10. cvičení z MIN401 – Uspořádané množiny a grupy

Příklad 1: Nechť X je množina. Dokažte, že zobrazení $f\colon (\mathcal{P}(X), \subseteq) \to (\mathcal{P}(X), \supseteq)$ dané předpisem $f(A) = X - A$ je izomorfismus uspořádaných množin.

Příklad 2: Nechť svaz G je řetězec. Ukažte, že svaz všech ideálů svazu G je také řetězec.

Příklad 3: [11.1] Rozhodněte o následujících množinách a operacích, jakou algebraickou strukturu tvoří (grupoid, monoid, pologrupa, grupa):

(i) podmnožiny množiny přirozených čísel s operací sjednocení,

(ii) množina $\mathbb{N}$ spolu s binární operací největší společný dělitel,

(iii) množina $\mathbb{N}$ spolu s binární operací nejmenší společný násobek,

(iv) množina reálných invertibilních matic 2x2 spolu s operací sčítání matic,

(v) množina reálných matic 2x2 spolu s operací násobení matic,

(vi) množina reálných matic 2x2 spolu s operací odčítán ímatic,

(vii) množina invertibilních matic 2x2 nad $\mathbb{Z}_2$ spolu s operací násobení matic,

(viii) množina $\mathbb{Z}_6$ spolu s operací násobení (modulo 6),

(ix) množina $\mathbb{Z}_7$ spolu s operací násobení (modulo 7).

Příklad 4: [11.8] Na množině $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ definujeme operaci $\odot$ jako

$$(x, y) \odot (u, v) = (xu, xv + y).$$

Popište, o jakou algebraickou strukturu se jedná.

Příklad 5: [2.19] Rozložte následující permutaci v $\mathbb{S}_9$ na součin transpozic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6: [11.10] Určete znaménko následujících permutací v $\mathbb{S}_{3n}$ a $\mathbb{S}_{2n}$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7: [11.13] Mějme permutaci $\sigma \in \mathbb{S}_7$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

V grupě $(\mathbb{S}_7, \circ)$ určete řád σ, inverzi k σ, σ^{2013} a ukažte, že σ nekomutuje s transpozicí $\tau = (2, 3)$.

Příklad 8: [11.16,11.17] Dokažte, že neexistuje čtyřprvková ani pětiprvková nekomutativní grupa.