Fourierovy řady

Lehký úvod, zavedení a rozumné příklady

Petr Liška

Masarykova univerzita

24.4.2023

Pro připomenutí

Na množine $P = C[a,b]$ definujeme *skalární součin* funkcí f a g

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Řekneme, že funkce f a g jsou *ortogonální* na $[a,b]$, jestliže

$$\langle f,\, g\rangle = 0.$$

Normou funkce (vektoru) pak rozumíme

$$||f|| = \sqrt{\langle f,\, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Řekneme, že funkce f je *normovaná*, jestliže $||f|| = 1$. Pokud $||f|| \neq 0$, pak $g = \frac{f}{||f||}$ je normovaná.

Definice

Řekneme, že konečný nebo spočetný systém funkcí $\varphi_n \in C[a,b]$ je *ortogonální*, jestliže

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \qquad \text{pro} \quad i \neq j.$$

Jestliže navíc $||\varphi_i|| = 1$ pro $\forall i$, pak φ_n je *ortonormální.*

Věta

Systém funkcí

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\}$$

je ortogonální na $[-\pi, \pi]$.

Příslušná ortornormální posloupnost funkcí je

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Fourierova řada funkce

Definice

Buď $\{\varphi_n\}$ ortogonální posloupnost funkcí na intervalu $[a, b]$, f integrovatelná funkce na $[a, b]$. Pak čísla

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{||\varphi_n||^2}$$

nazýváme *Fourierovy koeficienty funkce f* vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n\}$ a řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

kde c_n jsou Fourierovy koeficienty, *Fourierovou řadou funkce f* vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{\varphi_n\}$.

Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$

Věta

Fourierova řada libovolné integrovatelné funkce f na intervalu $[-\pi, \pi]$ má vzhledem k systému $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$ tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde a_n, b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f, pro něž platí

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \,, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Důsledek

Buď f integrovatelná funkce na intervalu $[-\pi, \pi]$. Je-li f sudá funkce, má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Je-li f lichá, má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Řadu jsme přiřadili, ale co jako?

Symbolem $f(x_0+)$ budeme rozumět číslo $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, pokud tato limita existuje, podobně $f(x_0-)$.

Věta (Dirichletova)

Nechť funkce f je po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je roven:

1. *$f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f spojitá,*
2. *$\frac{1}{2}[f(x_0-) + f(x_0+)]$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f nespojitá,*
3. *$\frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$ v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$.*

Definice

Nechť f je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$. Funkci $f^\star$ nazýváme 2π periodické rozšíření funkce f, jestliže

$$f^\star(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ f(x - 2k\pi) & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \\ \frac{1}{2}\left(f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right) & x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

.

Definice

Nechť f je integrovatelná na $[0, \pi]$. Sudé rozšíření funkce f na interval $[-\pi, \pi]$ je funkce

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \pi] \\ f(-x) & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

a příslušná Fourierova řada se nazývá kosinová.