Zkouška 2. termín – MIN201 – jaro 2023 – 5. 6. 2023

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (8 bodů)

(i) Rozložte funkci $P(x)$ na parciální zlomky,

$$P(x) = \frac{40x+80}{(x^2+6x-16)(x^2+6x+16)}.$$

(ii) Spočtěte

$$\int P(x)dx.$$

(iii) Najděte funkci $f(x)$ takovou, že $f'(x) = P(x)$ a $f(0) = 0$.

2. (4 body) Spočtěte intergál

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2+7\sin^3(x)}{\cos^2(x)}dx.$$

3. (4 body) Uvažme oblast $M \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, y \leq x^2, y \leq 2-x\}.$$

Popište oblast M (včetně „vrcholů“) a určete obsah této oblasti.

4. (4 body) Na prostoru spojitých reálných funkcí na intervalu $[0,1]$ uvažme obvyklý skalární součin, který je pro dvě takové funkce f a g daný vztahem $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Najděte nenulový polynom

$$h(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

takový, že

$$\langle h, 1\rangle = 0 \quad \text{a} \quad \langle h, x\rangle = 0$$

a navíc $h(0) = 1$.

Řešení a bodování:

1. [8 bodů]

(i) [**4 body**] Výpočtem dostaneneme

$$\frac{40x+80}{(x^2+6x-16)(x^2+6x+16)} = -\frac{5(x+2)}{4(x^2+6x+16)} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{3}{4(x+8)}.$$

(ii) [**3 body**] Integrováním dostaneneme

$$\int \frac{40x+80}{(x^2+6x-16)(x^2+6x+16)}dx = \tfrac{1}{2}\ln|x-2|+\tfrac{3}{4}\ln|x+8|-\tfrac{5}{8}\ln(x^2+6x+16)+\tfrac{5}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{x+3}{\sqrt{7}}+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

(iii) [**1 bod**] Označme pravou stranu předchozího displeje jako $f(x)$. Hledáme C takové, že

$$f(0) = \frac{1}{2}\ln 2 + \tfrac{9}{4}\ln 2 - \tfrac{5}{2}\ln 2 + \tfrac{5}{4\sqrt{7}}\arctan\tfrac{3}{\sqrt{7}} + C = 0.$$

Tedy $C = -\frac{5}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{3}{\sqrt{7}} - \frac{1}{4}\ln 2$.

2. [**4 body**] Rozdělením na součet dvou integrálů a substitucí $u=\cos(x)$ u druhého integrálu dostaneme

$$\int \frac{2+7\sin^3(x)}{\cos^2(x)}dx = \int\left(\frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{7\sin^3(x)}{\cos^2(x)}\right)dx = 2\tan(x) + 7\cos(x) + \frac{7}{\cos(x)} + C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Tedy

$$\int \frac{2+7\sin^3(x)}{\cos^2(x)}dx = \frac{21}{\sqrt{2}} - 12.$$

3. [**4 body**] Popis oblasti M [1.5 bodu]: jedná se o „křivočarý trojúhelník“ s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$ a $[1,1]$.
Výpočet plochy [2.5 bodu]: Obsah M je integrál

$$\int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2-x)dx = \frac{5}{6}.$$

4. [**4 body**] Spočteme

$$\langle h,1\rangle = \int_0^1 (ax^2+bx+c)dx = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{2}b + c = 0$$

a

$$\langle h,x\rangle = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx)dx = \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{3}b + \tfrac{1}{2}c = 0.$$

Odtud $h(x) = a(x^2 - x + \frac{1}{6})$. Podmínka $h(0)=1$ znamená, že $a=6$.