Písemná část zkoušky z MIN401 - 2. termín, jaro 2023

Jméno: Datum: 22. 6. 2023

UČO:

Příklad 1 (3b)**.** Polynom $x^5 + x^4 + 2x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ rozložte na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Z}_5$.

Příklad 2 (3b)**.** Nad $\mathbb{Z}$ nalezněte největšího společného dělitele polynomů

$$f = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 2 \qquad \text{a} \qquad g = x^4 + x^3 + x^2 + 2.$$

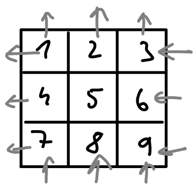
Příklad 3 (3,5b)**.** Uvažme hlavolam, který se skládá z kamenů poskládaných do mřížky 3×3 označených čísly 1 až 9. Povolené tahy jsou posouvání jednotlivých řádků doleva (přičemž krajní kámen, který by vypadl, přesuneme na konec řádku) a posouvání jednotlivých sloupců nahoru (přičemž krajní kámen přesuneme na konec sloupce). Přirozeným způsobem ztotožněme jednotlivé pozice hlavolamu s prvky $\mathbb{S}_9$. Základní pozice s povolenými tahy je naznačena na obrázku nalevo a odpovídá prvku $\mathrm{id} \in \mathbb{S}_9$.

(i) Popište pozici na obrázku napravo jako prvek $\sigma \in \mathbb{S}_9$

(ii) Rozložte jej na součin nezávislých cyklů.

(iii) Spočítejte σ^{12}.

(iv) Rozhodněte, zda je možné této pozice dosáhnout ze základní pozice používáním povolených tahů.



2	3	5
1	4	9
8	6	7

Příklad 4 (3b)**.** Pro následující dva předpisy rozhodněte, zda se jedná o zobrazení, homomorfismus, zda je injektivní a určete jádro a obraz.

(i) $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$, $\varphi([a]_6, [b]_4) = [4a + 2b]_8$

(ii) $\psi\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{C}^*$, $\psi([a]_6) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^a$

Příklad 5 (1,5b)**.** Uvažme grupu $G = Gl(2, \mathbb{R})$ všech matic 2×2 nad $\mathbb{R}$ s nenulovým determinantem. Dokažte, že množina matic

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

je podgrupou grupy G. (Nejprve zdůvodněte, proč je podmnožinou.)

Příklad 6 (6b)**.** Uvažme lineární $(7,3)$-kód generovaný polynomem $1 + x + x^3 + x^4$.

(i) Určete generující matici a matici kontroly.

(ii) Zakódujte zprávu 101.

(iii) Za předpokladu nejmenšího množství chyb, dekódujte kód 0101111.

(iv) Je možné za předpokladu jedné chyby jednoznačně dekódovat kód 1110110?

Všechna svá tvrzení odůvodněte a výpočty opatřete komentářem tak, aby byl jasný váš postup. Nesrozumitelný postup a neodůvodněná tvrzení se hodnotí počtem 0*b*. Nejsou povoleny žádné studijní materiály ani elektronická zařízení. Na písemnou část máte 120 minut.