

2. domácí úloha z MIN401, jaro 2022

Zadání. Necht' $S(n)$ značí součet cifer zápisu přirozeného čísla n v desítkové soustavě. Spočtete $S(S(S(5^{2007})))$.

Výsledek. Platí $S(S(S(5^{2007}))) = 8$.

Důkaz. Zřejmě platí $5^{2007} < 10^{2007}$, tedy $S(5^{2007}) \leq 9 \cdot 2007 = 18063$. Z toho plyne $S(S(5^{2007})) \leq 9 \cdot 4 = 36$, a konečně dostaneme $S(S(S(5^{2007}))) \leq 2 + 9 = 11$.

Víme, že pro všechna přirozená čísla n platí $S(n) \equiv n \pmod{9}$. Navíc platí $\varphi(9) = 9 - 3 = 6$. Tedy

$$S(S(S(5^{2007}))) \equiv 5^{2007} \equiv 5^{334 \cdot 6 + 3} \equiv 5^3 \equiv 125 \equiv 8 \pmod{9}.$$

Takže $S(S(S(5^{2007})))$ je číslo menší nebo rovno 11, které je kongruentní 8 modulo 9. Takové přirozené číslo existuje jediné, a to 8. \square