Vnitrosemestrální písemka – MIN201 – jaro 2021 – 29. 4. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (2.5 bodu)

(i) Ukažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá v bodě $x = 0$.

(ii) Spočítejte první derivaci $f'(x)$ ve všech bodech a rozhodněte, zda je $f'(x)$ spojitá v bodě $x = 0$.

(iii) Rozhodněte, zda existuje druhá derivace $f''(0)$.

2. (5.5 bodu) Určete průběh funkce $f(x) = \frac{(x+1)^4}{x^3}$. (Tedy určete definiční obor, intervaly, kde funkce roste/klesá, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost, inflexní body, asymptoty a načrtněte graf.)

3. (2 body) Uvažme graf funkce $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in [0, \infty)$. Určete souřadnice bodu A na grafu funkce $f(x)$, který je nejblíž bodu bodu P, kde

(i) $P = [\frac{1}{4}, 0]$,

(ii) $P = [1, 0]$.

Řešení a bodování:

1. [2.5 bodu]

(i) Platí $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$, tj. funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x = 0$.

(ii) Derivaci v bodě $x = 0$ je třeba spočíst přímo z definice,

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin\frac{1}{t} = 0.$$

Výsledek tedy je

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

(iii) Jelikož $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ neexistuje, není funkce $f'(x)$ v spojitá v bodě $x = 0$ a tedy $f''(0)$ neexistuje.

2. [5.5 bodu] Platí

$$f(x) = \frac{(x+1)^4}{x^3}, \qquad f'(x) = \frac{(x+1)^3(x-3)}{x^4}, \qquad f''(x) = \frac{12(x+1)^2}{x^5}.$$

Funkce roste na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[3, \infty)$ a klesá na intervalech $[-1, 0)$ a $(0, 3]$. Lokální extrémy jsou dva – lokální maximum v bodě $x = -1$ a lokální minimum v bodě $x = 3$. Funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$ a konvexní na intervalu $(0, \infty)$, inflexní body funkce nemá. Asymptoty jsou $x = 0$ a $y = x + 4$.

3. [2 body] Pro bod $P = [a, 0]$ hledáme jeho vzdálenost od bodu $A = [x, \sqrt{x}]$, tj. extrémy funkce $f(x) = (x-a)^2 + (\sqrt{x})^2 = (x-a)^2 + x$ pro $x \geq 0$. Podmínka $f'(x) = 2(x-a) + 1 = 0$ znamená $x = -\frac{1}{2} + a$, což leží v intervalu $[0, \infty]$ pro $a \geq \frac{1}{2}$. Další kandidát na extrém je hraniční bod $x = 0$.

Pro $a = \frac{1}{4}$ je $-\frac{1}{2} + a$ mimo interval $[0, \infty]$ a tedy extrém nutně nastane v hraničním bodě $A = [0, 0]$. Pro $a = 1$ je $-\frac{1}{2} + a = \frac{1}{2}$ v intervalu $[0, \infty]$ a jelikož $f''(1) > 0$, je hledané minimum skutečně v bodě $A = [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.