Zkouška 1. termín – MIN201 – jaro 2021 – 17. 6. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (4 body) Rozložte následující funkci na parciální zlomky:

$$P(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 20}{x^4 - 16}.$$

Pro rozklad jmenovatele využijte vzorec pro druhou mocninu dvojčlenu $a^2 - b^2$.

2. (4 body) Vypočtěte uvedené integrály (použijte výpočet z Příkladu 1).

$$\int \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 20}{x^4 - 16} \right) dx \quad \text{a} \quad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} dx.$$

3. (8 bodů) Mějme funkce $f(x) = x^{3/2}$ a $g(x) = 2x$ a uvažme omezenou oblast S ohraničenou grafy těchto funkcí. Popište oblast S (včetně „vrcholů“) a určete obsah a obvod oblasti S.

4. (4 body) Určete Fourierovu řadu pro periodické prodloužení funkce $h(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Řešení a bodování:

1. [4 body] Výpočtem dostaneneme

$$\frac{2x^3+7x^2+20}{x^4-16} = \frac{x+1}{x^2+4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2}.$$

2. [4 body] Výpočtem dostaneneme

$$\int \Big(\frac{x+1}{x^2+4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2}\Big)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan(x/2) - \ln|x+2| + 2\ln|x-2| + C,$$

pro $C \in \mathbb{R}$ a

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} dx = \frac{3}{8}.$$

3. [8 bodů] Oblast S je shora ohraničena grafem $g(x) = 2x$ a zdola grafem $f(x) = x^{3/2}$, pro $x \in [0,4]$; „vrcholy“ jsou $[0,0]$ a $[4,8]$. Obsah je

$$S = \int_0^4 (2x - x^{3/2})\, dx = \frac{16}{5}.$$

Délka „horní“ úsečky je $\sqrt{4^2+8^2} = 4\sqrt{5}$, délka „dolního“ oblouku je

$$\int_0^4 \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\, dx = \tfrac{3}{2}\int_0^4 \sqrt{\tfrac{4}{9}+x}\, dx = [(\tfrac{4}{9}+x)^{3/2}]_0^4 = (4+\tfrac{4}{9})^{3/2} - (\tfrac{4}{9})^{3/2} = \tfrac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

Obvod tedy je $4\sqrt{5} + \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

4. [4 body] Funkce $h(x)$ je sudá, takže v rozvoji této funkce

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=+}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$$

máme $b_n = 0$ pro každé n. Dále

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \tfrac{2}{3}\pi^2$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\, dx = \\ &= \tfrac{2}{\pi}\big[\tfrac{1}{n^2}x^2\sin(n\pi) + \tfrac{2}{n^2}\pi\cos(n\pi) - \tfrac{1}{n^3}\sin(n\pi)\big] = \tfrac{2}{\pi}\tfrac{2}{n^2}\pi\cos(n\pi) = \tfrac{4}{n^2}(-1)^n \end{aligned}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$. Tedy výsledek je

$$h(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$