

5. domácí úkol – MIN201 – jaro 2023 – odevzdat do **25.5.2023**

Na prostoru spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, e - 1]$ uvažme obvyklý skalární součin, který je pro dvě takové funkce f a g vztahem $\langle f, g \rangle = \int_0^{e-1} f(x)g(x) dx$. Dále položme

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + a \ln(x+1), \quad a \in \mathbb{R},$$

kde a je parametr.

- (i) Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ se minimalizuje velikost funkce f .
- (ii) Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou na sebe funkce $f(x)$ a $f(x) - 1$ kolmé.

Řešení:

- (i) Přímým výpočtem ověříme, že

$$\|f(x)\|^2 = \int_0^{e-1} f^2(x) dx = \int_0^{e-1} \left(\frac{1}{x+1} + a \ln(x+1) \right)^2 dx = (e-2)a^2 + a + 1 - \frac{1}{e},$$

tj. velikost je $\sqrt{(e-2)a^2 + a + 1 - \frac{1}{e}}$. Chápeme-li to jako kvadratickou funkci závisující na a , její minimum najdeme pro $a = -\frac{1}{2(e-2)}$.

- (ii) Přímý výpočet dává

$$\langle f, f+1 \rangle = \int_0^{e-1} (f^2(x) + f(x)) dx = (e-2)a^2 + a + 1 - \frac{1}{e} - (a+1) = (e-2)a^2 - \frac{1}{e}.$$

Tento výraz je nulový pro $a = \pm \frac{1}{\sqrt{e(e-2)}}$.