5. domácí úloha z MIN401, jaro 2023

Zadáno: 3. 5. 2023 Odevzdejte do: ~~19. 5. 2023~~ 20. 6. 2023

Definice. *Normální podgrupa* H grupy G je taková podgrupa (tj. je uzavřená na násobení, má neutrální a inverzní prvky) grupy G, pro kterou platí pro libovolné prvky $h \in H$ a $g \in G$: $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$.

Příklad. Grupa $\mathbb{A}_n$ všech sudých permutací na n-prvkové množině je normální podgrupou grupy $\mathbb{S}_n$. Protože vezmeme-li libovolné $h \in \mathbb{A}_n$ a $g \in \mathbb{S}_n$, pak $g \circ h \circ g^{-1}$ lze vyjádřit složením postupně „lichého + sudého + lichého“ nebo „sudého + sudého + sudého“ počtu transpozic, v obou případech máme dohromady sudý počet transpozic, tedy prvek náleží $\mathbb{A}_n$.

Zadání. *U následujících případů popište prvky podgrupy*[1] *H grupy G a určete, zda je zda je H* normální *podgrupou grupy G. Pokud ano, určete pravé třídy rozkladu a jak vypadá operace skládání $\circ$ v grupě G/H.*

1. $H = \langle (12), (13) \rangle$, $G = \mathbb{S}_4$;
2. $H = \langle (12) \circ (34), (13) \circ (24) \rangle$, $G = \mathbb{A}_4$.

Hint: *Podmínku $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ stačí zkontrolovat pro g z generátorů G a h z generátorů H. Jak víme, $\mathbb{S}_4$ je generovaná transpozicemi a $\mathbb{A}_4$ je generovaná trojcykly.*

[1] ostré závorky značí, že podgrupa je prvky uvnitř závorky generovaná