3. domácí úkol – MIN201 – jaro 2023 – odevzdat do **7.5.2023**

(i) Určete interval konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-4\ln n} x^n.$$

(ii) Funkci

$$f(x) = \frac{1}{16+2x^3}$$

rozviňte do mocninné řady a se středem v počátku. Dále určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která tato řada konverguje.

(iii) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n.$$

Řešení:

(i) Podle podílového kritéria spočteme

$$\lim_{n \to infty} \frac{\frac{1}{n+1-4\ln(n+1)}}{\frac{1}{n-4\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-4\ln n}{n+1-4\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-4\frac{\ln n}{n}}{1+\frac{1}{n}-4\frac{\ln(n+1)}{n}} = 1,$$

tj. poloměr konvergence je 1. V levém krajním bodě dostanem řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-4\ln n}(-1)^n,$$

které konverguje podle Leibnizova kritéria. V pravém krajním bodě pak dostaneme divergující řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-4\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Tedy interval konvergence je $[-1, 1)$.

(ii) Buď najdeme Taylorovu řadu funkce $f(x)$ nebo si rovnou všimneme, že je to (až na konstantu) součet geometrické řady

$$f(x) = \frac{1}{16+2x^3} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})^3} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-\frac{x}{2})^3\right)^n = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n x^{3n}.$$

Jelikož $\lim_{n\ \to\infty} \sqrt[3n]{(1/8)^n} = \frac{1}{2}$, je poloměr konvergence roven 2. Dosazením krajních bodů se pak zjistí, že interval konvergence je $(-2, 2)$.

(iii) Pro $y = \frac{x}{x+1}$ se jedná o řadu $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$, která konverguje pro $-1 < y < 1$. Tedy zadaná řada konverguje pro $-1 < \frac{x}{x+1} < 1$, tj. pro $x > -\frac{1}{2}$.