Podrobnější hint k 3. domácí úloze z MIN401, jaro 2022

Ukažte, že předpis $f(x) := \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$ definuje zobrazení $f\colon \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} \to \mathcal{J}$, které je izomorfismem uspořádaných množin. Lze postupovat například následovně:

- Ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ je $f(x)$ ideál, který se nerovná množině $\{c \in \mathbb{Q} \mid c \leq b\}$ pro žádné $b \in \mathbb{Q}$. Tímto ukažete, že f je opravdu zobrazení.
- Ukažte, že pokud $x \neq y$ pro $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, potom $f(x) \neq f(y)$. Tímto ukážete injektivitu zobrazení f.
- Ukažte, že pokud I je ideál, který není tvaru $\{c \in \mathbb{Q} \mid c \leq b\}$ pro žádné $b \in \mathbb{Q}$, potom existuje $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ takové, že $f(x) = I$. Tímto ukážete surjektivitu zobrazení f. Jako hledané x zvolte supremum množiny I. Odůvodněte existenci tohoto suprema, a poté ukažte inkluze $f(x) \subseteq I$ a $I \subseteq f(x)$.
- Ukažte, že pokud $x \leq y$ pro $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, tak potom $f(x) \subseteq f(y)$. Tímto ukážete, že zobrazení f zachovává uspořádání.
- Ukažte, že pokud $y < x$ pro $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, tak potom $f(x) \not\subseteq f(y)$. Tímto ukážete, že inverze zobrazení f zachovává uspořádání.