

1. DOMÁCÍ ÚLOHA Z MIN401, JARO 2023

ZADÁNO: 28. 2. 2023

ODEVZDEJTE DO: 28. 3. 2023

Definice. Výškou Euclidova algoritmu $h(a)$ čísla $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ označme největší potřebný počet kroků Euclidova algoritmu pro výpočet $\text{NSD}(a, b)$ ze všech čísel $b \in \mathbb{N}$, $b < a$.

Poznámka. Např. $h(4) = h(3) = 2$. Pouze pro $a = 2$ platí $h(a) = 1$.

Definice. Fibonacciho posloupnosti $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ je posloupnost zadaná rekurentně:

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{pro } n \geq 2.$$

Zadání. Dokažte, že pro libovolné číslo f_n , $n \geq 3$ z Fibonacciho posloupnosti platí:

$$h(f_n) = n - 2.$$

Hint: Začněte důkazem, že Euclidův algoritmus pro $\text{NSD}(f_n, f_{n-1})$ má $n - 2$ kroků. (A taky si uvědomte, že tento samotný fakt ještě nestačí. ☺)

Další hint: Důkaz z předešlého hintu nám dokazuje, že $h(f_n) \geq n - 2$, takže je potřeba ještě ukázat $h(f_n) \leq n - 2$. Toho lze určitě dosáhnout vícero způsoby. Já bych rovnou dokázal, že pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ taková, že $f_n \geq a > b$, má Euclidův algoritmus pro $\text{NSD}(a, b)$ nanejvýš $n - 2$ kroků. (Využijte se silná indukce.)