Zkouška 1. termín – MIN201 – jaro 2023 – 29. 5. 2023

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (8 bodů)

(i) Rozložte funkci $P(x)$ na parciální zlomky,

$$P(x) = \frac{3x+1}{x^4+25x^2}.$$

(ii) Spočtěte

$$\int P(x)dx.$$

(iii) Najděte funkci $f(x)$ takovou, že $f'(x) = P(x)$ a $f(5) = -\frac{3}{50}\ln 2$.

2. (3 body) Spočtěte intergál

$$\int_0^6 (2+5x)e^{x/3}dx.$$

3. (5 bodů) Uvažme oblast $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ohraničenou grafy funkcí

$$y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln x, \quad y = 1 - \ln x, \quad y = -2, \quad y = 1.$$

Poznamenejme, že M je složena ze dvou menších oblastí, které se protínají v jednom bodě. Popište oblast M (včetně „vrcholů“) a určete obsah této oblasti.

Jako nápovědu připomeňme, že $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$.

4. (4 body) Určete Fourierovu řadu pro periodické prodloužení funkce

$$h(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0,2), \\ 1 & x \in [2,4). \end{cases}$$

Řešení a bodování:

1. **[8 bodů]**

(i) **[4 body]** Výpočtem dostaneneme

$$\frac{3x+1}{x^4+25x^2} = \frac{3}{25x} + \frac{1}{25x^2} - \frac{3x+1}{25(x^2+25)}.$$

(ii) **[3 body]** Integrováním dostaneneme

$$\int \frac{3x+1}{x^4+25x^2}dx = \frac{3}{25}\ln|x| - \frac{1}{25x} - \frac{3}{50}\ln(x^2+25) - \frac{1}{125}\arctan\frac{x}{5} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(iii) **[1 bod]** Ounačme pravou stranu předchozího displeje jako $f(x)$. Hledáme C takové, že

$$f(5) = -\frac{1}{125} - \frac{3}{50}\ln 2 - \frac{1}{125}\frac{\pi}{4} + C = -\frac{3}{50}\ln 2.$$

Tedy $C = \frac{1}{125}(1+\frac{\pi}{4})$.

2. **[3 body]** Integrováním (metodou per partes) dostaneme

$$\int (2+5x)e^{x/3}dx = 3(2+5x)e^{x/3} - 45e^{x/3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\int_0^6 (2+5x)e^{x/3}dx = 51e^2 + 39.$$

3. **[5 bodů]** Popis oblasti M [2 body]: Horní „křivočarý trojúhelník“ M_1 má vrcholy $[1,1]$, $[e,0]$, $[e^3,1]$ a dolní „křivočarý trojúhelník“ M_2 má vrcholy $[\frac{1}{e^3},-2]$, $[e,0]$, $[e^3,1]$.

Výpočet plochy [3 body]: Obsah M_1 je

$$\int_1^e [1-(1-\ln x)]dx + \int_e^{e^3} [1-(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\ln x)]dx = 1 + \tfrac{1}{2}e^3 - \tfrac{3}{2}e.$$

Obsah M_2 je

$$\int_{e^{-3}}^e [-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\ln x + 2]dx + \int_e^{e^3} [1-\ln x + 2)]dx = e^3 + \tfrac{1}{2}e^{-3} - \tfrac{3}{2}e.$$

Obsah oblasti M je tedy $\frac{3}{2}e^3 + \frac{1}{2}e^{-3} - 3e + 1$.

4. **[4 body]** Perioda je 4, takže $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Dále funkce $h(x)$ je lichá, takže v rozvoji této funkce

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=+}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\Big)$$

máme $a_n = 0$ pro každé n. Dále

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{2}{T}\int_0^4 h(x)\sin(n\omega x)dx = \tfrac{1}{2}\left(-\int_0^2 \sin(n\tfrac{\pi}{2}x)dx + \int_2^4 sin(n\tfrac{\pi}{2}x)dx\right) = \\ &= -\tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{2}{n\pi}cos(n\tfrac{\pi}{2}x)\right]_0^2 + \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{2}{n\pi}cos(n\tfrac{\pi}{2}x)\right]_2^4 = \tfrac{1}{n\pi}\left[2\cos n\pi - \cos 0 - \cos(2n\pi)\right] = \\ &= \tfrac{2}{n\pi}[-1+(-1)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ -\frac{4}{n\pi} & n \text{ odd.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tedy

$$h(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{4}{(2k+1)\pi}\sin\big((2k+1)\tfrac{\pi}{2}x\big).$$