

Hromadné body posloupnosti

$\kappa \in \mathbb{R}$ je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{Z})(\exists m \in \mathbb{Z}) m \geq n \wedge |a_m - \kappa| < \varepsilon$$

Příklady:

- $\{\frac{3}{4}n\}$ nemá hromadné body.
- $\{(-\frac{3}{4})^n\}$ má jediný hromadný bod 0.
- $\{(-1)^n (1 + (\frac{3}{4})^n)\}$ má dva hromadné body 1 a -1 .
- Každé nezáporné celé číslo je hromadným bodem posloupnosti $\{0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- Každé reálné číslo z intervalu $[0, 1]$ je hromadným bodem posloupnosti $\{1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots\}$.

Množina všech hromadných bodů posloupnosti je uzavřená.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená, pak existuje její hromadný bod.

Limita posloupnosti

Je-li množina hromadných bodů posloupnosti jednoprvková, nazveme tento hromadný bod *limitou posloupnosti*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha : (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{Z})(\forall n \in \mathbb{Z}) n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Pokud existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$, řekneme, že tato posloupnost je *konvergentní*.

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Existuje nejvýše jedna limita dané posloupnosti.
- Konvergentní posloupnost je ohraničená.
- Posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je *Cauchyovská*,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}) \min\{n_1, n_2\} > n_0 \Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon.$$

- Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergentní pak

- $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ pro každé číslo c ,

$\lim_{n \rightarrow \infty}$ je homogenní zobrazení množiny konvergentních posloupností do množiny čísel,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,

$\lim_{n \rightarrow \infty}$ je aditivní zobrazení množiny konvergentních posloupností do množiny čísel;

tj. $\lim_{n \rightarrow \infty}$ je lineární zobrazení množiny konvergentních posloupností do množiny čísel.

Vlastnosti limity

nezávislé na uspořádání reálných čísel

- Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ konvergentní pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

- Je-li posloupnosti $\{a_n\}$ konvergentní, pak

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n},$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pro každé $k > 0,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pro každé } q \text{ takové, že } |q| < 1.$$

Vlastnosti limity

využívající uspořádání reálných čísel

- Je-li posloupnost $\{a_n\}$ monotonní a ohraničená, pak je konvergentní.
Podrobněji:
 - Je-li $\{a_n\}$ rostoucí a ohraničená shora, pak
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \in \text{Dom } a\}$$
 - Je-li $\{a_n\}$ klesající a ohraničená zdola, pak
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \in \text{Dom } a\}$$
- Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ a pro všechny členy posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ od jistého indexu počínaje platí $a_n < b_n$, pak $\alpha \leq \beta$.
- Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a pro všechny členy posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ od jistého indexu počínaje platí $a_n \leq c_n \leq b_n$, pak
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha.$$

Nevlastní limity

Posloupnost $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ *diverguje do nekonečna*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty : (\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n > H$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ *diverguje do minus nekonečna*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty : (\forall H \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) a_n < H$$

Nevlastní limita není limita.

Vlastnosti nevlastní limity

- Existuje nejvýše jedna nevlastní limita posloupnosti.

- Divergentní posloupnost je neohraničená.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = -\infty$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, $b_n \geq \delta > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \pm\infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, $b_n \leq \delta < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \mp\infty$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$$

Reálná čísla

Množina \mathbb{R} s operacemi $+$, \cdot a s relací $<$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + y = y + x$$

$$(\exists 0)(\forall x) x + 0 = x$$

$$(\forall x)(\exists -x) x + (-x) = 0$$

$(\mathbb{R}, +)$ je abelovská grupa

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$(\exists 1 \neq 0)(\forall x) 1x = x$$

$$(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1}) x^{-1} \cdot x = 1$$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je abelovská grupa

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je pole

$$x < y \text{ a } y < z \Rightarrow x < z$$

$$x < y \text{ nebo } y < x \text{ nebo } x = y$$

lineární uspořádání

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

$$x < y \text{ a } 0 < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je uspořádané pole

$$(\forall A \subseteq \mathbb{R}) [(\exists H)(\forall x \in A) x \leq H] \Rightarrow (\exists s) s = \sup A$$

množina \mathbb{R} tvoří kontinuum

Rozšířená množina reálných čísel

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x < \infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R}) c + \infty = \infty \wedge c + (-\infty) = c - \infty = -\infty$
- $(\forall c \in \mathbb{R}) (c > 0 \Rightarrow c \cdot \infty = \infty) \wedge (c < 0 \Rightarrow c \cdot \infty = -\infty)$
- $(\forall c \in \mathbb{R}) \frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$
- $\left| \frac{1}{0} \right| = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

Neurčitě výrazy: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$

Rozšířená množina reálných čísel

Okolí bodů

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\mathcal{O}(a) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon_1 < x < a + \varepsilon_2\}, & a \in \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{R} : h < x\}, & a = \infty, \\ \{x \in \mathbb{R} : h > x\}, & a = -\infty. \end{cases}$$

Pravé okolí:

$$\mathcal{O}_+(a) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : x \leq a + \varepsilon\}, & a \in \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{R} : h > x\}, & a = -\infty. \end{cases}$$

Levé okolí:

$$\mathcal{O}_-(a) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon \leq x\}, & a \in \mathbb{R}, \\ \{x \in \mathbb{R} : h < x\}, & a = \infty. \end{cases}$$

Přitom $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, h \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$.

Rozšířená množina reálných čísel

Definice limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}^* : (\forall \mathcal{O}(\alpha)) (\exists \mathcal{O}(\infty)) (\forall n \in \mathbb{Z}) n \in \mathcal{O}(\infty) \Rightarrow a_n \in \mathcal{O}(\alpha)$$

Diference a její význam

První diference vpřed: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

$(\forall n)\Delta a_n > 0 \Rightarrow$ posloupnost je ryze rostoucí,

$(\forall n)\Delta a_n < 0 \Rightarrow$ posloupnost je ryze klesající

$(\forall n)\Delta a_n \geq 0 \Rightarrow$ posloupnost je rostoucí (neklesající)

$(\forall n)\Delta a_n \leq 0 \Rightarrow$ posloupnost je klesající (nerostoucí)

Δa_n lze chápat jako n -tý člen nějaké posloupnosti;

diferenci Δ lze chápat jako zobrazení množiny posloupností do sebe.

Rekurentní formuli lze přepsat pomocí diference:

Příklad:

$$a_{n+1} = ra_n \left(1 - \frac{r-1}{r} \frac{a_n}{K} \right)$$

$$a_{n+1} - a_n = ra_n - (r-1) \frac{a_n^2}{K} - a_n$$

$$\Delta a_n = (r-1)a_n \left(1 - \frac{a_n}{K} \right)$$