1. domácí úkol – MIN201 – jaro 2023 – odevzdat do **9.4.2023**

(i) Určete následující limitu bez použití L'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{t\to 4} \frac{t-\sqrt{3t+4}}{4-t}.$$

(ii) Určete následující limitu (jakýmkoliv způsobem):

$$\lim_{x\to\infty} x^2(\arctan x - \frac{\pi}{2}) + x.$$

(iii) Určete následující limitu (jakýmkoliv způsobem):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{3}{x^2}}.$$

(iv) Určete limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x},$$

kde $\lfloor x\rfloor$ označuje dolní celou část reálného čisla x. Nestačí limitu uhádnou, je třeba výsledek nějak dokázat (třeba přímo z definice limity).

Řešení:

(i) Po vynásobení čitatele i jmenovatele výrazem $t+\sqrt{3t+4}$ dostaneme

$$\lim_{t\to 4} \frac{t-\sqrt{3t+4}}{4-t} = \lim_{t\to 4} \frac{t^2-(3t+4)}{(4-t)(t+\sqrt{3t+4})} = -\lim_{t\to 4} \frac{t+1}{t+\sqrt{3t+4}} = -\frac{5}{8}.$$

(ii) Po úpravě použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to\infty} x^2(\arctan x - \frac{\pi}{2}) + x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\arctan x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^3}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2(1+x^2)} = 0.$$

(ii) Po úpravě

$$(\frac{x}{\sin x})^{\frac{3}{x^2}} = e^{\ln(\frac{x}{\sin x})^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\left[\frac{3}{x^2}\ln(\frac{x}{\sin x})\right]}$$

upravíme exponent použitím L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\ln(\frac{x}{\sin x})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2}}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}.$$

Následně je třeba ještě dvakrát použít L'Hospitalovo pravidlo, limita vyjde $\frac{1}{2}$, takže výsledek je $\sqrt{e}$.

(iv) Lehce se uhádne, že $\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$, což dokážeme přímo z definice. Tedy pro libovolné $\epsilon > 0$ potřebujeme najít $M \in \mathbb{R}$ takové, že $x \geq M$ implikuje $1 - \epsilon < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} < 1 + \epsilon$. Zjevně $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$; pro zvolené ϵ tedy chceme $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} > 1 - \epsilon$ pro dostatečně velké x. Jelikož $\lfloor x \rfloor = x - a$ pro $a \in [0, 1)$, chceme

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{x - a}{x} > 1 - \epsilon$$

neboli ekvivalentně $\frac{a}{\epsilon} < x$. Toto jistě platí pro $x \geq M := \frac{1}{\epsilon}$.