1. domácí úloha z MIN401, jaro 2022

Zadání. Nechť $n \geq k \geq 2$ jsou přirozená čísla. S n-úhelníkem $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}$, jehož vrcholy jsou obarveny žlutě nebo modře, hrajeme následující hru. Jedním tahem je povoleno změnit barvu u k po sobě jdoucích vrcholů. Nechť na začátku hry je bod A_0 žlutý a ostatní jsou modré. Pro které vrcholy A_d lze po konečném počtu tahů dosáhnout toho, že A_d je žlutý a ostatní vrcholy jsou modré? Svou odpověď zdůvodněte.

Výsledek.

(1) Je-li $(n, k) > 2$ nebo $(n, k) = 2$ a $k \equiv 0 \mod 4$ lze obarvit vrchol A_d žlutě a ostatní modře, právě když d je násobkem čísla (n, k) modulo n.

(2) Je-li $(n, k) = 1$ nebo $(n, k) = 2$ a $k \equiv 2 \mod 4$ lze pro všechna d obarvit vrchol A_d žlutě a ostatní modře.

Důkaz. Prvně ukážeme, že výše popsaná obarvení lze uskutečnit.

1. V libovolném obarvení lze změnit barvu nejprve u vrcholů $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ a potom u vrcholů $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Těmito dvěma tahy dojde ke změně barvy u vrcholů A_0 a A_k. Tento postup lze opakovat pro počáteční bod A_k, potom A_{2k} atd. Proto z původního obarvení A_0 žlutý, ostatní modré dostaneme obarvení A_d žlutý, ostatní modré pro všechna d, která jsou násobky čísla k modulo n. Platí

$$\{lk \mod n;\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \left\{ j(n, k) \mod n; j = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{(n, k)} - 1 \right\}.$$

2. Ukážeme, že je-li $(n, k) = 2$, lze změnit obarvení čtyř bodů za sebou. Nechť jsou na začátku všechny body modré. Změníme obarvení prvně u $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ a pak u $A_2, A_3, \ldots, A_{k+1}$. Nyní jsou A_0, A_1, A_k, A_{k+1} žluté a ostatní modré. Protože $(n, k) = 2$, můžeme změnit barvy dvou bodů, jejich číselné značení se liší o sudé číslo. Toto aplikujeme na body A_2 a A_k, A_3 a A_{k+1}. Tímto postupem dosáhneme toho, že budou žluté body A_0, A_1, A_2, A_3 a ostatní modré. Změnili jsme barvu čtyř po sobě jdoucích bodů.

3. Nechť $(n, k) = 2$ a $k = 4l + 2$. Uvažujme výchozí postavení vrchol A_0 žlutý, ostatní modré. Po čtveřicích změníme obarvení $A_2, A_3, \ldots, A_{k-2}, A_{k-1}$ na žluté. Těchto bodů je totiž $k - 2 = 4l$. Nyní stačí změnit obarvení k bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$. Tím dosáhneme situace, kdy je vrchol A_1 žlutý a ostatní modré. Je jasné, že tímto postupem můžeme obarvit každý vrchol A_d žlutě a ostatní modře.

Nyní ukážeme, že jiná obarvení uskutečnit nelze.

4. Nechť $(n, k) > 2$. Pro každé i, $0 \leq i \leq (n, k) - 1$ definujeme podmnožinu vrcholů n-úhelníka takto:

$$M_i = \{A_d, d \equiv i \mod (n, k)\}.$$

Tyto množiny jsou aspoň tři a jejich disjunktní sjednocení je množina všech vrcholů. Množina M_0 má na začátku právě jeden žlutý vrchol, a to A_0. Ostatní množiny mají pouze modré body. Při každém tahu se v každé množině změní obarvení právě $k/(n, k)$ bodů. Tedy pro $0 < d < (n, k)$ se není možné dostat do situace, že M_d má právě jeden vrchol, a to A_d žlutý, zatímco další množiny M_i pro $i \neq 0$ mají všechny vrcholy modré.

5. Konečně pro $(n, k) = 2$ a $k = 4l$, máme pouze dvě množiny M_0 a M_1. Při každém tahu změníme obarvení sudého počtu $2l$ vrcholů v každé z nich. Tedy není možné dosáhnout stavu, aby M_1 měla právě jeden žlutý vrchol. □