8 Vícerozměrné obdoby t-testů

Příklad 1. V souboru mlrm-fat.txt máme k dispozici antropometrická data mladých zdravých dospělých žen (převážně studentek vysokých škol z Brna). Zajímají nás proměnné tělesná hmotnost (proměnná body.W), tělesná výška (proměnná body.H), tloušťka kožní řasy ve výši 10. žebra (proměnná rib.F), tloušťka kožní řasy na břiše (proměnná abdo.F), tloušťka kožní řasy na boku (proměnná hip.F) a tloušťka kožní řasy nad čtyřhlavým svalem stehenním (proměnná quad.H). Hmotnost byla měřena v kilogramech, tělesná výška v centimetrech, ostatní veličiny v milimetrech. Chceme otestovat hypotézu:

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\\ \mu_5\\ \mu_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60.8\\ 167.9\\ 13.0\\ 21.5\\ 22.0\\ 25.0\end{pmatrix}$$

oproti alternativní hypotéze

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\\ \mu_5\\ \mu_6\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}60.8\\ 167.9\\ 13.0\\ 21.5\\ 22.0\\ 25.0\end{pmatrix}$$

S proměnnou BMI se v tomto příkladu nepracuje! Ze souboru odstraníme pozorování 36, které jsme v předchozích cvičeních identifikovali jako odlehlé.

Načteme datový soubor a vynecháme z něj proměnnou, která nás nezajímá, a odlehlé pozorování.

```
fat <- read.table('DATA/mlrm-fat.txt', header=T)
str(fat)

## 'data.frame': 51 obs. of  7 variables:
##  $ body.W: num  53.3 49.3 53.3 61.2 65.4 64.3 62.4 60.2 54.3 58.6 ...
##  $ body.H: num  165 162 179 171 174 ...
##  $ BMI   : num  19.6 18.8 16.6 20.9 21.6 ...
##  $ rib.F : num  10.2 12.8 9.2 13.8 19.6 14.2 17.2 16.8 9.2 12.6 ...
##  $ abdo.F: num  17 17.8 13.4 16.6 24.8 29 25.8 25.2 17 23.4 ...
##  $ hip.F : num  24.8 20.4 9.2 19.4 25.2 29.2 25.8 27.2 10.4 26.2 ...
##  $ quad.H: num  22.4 25.8 25.4 24.2 27.8 27.2 31.2 18.4 15.8 28.4 ...

fat2 <- fat[-36, -3]
```

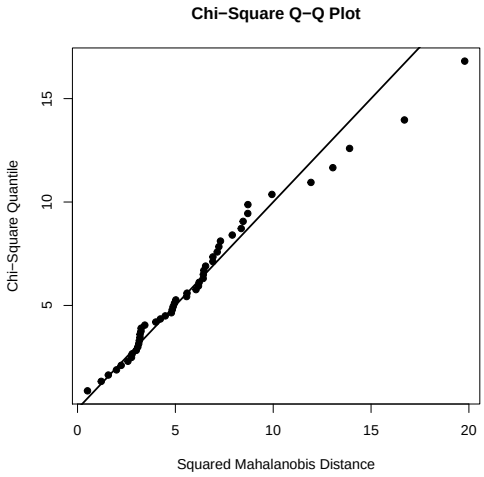
Vypočítáme vektor výběrových průměrů a výberovou varianční matici.

```
colMeans(fat2)

##  body.W  body.H   rib.F  abdo.F   hip.F  quad.H
##  58.452 167.350  12.684  20.662  19.898  23.478

var(fat2)

##           body.W     body.H     rib.F     abdo.F     hip.F     quad.H
## body.W 28.582547  9.7222449 11.396359 11.8873224 17.619698 16.7972898
```

```
## body.H  9.722245 34.5841837 -2.434082  0.5319388 -2.258469 -0.2441837
## rib.F  11.396359 -2.4340816 12.550351 10.4855020 15.249355 12.9431102
## abdo.F 11.887322  0.5319388 10.485502 20.7652612 19.670331 11.3466980
## hip.F  17.619698 -2.2584694 15.249355 19.6703306 39.452037 23.4248531
## quad.H 16.797290 -0.2441837 12.943110 11.3466980 23.424853 33.3033837
```

Je potřeba ověřit předpoklad, že data pocházejí z šestirozměrného normálního rozdělení. K tomu můžeme použít Mardi;v test nebo Henzeův-Zirklerův test, v obou můžeme volbou multivariatePlot = 'qq' vykreslit kvantil-kvantilový graf.
Pozn.: Mardiův test se vyhodnocuje společně, takže i v případě, že tedy dojde k zamítnutí jen u šikmosti nebo jen u špičatosti, zamítá Mardiův test hypotézu, že data pocházejí z vícerozměrného normálního rozdělení.

```
library(MVN)
mvn(fat2, mvnTest = 'mardia', multivariatePlot = 'qq')$multivariateNormality
```




```
##              Test         Statistic            p value Result
## 1 Mardia Skewness  78.4698980162969 0.0254328244527076     NO
## 2 Mardia Kurtosis 0.916783431184303  0.359256136598384    YES
## 3             MVN              <NA>               <NA>     NO

mvn(fat2, mvnTest = 'hz')$multivariateNormality

##            Test        HZ   p value MVN
## 1 Henze-Zirkler 0.8484733 0.7080379 YES
```

Mardiův test pro šikmost:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Mardiův test pro špičatost:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Henzeův-Zirklerův test:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....

Závěr .....

Pomocí jednovýběrového Hotellingova testu otestujeme hypotézu, že vektor středních hodnot je roven zadanému vektoru.

```
mu0 <- c(60.8, 167.9, 13, 21.5, 22, 25)
library(ICSNP)

## Loading required package: mvtnorm
## Loading required package: ICS

HotellingsT2(fat2, mu=mu0)

##
##  Hotelling's one sample T2-test
##
## data:  fat2
## T.2 = 2.5518, df1 = 6, df2 = 44, p-value = 0.03302
## alternative hypothesis: true location is not equal to c(60.8,167.9,13,21.5,22,25)
```

Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Protože jsme na hladině významnosti 0.05 ..... hypotézu, že vektor středních hodnot je roven $(60.8, 167.9, 13.0, 21.5, 22.0, 25.0)^T$, chceme zjistit, které proměnné to způsobují. Provedeme proto jednorozměrné t-testy, u nichž musíme upravit hladinu významnosti pomocí Bonferroniho korekce (hladinu významnosti dělíme počtem proměnných):

```
alpha.korig <- 0.05 / 6
alpha.korig

## [1] 0.008333333
```

U jednorozměrných t-testů tedy budeme zamítat hypotézu v případě, že p-hodnota bude menší než $0.008\bar{3}$.

```
t.test(fat2$body.W, mu=mu0[1])

##
##  One Sample t-test
##
## data:  fat2$body.W
## t = -3.1055, df = 49, p-value = 0.003155
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 60.8
## 95 percent confidence interval:
##  56.93261 59.97139
## sample estimates:
## mean of x
##    58.452
```

$H_0 : \mu_1 = 60.8$
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

```
t.test(fat2$body.H, mu=mu0[2])

##
##  One Sample t-test
##
## data:  fat2$body.H
## t = -0.66132, df = 49, p-value = 0.5115
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 167.9
## 95 percent confidence interval:
##  165.6787 169.0213
## sample estimates:
## mean of x
##    167.35
```

$H_0 : \mu_2 = 167.9$
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

```
t.test(fat2$rib.F, mu=mu0[3])

##
##  One Sample t-test
##
## data:  fat2$rib.F
## t = -0.63073, df = 49, p-value = 0.5311
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 13
## 95 percent confidence interval:
##  11.67719 13.69081
## sample estimates:
## mean of x
##    12.684
```

$H_0 : \mu_3 = 13$
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

```
t.test(fat2$abdo.F, mu=mu0[4])

##
##  One Sample t-test
##
## data:  fat2$abdo.F
## t = -1.3004, df = 49, p-value = 0.1996
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 21.5
## 95 percent confidence interval:
##  19.36695 21.95705
## sample estimates:
## mean of x
##    20.662
```

$H_0 : \mu_4 = 21.5$
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

```
t.test(fat2$hip.F, mu=mu0[5])

##
##  One Sample t-test
##
## data:  fat2$hip.F
## t = -2.3664, df = 49, p-value = 0.02196
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 22
## 95 percent confidence interval:
##  18.11294 21.68306
## sample estimates:
## mean of x
##    19.898
```

$H_0 : \mu_5 = 22$
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

```
t.test(fat2$quad.H, mu=mu0[6])

##
##  One Sample t-test
##
## data:  fat2$quad.H
## t = -1.8649, df = 49, p-value = 0.06819
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 25
## 95 percent confidence interval:
##  21.83793 25.11807
## sample estimates:
## mean of x
##    23.478
```

$H_0 : \mu_6 = 25$
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Vidíme, že vícerozměrná hypotéza byla zamítnuta kvůli proměnným ..... .

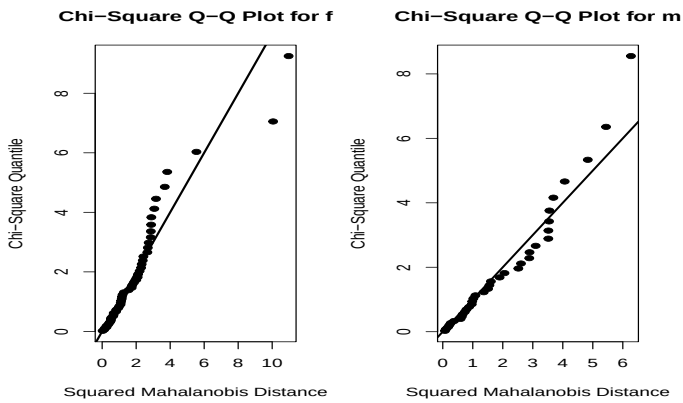
Příklad 2. V souboru d2d4.txt máme k dispozici antropometrická data mladých dospělých lidí (převážně studentů z Brna a Ostravy) - tělesnou výšku (proměnná body.H), a poměr délky 2. a 4. prstu (proměnná d2d4). Známe také pohlaví sledovaných jedinců. Chceme otestovat hypotézu, že vektor středních hodnot sledovaných proměnných je stejný pro muže a pro ženy.

Načteme data, vynecháme sloupec id, který k analýze nepotřebujeme, a vypočítáme vektory výběrových průměrů a výběrové varianční matice zvlášť pro muže a pro ženy.

```
digits <- read.table('DATA/d2d4.txt', header=T)
str(digits)

## 'data.frame': 87 obs. of  4 variables:
##  $ id    : int  2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 ...
##  $ sex   : Factor w/ 2 levels "f","m": 2 1 1 2 1 1 1 2 2 2 ...
##  $ body.H: int  1824 1576 1676 1711 1579 1680 1602 1810 1830 1680 ...
##  $ d2d4  : num  0.915 0.939 0.99 0.895 1.012 ...

digits <- digits[,-1]

colMeans(digits[digits$sex=='f', 2:3])

##      body.H        d2d4
## 1658.372549    0.981012

var(digits[digits$sex=='f', 2:3])

##              body.H       d2d4
## body.H 4756.7184314 0.19805179
## d2d4      0.1980518 0.00122236

colMeans(digits[digits$sex=='m', 2:3])

##       body.H         d2d4
## 1780.6388889    0.9624943

var(digits[digits$sex=='m', 2:3])

##              body.H         d2d4
## body.H 2943.4944444 0.3078064436
## d2d4      0.3078064 0.0008390637
```

Dále je potřeba ověřit předpoklady. Začneme předpokladem, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozdělení. Ve funkci mvn můžeme v argumentu subset zadat kategoriální proměnnou z našeho datového souboru, aby funkce vyhodnotila mnohorozměrnou normalitu pro každou kategorii zvlášť.

```
library(MVN)
par(mfrow=c(1,2))
mvn(digits, subset='sex', mvnTest = 'mardia', multivariatePlot = 'qq')$multivariateNormality
```



```
## $f
##              Test         Statistic           p value Result
## 1 Mardia Skewness  7.66451270866499 0.104669988849603    YES
## 2 Mardia Kurtosis 0.249022662356447 0.803343251468824    YES
## 3             MVN              <NA>              <NA>    YES
##
## $m
##              Test         Statistic           p value Result
## 1 Mardia Skewness 0.438515479278771 0.979203810115401    YES
## 2 Mardia Kurtosis -1.07661801758915 0.281650951484127    YES
## 3             MVN              <NA>              <NA>    YES
```

```
mvn(digits, subset='sex', mvnTest = 'hz')$multivariateNormality
```

```
## $f
##            Test        HZ   p value MVN
## 1 Henze-Zirkler 0.4988882 0.4530434 YES
##
## $m
##            Test        HZ   p value MVN
## 1 Henze-Zirkler 0.3483049 0.7325494 YES
```

Ženy:
Mardiův test pro šikmost:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Mardiův test pro špičatost:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Henzeův-Zirklerův test:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Muži:
Mardiův test pro šikmost:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Mardiův test pro špičatost:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Henzeův-Zirklerův test:
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Dalším předpokladem, který je nutné ověřit, je rovnost variančních matic. K tomu použijeme Boxův M test.

```
library(biotools)
boxM(digits[,2:3], grouping=digits$sex)

##
##  Box's M-test for Homogeneity of Covariance Matrices
##
## data:  digits[, 2:3]
## Chi-Sq (approx.) = 4.1121, df = 3, p-value = 0.2496
```

Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Předpoklady jsou splněny, můžeme tedy přikročit k dvouvýběrovému Hotellingově T-testu.

```
library(ICSNP)
HotellingsT2(digits[digits$sex=="f",2:3], digits[digits$sex=="m",2:3])

##
##  Hotelling's two sample T2-test
##
## data:  digits[digits$sex == "f", 2:3] and digits[digits$sex == "m", 2:3]
## T.2 = 45.553, df1 = 2, df2 = 84, p-value = 3.997e-14
## alternative hypothesis: true location difference is not equal to c(0,0)
```

Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
Závěr .....

Protože jsme na hladině významnosti 0.05 ..... hypotézu, že vektory středních hodnot mužů a žen jsou si rovny, provedeme simultánní testy. Využijeme přitom toho, že R pracuje s vektory po složkách.

```
n1 <- table(digits$sex)[1]
n2 <- table(digits$sex)[2]
n <- n1 + n2
k <- 2 #pocet promennych
mu1 <- colMeans(digits[digits$sex=="f",2:3])
mu2 <- colMeans(digits[digits$sex=="m",2:3])
var1 <- diag(cov(digits[digits$sex=="f",2:3]))
var2 <- diag(cov(digits[digits$sex=="m",2:3]))
var <- ( (n1-1)*var1 + (n2-1)*var2 )/(n-2)

F.stat <- n1*n2*(n-k-1) * (mu1-mu2)^2 /(var*n*k*(n-2))
p.hodnota <- 1-pf(F.stat, k, n-k-1)
kvantil <- qf(0.95, k, n-k-1)
tab <- round(rbind(F.stat,p.hodnota, kvantil),digits=4)
rownames(tab) <- c("F","p-hodnota", "kvantil")
tab

##            body.H   d2d4
## F         38.8725 3.3589
## p-hodnota  0.0000 0.0395
## kvantil    3.1052 3.1052
```

Tělesná výška
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
kritický obor .....
Závěr .....

Poměr délky 2. a 4. prstu
Hodnota testovací statistiky .....
p-hodnota .....
kritický obor .....
Závěr .....