9. cvičení z MIN401 – Polynomy a okruhy

Příklad 1: [11.79]

(i) Eisensteinovo kritérium ireducibility nad $\mathbb{Z}$ (tedy i nad $\mathbb{Q}$).

(ii) Určete polynom s racionálními koeficienty co nejmenšího stupně, jehož kořenem je číslo $\sqrt[2007]{2}$.

Příklad 2: [11.82, 11.83]

(i) Pro liché prvočíslo p určete v $\mathbb{Z}_p$ všechny kořeny polynomu

$$f(x) = x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x + 2.$$

(ii) Rozložte polynom $g(x) = x^2 + x + 1$ v $\mathbb{Z}_5[x]$ a $\mathbb{Z}_7[x]$.

Příklad 3: [11.84, 11.85]

(i) Rozložte polynom $f = x^6 - x^4 - 5x^2 - 3$ v $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$ a $\mathbb{Z}_7[x]$ víte-li o něm, že má vícenásobný kořen.

(ii) Rozložte polynom $p = x^6 + x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 2$ v $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$ a $\mathbb{Z}_7[x]$ víte-li o něm, že má vícenásobný kořen i.

(iii) Řešte soustavu $p = q = 0$ nad $\mathbb{C}$, kde $q = x^2y^2 + y^2 + xy + x^2y + 2y + 1$.

Příklad 4: [11.65] Rozhodněte, zda množina R s operacemi $\oplus$ a $\odot$ tvoří okruh, komutativní okruh, obor integrity nebo těleso.

(i) $R = \mathbb{Z}$, $a \oplus b = a + b + 3$, $a \odot b = -3$.

(ii) $R = \mathbb{Z}$, $a \oplus b = a + b - 3$, $a \odot b = a \cdot b - 1$.

(iii) $R = \mathbb{Z}$, $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b - a \cdot b$.

(iv) $R = \mathbb{Q}$, $a \oplus b = a + b$, $a \odot b = b$.

(v) $R = \mathbb{Q}$, $a \oplus b = a + b + 1$, $a \odot b = a + b + ab$.

(vi) $R = \mathbb{Q}$, $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b + ab$.

Příklad 5: [11.66] Dokažte, že podmožina komplexních čísel $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$ tvoří obor integrity. Jedná se o těleso?

Příklad 6: [11.67] V okruhu matic $Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ uvažme podokruh matic tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že tento podokruh je izomorfní s tělesem $\mathbb{C}$.

Příklad 7: [11.68] Ukažte, že identita je jediný automorfismu tělesa reálných čísel.