Vnitrosemestrální písemka – MIN201 – jaro 2023 – 19. 4. 2023

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (3 body) Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{n\cdot 12^n}(4x+4)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence a interval konvergence této řady.

2. (5 bodů) Určete průběh funkce $f(x) = (x-2)e^{-1/x}$. Tedy určete definiční obor a obor hodnot, intervaly, kde funkce roste/klesá, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost, inflexní body, asymptoty a načrtněte graf.

3. (2 body) Uvažme funkce

$$f(x) = \ln x \quad \text{a} \quad g(x) = x^2 + a$$

pro $x > 0$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

(i) Určete $x > 0$ takové, že tečna ke grafu funkce $f(x)$ prochází bodem $[0, 1]$.

(ii) Určete hodnotu parametru a takovou, že grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ se protínají v jednom bodě.

Řešení a bodování:

1. [3 body] Nejprve řadu upravíme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{n\cdot 12^n}(4x+4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{n\cdot 3^n}(x+1)^n.$$

Střed je tedy v bodě $x_0 = -1$. Dále

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \tfrac{1}{n\cdot 3^n}|} = \tfrac{1}{3},$$

poloměr konvergence je $r = 3$ a tedy řada určitě konverguje na intervalu $(-4, 2)$, [2b]. Dosazením krajních bodů dostáváme číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{n\cdot 3^n}(-4+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{n\cdot 3^n}(2+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{n} = 0.$$

Interval konvergence tedy je $(-4, 2]$, [1b].

2. [5 bodů] Platí $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chování kolem nuly je určeno limitami

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \ [0.5\text{b}].$$

Dále platí

$$f(x) = f(x) = (x-2)e^{-1/x}, \qquad f'(x) = \tfrac{x^2+x-2}{x^2}e^{-1/x}, \qquad f''(x) = \frac{5x-2}{x^4}e^{-1/x}, \ [1\text{b}].$$

Funkce roste na intervalech $(-\infty, -2]$ a $[1, \infty)$ a klesá na intervalech $[-2, 0)$ a $(0, 1]$. Lokální extrémy jsou dva – lokální maximum v bodě $x = -2$, $f(-2) = -4\sqrt{e}$, a lokální minimum v bodě $x = 1$, $f(1) = -\frac{1}{e}$, [1b]. Odtud vidíme, že $H(f) = \mathbb{R} \setminus (-4\sqrt{e}, -\frac{1}{e})$. Funkce je konkávní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \frac{2}{5})$ a konvexní na intervalu $(\frac{2}{5}, \infty)$, [1b]. Inflexní bod je $x = \frac{2}{5}$. Asymptoty jsou dvě $x = 0$ (bez směrnice) a $y = x - 3$ (se směrnicí), [1b]. Ještě je potřeba načtrnout graf, [0.5b].

Detaily počítání asymptoty se směrnicí jsou následující. Je-li asymptota tvaru $ax + b$, pak

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x}e^{-1/x} = 1.$$

Dále, po úpravě a s využitím L'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty}(x-2)e^{-1/x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{-1/x}-1) - 2e^{-1/x} = \\ &= -2 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-1/x}-1}{\frac{1}{x}} = -2 - \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x} = -3. \end{aligned}$$

3. [2 body]

(i) Tečna je přímka procházející bodem $[x, f(x)]$ se směrovým vektorem $(1, f'(x))$. Řešíme tedy rovnici

$$[x, \ln x] + s(1, \tfrac{1}{x}) = [0, 1].$$

Odtud $s = -x$ a tedy $x = e^2$, [1b].

(ii) Grafy obou funkcí musí mít společnou tečnu, tj. $f'(x) = g'(x)$. Odtud $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dále v tomto bodě musí platit $f(x) = g(x)$, tj. $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\ln 2$. Odtud se dopočítá $a = -\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$, [1b].