2. cvičení z MIN401 – Bezoutova a Eulerova věta

Příklad 1: [10.10]

(i) Dokažte, že jsou-li čísla $m, n \in \mathbb{N}$ nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla
$$m^2 + mn + n^2 \quad \text{a} \quad m^2 - mn + n^2.$$

(ii) Dokažte, že jsou-li lichá čísla $m, n \in \mathbb{N}$ nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla
$$m + 2n \quad \text{a} \quad m^2 + 4n^2.$$

Příklad 2: Jaké jsou poslední dvě cifry čísel: 4^{81}, 7^{30}, 3^{59}?

Příklad 3: Najděte největšího společného dělitele čísel

(a) 227, 133,

(b) 3441, 2665.

Příklad 4: Nalezněte celá čísla x a y tak, aby $883x + 487y = d$ byl největší společný dělitel čísel 883 a 487. Spočtěte x a y i pro dvojice čísel z předchozího příkladu.

Příklad 5: [10.4 a 10.5] Určete největší společný dělitel čísel $a, b \in \mathbb{Z}$ a určete příslušné koeficienty v Bezoutově rovnosti:

(i) $a = 10175$ a $b = 2277$,

(ii) $a = 2^{49} - 1$ a $b = 2^{35} - 1$.

Příklad 6: [10.15 a 10.16]

(i) Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{Z}$ splňují $a \equiv b \pmod{m^n}$. Ukažte, že pak $a^m \equiv b^m \pmod{m^{n+1}}$

(ii) Ukažte, že lichá čísla a splňují $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

(iii) Ukažte, že čísla a nedělitelná třemi splňují $a^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$.

Příklad 7: [10.19, 10.20, 10.21]

(i) Určete $\varphi(72)$.

(ii) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varphi(4n + 2) = \varphi(2n + 1)$.

(iii) Určete všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $\varphi(n)$ je liché.

(iv) Určete všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $\varphi(n) = 30$.

(v) Určete všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

Příklad 8: [10.24, 10.26, 10.28, 10.29]

(i) Určete poslední dvojčíslí čísla 7^{2013}.

(ii) Určete zbytek po dělení čísla $2^{50} + 3^{50} + 4^{50}$ číslem 17.

(iii) Určete poslední číslici čísla $7^{9^{7^{5^{3}}}}$.

(iv) Určete poslední číslici čísla $14^{14^{14}}$.