):

$u(i, t) = g_i(t)$, $t \geq 0$, $i \in \{0, 1\}$

Definice uzlů:

$h = 1/N$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, $x_i = i\,h$

Označme $u_i(t) = u(x_i, t)$, jedná se o restrikci funkce $u$ na přímku $x = x_i$.

Použijeme „klasické" diferenční aproximace parciálních derivací podle $x$, derivace funkcí $u_i$ je derivací podle času:

$$\begin{aligned} u_i' &= f\left(x_i, t, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right) \\ &= F_i(t, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

$u_0$ a $u_N$ jsou dány okrajovými podmínkami,

počáteční podmínky $u_i(0) = u_0(x_i)$.

Metodu lze použít i pro rovnice vyšších řádů s příslušnými počátečními podmínkami.