5. domácí úloha z MIN401, jaro 2022

Definice. Pokud G je grupa, tak potom $\mathrm{Aut}(G)$ značí grupu všech izomorfismů $G \to G$. Binární operace na grupě $\mathrm{Aut}(G)$ je skládání zobrazení.

Zadání. Nechť $(H, \cdot)$, $(K, *)$ jsou grupy a $\varphi\colon K \to \mathrm{Aut}(H)$ je homomorfismus grup. Definujme binární operaci $\star$ na množině $H \times K$ následovně

$$(h_1, k_1) \star (h_2, k_2) = (h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2), k_1 * k_2).$$

Ověřte, že $(H \times K, \star)$ je grupa.

Řešení.

- $\star$ je operace

  Potřebujeme ověřit, že množina $H \times K$ je uzavřená na $\star$. Nechť $(h_1, k_1), (h_2, k_2)$ jsou libovolné prvky z $H \times K$. $\varphi(k_1)$ je automorfismus grupy H - každý prvek H zobrazuje opět do H, a tudíž $\varphi(k_1)(h_2) \in H$. Z uzavřenosti H na $\cdot$ a K na $*$ je $(h_1, k_1) \star (h_2, k_2) = (h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2), k_1 * k_2) \in H \times K$.
- $\star$ je asociativní

$$\begin{aligned}
&((h_1, k_1) \star (h_2, k_2)) \star (h_3, k_3)\\
=&(h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2), k_1 * k_2) \star (h_3, k_3)\\
=&((h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2)) \cdot (\varphi(k_1 * k_2)(h_3)), (k_1 * k_2) * k_3)\\
=&(h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2) \cdot (\varphi(k_1) \circ \varphi(k_2))(h_3)), k_1 * k_2 * k_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(h_1, k_1) \star ((h_2, k_2) \star (h_3, k_3))\\
=&(h_1, k_1) \star (h_2 \cdot \varphi(k_2)(h_3), k_2 * k_3)\\
=&(h_1 \cdot (\varphi(k_1)(h_2 \cdot \varphi(k_2)(h_3))), k_1 \star (k_2 * k_3))\\
=&(h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2) \cdot \varphi(k_1)(\varphi(k_2)(h_3)), k_1 * k_2 * k_3)\\
=&(h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2) \cdot (\varphi(k_1) \circ \varphi(k_2))(h_3), k_1 * k_2 * k_3)
\end{aligned}$$

- $H \times K$ obsahuje neutrální prvek vzhledem k $\star$

  Hledaným prvkem je (e_H, e_K). Poznamenejme, že $\varphi(e_K)$ je neutrální prvek grupy $\mathrm{Aut}(H)$ - tj. identická funkce na H a že pro libovolné $k \in K$ je $\varphi(k)(e_H) = e_H$, jelikož $\varphi(k)$ je homomorfismus.

$$(e_H, e_K) \star (h, k) = (e_H \cdot \varphi(e_K)(h), e_k * k) = (e_H \cdot \mathrm{id}_H(h), e_k * k) = (h, k)$$
$$(h, k) \star (e_H, e_K) = (h \cdot \varphi(k)(e_H), k * e_K) = (h \cdot e_H, k * e_K) = (h, k)$$

- $H \times K$ obsahuje ke každému svému prvku inverzní prvek

  Inverzní prvek k (h, k) je $(\varphi(k)^{-1}(h^{-1}), k^{-1})$. $\varphi(k)^{-1}$ je inverzní zobrazení k $\varphi(k)$ - jistě existuje, neboť $\varphi(k)$ je automorfismus a tedy i bijekce. Ověříme, že tento prvek je skutečně inverzní.

$$(h, k)\star(\varphi(k)^{-1}(h^{-1}), k^{-1}) = (h\cdot\varphi(k)(\varphi(k)^{-1}(h^{-1})), k*k^{-1}) = (h\cdot h^{-1}, k*k^{-1}) = (e_H, e_K)$$

$\square$