Nekonečné řady

Jak poznat, že konvergují?

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.04.2023

Kritéria konvergence

Věta (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kritéria konvergence

Věta (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta (Integrální kritérium)

Nechť funkce f *je kladná a klesající na intervalu* $[1,\infty)$. *A nechť* $a_n = f(n)$. *Pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje integrál* $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $a_n \leq b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Potom platí: konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; *diverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *diverguje i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $a_n \leq b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Potom platí: konverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*; diverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *diverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\,.$$

Je-li $L < \infty$ *a konverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li $L > 0$ *a diverguje-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *pak diverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta (Limitní podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, je-li* $q > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (Limitní podílové kritérium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, je-li* $q > 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (Limitní odmocninové kritérium)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \textit{kde} \quad q \in \mathbb{R}^{\star}.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a je-li* $q > 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Alternují řady aneb když nutná je i dostatečná

Definice

Nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Alternují řady aneb když nutná je i dostatečná

Definice

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Leibnitzovo kritérium)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Absolutní konvergence

Věta

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Absolutní konvergence

Věta

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně.*

Kritéria konvergence

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Kritéria konvergence

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^\star$, *pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Kritéria konvergence

Věta

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$*, pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta

Existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^\star$*, pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Věta

Existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \mathbb{R}^\star$*, pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Přerovnání řad

Definice

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Přerovnání řad

Definice

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také každá řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vzniklá přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} .$$

Hodně překvapivý výsledek

Věta (Riemann)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně a nechť* $s \in \mathbb{R}$ *je libovolné.*

Pak existuje takové přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$*, takové přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ *určitě diverguje a takové přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}$ *osciluje.*