

Autonomní systémy v rovině

Definice, trajektorie, nulkliny, stacionární body

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.02.2023

Autonomní systém v rovině

Definice

Vektorová diferenciální rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

kde

$$\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t))^T$$

a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^T$$

je definovaná na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, se nazývá *autonomní systém v rovině*.
Oblast Ω se nazývá *fázový prostor*, proměnná t se nazývá *čas*.

Úmluva

Pokud nebude řečeno jinak, tak f_1 i f_2 jsou spojité funkce a počáteční problém (1), $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je jednoznačný pro libovolné $[t_0, \mathbf{x}_0] \in \mathbb{R} \times \Omega$.
Řešením se rozumí úplné řešení.

Trajektorie a základní vlastnost

Řešení $\mathbf{x} = \varphi(t)$ systému (1) můžeme interpretovat jako

1. graf funkce $\mathbf{x} = \varphi(t)$ v prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$;
2. křivku v prostoru Ω danou parametricky $\mathbf{x} = \varphi(t)$.

V druhém případě se tato křivka nazývá *trajektorie*. Jedná se vlastně o kolmý průmět grafu funkce $\mathbf{x} = \varphi(t)$ z $\mathbb{R} \times \Omega$ do Ω .

Uzavřená trajektorie se nazývá *cyklus*.

Lemma

Je-li $\mathbf{x} = \varphi(t)$ řešení rovnice (1), pak i $\mathbf{x} = \varphi(t + c)$ je řešení rovnice (1).

Tři základní otázky

1. Existují rovnovážné hodnoty

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$$

takové, že $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^*$ je řešením (1)?

2. Nechť $\varphi(t)$ je řešení (1). Předpokládejme, že $\psi(t)$ je druhé řešení (1) takové, že $\psi(0)$ je velmi blízko $\varphi(0)$. Zůstane $\psi(t)$ blízko $\varphi(t)$ i v budoucnu nebo se $\psi(t)$ odchýlí od $\varphi(t)$ pro $t \rightarrow \infty$?
3. Co se stane s řešením $\mathbf{x}(t)$ pro $t \rightarrow \infty$? Bude se blížit nějakému rovnovážnému stavu? Nebo alespoň třeba nějakému periodickému řešení?

První otázka = stacionární bod

Definice

Bod \mathbf{x}^* takový, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, se nazývá *stacionární bod* (kritický, singulární, rovnovážný). Příslušné řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ se pak nazývá *stacionární řešení* (rovnovážné).

Stacionární bod je tedy řešením soustavy rovnic

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

Množina řešení každé libovolné rovnice $f_k(x_1, x_2) = 0$ se nazývá *k-tá nulklina*.

Druhá otázka = stabilita

Definice

Řešení \mathbf{x}_0 rovnice (1) se nazývá stabilní, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že každé řešení \mathbf{x} rovnice (1) vyhovující podmínce

$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0(0)| < \delta$$

splňuje

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon.$$

Není-li řešení \mathbf{x}_0 stabilní, řekneme, že je nestabilní.

Plně vyřešeno pro

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad (2)$$

kde A je konstantní matice.

Věta

- a) Každé řešení rovnice (2) je stabilní, když všechna vlastní čísla matice A mají zápornou reálnou část.
- b) Předpokládejme, že všechna vlastní čísla matice A mají nezápornou reálnou část a $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_l = i\sigma_l$, jsou kořeny s nulovou reálnou částí, přičemž kořen λ_j má násobnost k_j . Potom každé řešení rovnice (2) je stabilní, když matice A má k_j lineárně nezávislých vlastních vektorů pro každé vlastní číslo λ_j .

Třetí otázka = vlastnosti trajektorií a charakteristika stacionárních bodů

Věta

Nechť φ , ψ jsou řešení rovnice (1). Pak jejich trajektorie buď splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.

Věta

Nechť $\mathbf{x} = \varphi(t)$ je řešení (1). Jestliže $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$ pro nějaké t_0 a $T > 0$, potom $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t)$.

Autonomní systém (1) tedy může mít trajektorie trojího typu:

1. Singulární body (odpovídají konstantním řešením).
2. Cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením).
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Typy singulárních bodů

Singulární bod x_0 rovnice (1) se nazývá

střed, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že každým $a \in U$ prochází jediná uzavřená trajektorie, která obsahuje x_0 ve svém vnitřku;

ohnisko, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ má tu vlastnost, že konverguje pro $t \rightarrow \infty$ nebo $t \rightarrow -\infty$ k x_0 , a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0x_1}$ má nevlastní limitu;

uzel, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že pro bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$$

a velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0 x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0 x_1}$ má vlastní limitu;

sedlo, když existuje jen konečný počet trajektorií $x(t)$ takových, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$$

bod rotace, jestliže v libovolném okolí bodu x_0 existuje alespoň jeden cykl, obsahující ve svém vnitřku bod x_0 .

Lineární autonomní systém

Uvažujme lineární autonomní systém, tj.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Věta

Nechť A je regulární matice systému (3) a nechť λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice A . Stacionární bod $[0, 0]$ je

- *nestabilní uzel, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$;*
- *stabilní uzel, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$;*
- *sedlo, jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;*
- *nestabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ a $\alpha > 0$;*
- *stabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ a $\alpha < 0$;*
- *střed, jsou-li $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$.*