2. domácí úkol – MIN201 – jaro 2023 – odevzdat do **3.5.2023**

(i) Uvažme funkci $f(x) = (x+1)^3 e^{-x}$ na intervalu $I = [-4, 4]$. Určete lokální a globální extrémy této funkce pro $x \in I$.

(ii) Uvažme funkci $g(x) = e^{-5x}$, $x \in \mathbb{R}$. V každém bodě grafu této funkce uvažme tečnu ke grafu a trojúhelník určený touto tečnou a souřadnými osami. Určete bod na grafu, pro který má tento trojúhelník největší obsah v prvním kvadrantu.

Řešení:

(i) Spočteme $f'(x) = -(x+1)^2(x-2)e^{-x}$. Odtud se lehce vidí, že $x = -1$ je stacionární bod, ve kterém není extrém, a v bodě $x = 2$ je lokální maximum. Abychom určili globální extrémy, potřebujeme dále hodnoty $f(-4) = -27e^4$ a $f(4) = 125e^{-4}$. Tedy globální minimum je v bodě -4 a globální maximum je v bodě $x = 2$ (na intervalu $[2, 4]$) funkce klesá).

(ii) Tečna v bodě $[x, e^{-5x}]$ má směrový vektor $(1, -5e^{-5x})$, z čehož dopočítáme průsečíky se souřadnými osami $[x + \frac{1}{5}, 0]$ a $[0, (5x+1)e^{-5x}]$. Obsah, jehož maximum hledáme, je tedy dán funkcí

$$S(x) = (x + \frac{1}{5})(5x+1)e^{-5x} = \frac{1}{5}(5x+1)^2 e^{-5x},$$

pro kterou spočteme

$$S'(x) = -(5x+1)(5x-1)e^{-5x}.$$

Už z obrázku je vidět, že minimum této funkce je v bodě $x = -\frac{1}{5}$, maximum je tedy v bodě grafu $[\frac{1}{5}, e^{-1}]$.