

**Radka Smýkalová**

**GONIOMETRICKÉ FUNKCE  
V ELEMENTÁRNÍ  
MATEMATICE**

NADACE UNIVERSITAS V BRNĚ  
AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM V BRNĚ  
ČESKÁ MATEMATICKÁ SPOLEČNOST  
2016

*Text* © Radka Smýkalová 2016

*Obálka* © Tomáš Mořkovský 2016

*Vydaly* © Akademické nakladatelství CERM, Nadace Universitas v Brně a Česká matematická společnost 2016

Tato kniha ani jakákoli její část nesmí být přetiskována, kopírována či jiným způsobem rozšiřována bez výslovného povolení vydavatele.

ISBN bude přiděleno (Akademické nakladatelství CERM v Brně)



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>1 Z historie goniometrických funkcí</b>	<b>8</b>
1.1 Počátky trigonometrie ve starověku . . . . .	8
1.1.1 Měření úhlů a délek tětiv . . . . .	8
1.1.2 Ptolemaiovy výpočty . . . . .	9
1.2 Středověký zrod trigonometrických veličin . . . . .	17
1.2.1 Trigonometrie v Indii . . . . .	18
1.2.2 Trigonometrie v arabských zemích . . . . .	21
1.3 Trigonometrie v Evropě 15. – 17. století . . . . .	25
1.4 Eulerova reforma goniometrie . . . . .	31
1.4.1 Hlavní rysy Eulerovy reformy . . . . .	32
1.4.2 Introductio in Analysin infinitorum (1748) . . . . .	33
<b>2 Goniometrie pravoúhlého trojúhelníku</b>	<b>40</b>
2.1 Funkce ostrého úhlu . . . . .	40
2.1.1 Od podobnosti k poměrům . . . . .	40
2.1.2 Grafy a základní vztahy . . . . .	41
2.2 Pythagorova a Eukleidovy věty . . . . .	43
2.3 Goniometrické hodnoty téhož úhlu . . . . .	45
2.4 Goniometrické hodnoty významných úhlů . . . . .	46
2.5 Goniometrické vzorce . . . . .	52
2.6 Příklady . . . . .	57
<b>3 Goniometrie obecného trojúhelníku</b>	<b>63</b>
3.1 Věty o průmětech . . . . .	63
3.2 Goniometrické hodnoty tupých úhlů . . . . .	64
3.3 Sinová věta a obsah trojúhelníku . . . . .	66
3.4 Kosinová věta, závislost tří kosinů . . . . .	68
3.5 Tangentová věta, Mollweidovy vzorce . . . . .	72
3.6 Odvození součtových vzorců . . . . .	75
3.7 Příklady . . . . .	78
<b>4 Goniometrické funkce v oboru <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>85</b>
4.1 Funkce sinus a kosinus . . . . .	85
4.1.1 Dvě funkce orientovaného úhlu . . . . .	85
4.1.2 Koloběh hodnot sinu a kosinu . . . . .	89
4.2 Funkce tangens a kotangens . . . . .	92

4.3	Základní goniometrické vzorce . . . . .	96
4.3.1	Součtové a rozdílové vzorce . . . . .	96
4.3.2	Funkce dvojnásobného a polovičního argumentu . . . . .	99
4.3.3	Převody součinů na součty a naopak . . . . .	101
4.4	Goniometrické rovnice a nerovnice . . . . .	102
4.5	Goniometrické soustavy rovnic . . . . .	117
4.6	Goniometrické identity a rovnosti . . . . .	132
4.7	Příklady . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Hlubší trigonometrické vztahy</b>	<b>163</b>
5.1	Trigonometrické identity . . . . .	163
5.2	Trigonometrické nerovnosti . . . . .	170
<b>6</b>	<b>Další aplikace goniometrických funkcí</b>	<b>186</b>
6.1	Goniometrické substituce . . . . .	186
6.2	Goniometrický tvar komplexních čísel . . . . .	205
6.3	Z matematické kartografie . . . . .	213
	<b>Závěr</b>	<b>230</b>
	<b>Literatura</b>	<b>231</b>

# Úvod

Tato publikace je systematickým a podrobným popisem postavení a významu goniometrických funkcí v elementární matematice. Výklad je podán v ucelené podobě, jakou jsme v bohaté literatuře věnované jednotlivým aspektům dané problematiky nenašli. Odvíjí se od otázek rovinné trigonometrie, té oblasti elementární matematiky, ve které se dotyčné funkce zrodily a našly nejvýznamnější praktické uplatnění (vedle teorie Fourierových řad, kterou však řadíme do vyšší matematiky). Ostatně česká matematická terminologie patří k těm výjimečným, ve kterých se ujal návrh významného matematika, fyzika a didaktika Felixe Kleina (1849 – 1925), který na počátku 20. století prosazoval změnu, aby se tyto funkce nazývaly *goniometrické*. V drtivé většině jazyků jim však dodnes (a patrně natrvalo) zůstal přívlastek *trigonometrické*.

V tomto krátkém vstupním textu popíšeme, jak je naše dílo sestaveno. Skládá se z šesti výkladových kapitol, které jsou doplněny o část nazvanou Závěr a závěrečný seznam použité literatury, jenž čítá na pět desítek položek rozdělených na historické práce, učebnice, různé druhy knih, sbírky úloh, články, příspěvky ve sbornících a internetové zdroje. Věnujme se nyní obsahové náplni jednotlivých kapitol.

Kapitola 1 poskytuje podrobný historický přehled vývoje poznatků o goniometrických funkcích. Z období starověku věnujeme největší pozornost Ptolemaiovým výpočtům délek tětiv. Neomezujeme se přitom pouze na popis postupu, jakým Ptolemaios své tabulky sestavoval, nýbrž podáváme detailní zdůvodnění jednotlivých kroků a důkazy potřebných teoretických výsledků, jakými je především Ptolemaiova věta o velikosti stran a úhlopříček obecného tětivového čtyřúhelníku. V druhé části historické kapitoly se obdobně věnujeme trigonometrickým výsledkům středověkých indických a arabských matematiků, kterým vděčíme za vznik dnešních goniometrických funkcí. Na tyto výsledky navázali evropští matematikové epochy renesance způsobem, který popisujeme ve třetí části kapitoly. Její čtvrtá, závěrečná část je celá věnována významným změnám v učení o goniometrických funkcích, za které vděčíme Leonhardu Eulerovi a které daly této disciplíně její novodobou podobu. Protože tento patrně nejgeniálnější matematik všech dob nahlížel na goniometrické funkce z pohledu rodící se matematické analýzy, v našem textu se při popisu dotyčných Eulerových výsledků nevyhneme nekonečným součtům a součinům, které přesahují celkově elementární rámec našeho textu.

Vlastní teorii goniometrických funkcí v oboru reálných čísel budujeme postupně v kapitolách 2, 3 a 4. V první z nich na základě geometrické podobnosti pravoúhlých trojúhelníků zavádíme obvyklým způsobem goniometrické funkce ostrého úhlu. Běžné školské poznatky doplňujeme o výklad některých obtížnějších otázek (například důkaz správnosti konstrukce pravidelného pětiúhelníku) a také o méně známé diagramy, podle kterých je možné názorně zdůvodnit součtové a rozdílové vzorce (v oboru ostrých úhlů).

V kapitole 3 postupně odvozujeme základní výsledky z rovinné trigonometrie (z nichž současně absolventi gymnázií bohužel znají pouze sinovou a kosinovou větu). Vycházíme přitom důsledně z vět o průmětech dvou stran trojúhelníku do směru třetí strany a do směru k němu kolmého. Ukazujeme, že požadavek univerzální platnosti těchto vět vede k přirozenému způsobu zavedení goniometrických funkcí tupého úhlu a že sinová i kosinová věta jsou přímými důsledky těchto vět

---

(takže kosinovou větu lze odvodit bez užití Pythagorovy věty). Odvozujeme rovněž dnes již pozapomenutou tangentovou větu a Mollweidovy vzorce. Věnujeme se i důkazům součtových a rozdílových vzorců (tentokrát již v oboru konvexních úhlů), jejichž platnost využijeme v kapitole 4 při budování teorie goniometrických funkcí v oboru reálných čísel.

Posledně zmíněná kapitola 4 je z celé práce nejrozsáhlejší. Na bezmála osmdesáti stranách v ní nejprve obvyklým postupem zavádíme goniometrické funkce orientovaného úhlu pomocí kartézských souřadnic bodu na jednotkové kružnici. Poté se věnujeme po etapách odvozování široké palety základních goniometrických vzorců. Nejprve užitím planimetrických souměrností a rotace o  $90^\circ$  zdůvodňujeme převodní vzorce pro sinus a kosinus, které nám pak pomohou k rozšíření součtových a rozdílových vzorců z oboru  $(0, \pi)$  na obor  $\mathbb{R}$ . Z nich už pak běžnou cestou odvozujeme všechny ostatní potřebné goniometrické vzorce.

V další části kapitoly 4 se pak věnujeme významnému praktickému úkolu – řešení goniometrických rovnic a nerovnic. Výklad vedeme původním postupem, při kterém nově vyčleňujeme některé typy rovnic, zejména u substituční metody řešení. Obecnou teorii ilustrujeme průběžně řešeními příklady. Podrobně řešené příklady tvoří i zbývající části kapitoly 4, jež pojednávají o goniometrických soustavách rovnic a čtených goniometrických identitách a rovnostech, které se nám podařilo z dostupné literatury nashromáždit. Souborem rozmanitých příkladů je ostatně ukončena nejen kapitola 4, ale i předešlé kapitoly 2 a 3. Tyto příklady bohatě ilustrují a někdy i rozšiřují poznatky a metody z výkladu dotyčné kapitoly. Ve srovnání s běžnými školními učebnicemi a sbírkami jsou námi vybrané příklady méně standardní, a proto je i jejich řešení zpravidla náročnější. U zadání převzatých příkladů jsou v poznámkách pod čarou uvedeny odkazy na literaturu.

Zvláštní postavení v celé práci má kapitola 5, která je pojata jako „encyklopedický“ výklad rozmanitých rovností a nerovností, které platí pro goniometrické hodnoty na vnitřních úhlech  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (či jejich násobcích) libovolného trojúhelníku. K tomu účelu jsme vypracovali postup, který nám umožnil množství těchto výsledků (nepřehledně rozptýlených v literatuře) podat na dvaceti stranách textu v uspořádané a logicky provázané podobě.

Závěrečná výkladová kapitola 6 přesvědčivě dokládá, že sama trigonometrie není jedinou oblastí elementární matematiky, v níž lze úspěšně a účelně goniometrické funkce využít. V její první části se zabýváme goniometrickými substitucemi při řešení různých algebraických rovnic a jejich soustav, úloh o rekurentních posloupnostech a při dokazování algebraických nerovností. Druhá část kapitoly je věnována užití goniometrických funkcí při výpočtech s komplexními čísly, přitom v ukázkách se výhradně věnujeme situacím, v jejichž popisu komplexní čísla vůbec nevystupují. Konečně v třetí části kapitoly 6 se zabýváme významem goniometrických funkcí pro matematickou kartografii, prakticky navýsost užitečné disciplíně s bohatou zajímavou historií, o níž v textu rovněž stručně pojednáváme. Myslíme si, že tím dobře dokreslujeme nedocenitelný význam trigonometrie či šířeji celé goniometrie, jak jsme ho prvotně načrtli v historicky zaměřené kapitole 1.

Publikace, kterou držíte ve svých rukou, je knižní podobou Ph.D. práce [49], vypracované autorkou v letech 2004 – 2011 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity pod vedením jejího pedagoga docenta *Jaromíra Šimši*. Jemu patří autorčin dík za odborné vedení, četné koncepční náměty, rady a připomínky, které rozhodujícím způsobem ovlivnily obsah, formu i kvalitu provedení výsledného díla.

Velký dík patří také Mgr. Petru Liškovi, který se podílel na tvorbě obrázků v celé práci.

# Kapitola 1

## Z historie goniometrických funkcí

### 1.1 Počátky trigonometrie ve starověku

#### 1.1.1 Měření úhlů a délek třetiv

Rovinný úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným počátkem. Tak zní dnešní definice rovinného geometrického útvaru. Ovšem zrod tohoto pojmu má úzkou spojitost s dělením kruhu. Již od starověkých Babyloňanů pochází dělení kruhu na 360 stejných částí (kruhových výsečí), které Babyloňané nazvali *stupně*, dodnes běžně používané jednotky úhlové míry. Dělení *plného úhlu* na 360 stupňů a jednoho stupně na 60 minut od nich převzali Řekové. Šedesátková číselná soustava Babyloňanů je dnes zastaralá, ovšem rozdělení kruhu na 360 stupňů se dochovalo do současnosti.

Teprve novověký pohled na goniometrické funkce a jejich užití v diferenciálním a integrálním počtu přivedly matematiky k názoru, že velikosti úhlů je přirozené vyjadřovat v *obloukové míře* s úhlovou jednotkou *radián*. Jeden radián je středový úhel, který přísluší oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Plný úhel má  $2\pi$  radiánů – což je 360 stupňů. Samotné slovo *radián* bylo navrženo v roce 1871 Jamesonem Thomsonem. Dřívější návrhy byly např. *rad* nebo *radiál*.

První práce o trigonometrii souvisely s problémem určování poměru odvěsen pravoúhlého trojúhelníku a jeho závislosti na ostrém vnitřním úhlu tohoto trojúhelníku. Již staří Řekové znali jednoduchý aparát na určování času pomocí tyče vrhající stín určité délky. Sloupek slunečních hodin byl v podstatě obdobný prostředek na výpočet goniometrické funkce kotangens z délky sloupu a délky stínu. Samozřejmě se antičtí matematici o funkci jako takovou nezajímali. Říká se, že Thalés z Milétu (asi 624 – 548 př. n. l) byl prvním z dlouhé řady řeckých filozofů, který zjišťoval výšku pyramidy porovnáváním délky jejího stínu s délkou stínu, který vrhala vhodná tyč. Starořecká tri-



Obrázek 1.1: Thalés z Milétu

gonometrie však nezahrnovala pouze a jen poznatek o podobnosti dvou pravoúhlých trojúhelníků.



Nicméně tento druh porovnávání a výpočet pomocí délek stínů byl v antice velice dobře znám a může být nazván předchůdcem vlastní trigonometrie.

Nejdůležitější pro rozvoj trigonometrie v moderním slova smyslu byly práce starověkého řeckého astronoma, který pocházel z Nikaie v Bitýnii, Hipparcha (asi 190 – 120 př. n. l.). Z toho, co



Obrázek 1.2: Hipparchos

Hipparchos napsal, se nám do dnešní doby téměř nic nedochovalo. O jeho díle si můžeme udělat pouze představu, a to prostřednictvím knihy Klaudia Ptolemaia s názvem *Almagest*. Pro své astronomické výpočty potřeboval Hipparchos tabulku trigonometrických poměrů. Avšak neměl se kam obrátit, žádná taková tabulka dosud neexistovala. Vzal tedy v úvahu libovolný trojúhelník vepsaný do kruhu, čímž se každá z jeho tří stran stala tětivou kružnice, jež kruh omezovala. K výpočtu velikostí různých prvků trojúhelníka bylo potřeba stanovit délku tětivy příslušné danému středovému úhlu. To se stalo hlavním úkolem trigonometrie pro mnohá následující staletí. Hipparchos sestavil tabulky tětiv pro různé středové úhly kružnice při stálém poloměru. Byly to vlastně tabulky dvojnásobných sinů poloviny středového úhlu. Sám Hipparchos napsal dvanáct knih o počítání délek tětiv v kruhu, ale všechny tyto knihy byly s koncem antické epochy ztraceny.

### 1.1.2 Ptolemaiovy výpočty

Klaudios Ptolemaios (asi 85 – 165 n. l.) byl řecký geograf, astronom a astrolog, který pravděpodobně žil a pracoval v egyptské Alexandrii.



Obrázek 1.3: Klaudios Ptolemaios

Jeho největší dílo *Syntaxis megale* (*Velká soustava*) – astronomický spis, který byl vydán okolo roku 140 a v 8. století přeložen do arabštiny pod názvem *Almagest*, byl založen na domněnce, že nehybná Země je umístěna ve středu vesmíru a nebeská tělesa kolem ní obíhají po předepsaných drahách. Našemu zájmu se těší Ptolemaiova tabulka tětiv, která je předmětem kapitoly 10 a 11 první knihy *Almagestu*. Tato tabulka udává délku tětivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který ji vymezuje. Středový úhel, k němuž se délky vztahují, postupuje po  $0,5^\circ$  na intervalu od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ .

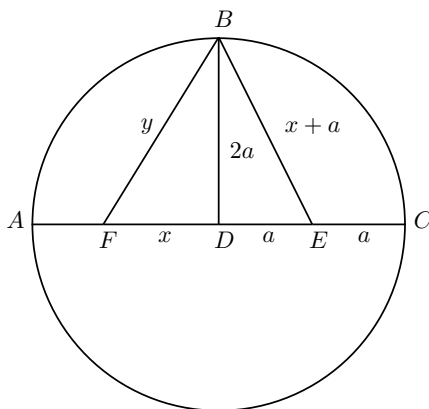
Z našeho hlediska jde vlastně o tabulku sinů úhlů od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ , postupujících po čtvrtině stupně. Když totiž označíme poloměr kruhu  $r$ , středový úhel řeckým písmenem  $\alpha$  a délku tětivy  $\text{tet}(\alpha)$ , obdržíme vztah

$$\text{tet}(\alpha) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Ptolemaios rozdělil průměr kruhu na 120 stejných jednotkových dílů (délky  $1^d$ ), tedy poloměru  $r$  přiřazoval délku 60 dílů ( $r = 60^d$ ). Jeho tabulka udává délky tětiv s přesností na dvě šedesátinná místa, tedy s chybou řádu  $60^{-2}$ .

Uvedením jednotlivých metod, jak Ptolemaios postupně zmíněnou tabulku doplňoval, vytvoříme pro funkci  $\text{tet}(\alpha)$  malou, avšak obsažnou teorii, kterou Ptolemaios ke svým výpočtům potřeboval. Stejně jako on budeme pracovat s poloměrem délky  $r = 60^d$ .

1. Funkce  $\text{tet}(\alpha)$  je definovaná pro  $\alpha \in \langle 0; 180^\circ \rangle$  a platí  $0^d \leq \text{tet}(\alpha) \leq 120^d$ .
2. Hodnoty  $\text{tet}(0^\circ) = 0^d$ ,  $\text{tet}(60^\circ) = 60^d$  a  $\text{tet}(180^\circ) = 120^d$  jsou zřejmé. Ze znalosti Pythagorovy věty Ptolemaios vypočítal  $\text{tet}(90^\circ) = 84^d 51' 10''$ , kde  $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^d$  a  $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^d$ . (Všechny Ptolemaiovy hodnoty  $\text{tet}(\alpha)$  budeme uvádět rovnítkem, správněji bychom měli psát  $\doteq$ .)
3. Pro výpočet hodnot  $\text{tet}(\alpha)$ , kde  $\alpha \in \{36^\circ; 72^\circ; 108^\circ; 144^\circ\}$ , musel nejdříve Ptolemaios dokázat, že délka  $|DF|$  části ramene  $EF$  rovnoramenného trojúhelníka  $EFB$  z obr. 1.4 je rovna délce strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kruhu s průměrem  $AC$  a že délka  $|BF|$  je délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do téhož kruhu (viz podkapitola 2.4). Díky



Obrázek 1.4

těmto výsledkům lze určit délky tětiv příslušných úhlů následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} |DE|^2 + |DB|^2 &= |BE|^2, & |DF|^2 + |DB|^2 &= |BF|^2, \\ (30^d)^2 + (60^d)^2 &= |BE|^2, & (37^d 4' 55'')^2 + (60^d)^2 &= |BF|^2, \\ |BE| &= 67^d 4' 55'' = |EF|, & |BF| &= 70^d 32' 3'', \\ |DF| &= |EF| - |DE| = 67^d 4' 55'' - 30^d, & \text{tet}(72^\circ) &= 70^d 32' 3''. \\ |DF| &= 37^d 4' 55'', \\ \text{tet}(36^\circ) &= 37^d 4' 55''. \end{aligned}$$

Jakmile byly všechny výše zmíněné hodnoty  $\text{tet}(\alpha)$  určeny, mohl Ptolemaios ukázat, jak vypočítat délky dalších tětiv na základě toho, že do kruhu vepsaný úhel, který leží proti průměru, je pravý. Proto užitím Pythagorovy věty ve tvaru

$$(\text{tet}(\alpha))^2 + (\text{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = (120^d)^2,$$

který mimochodem odpovídá dnešnímu vztahu pro goniometrickou jedničku

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

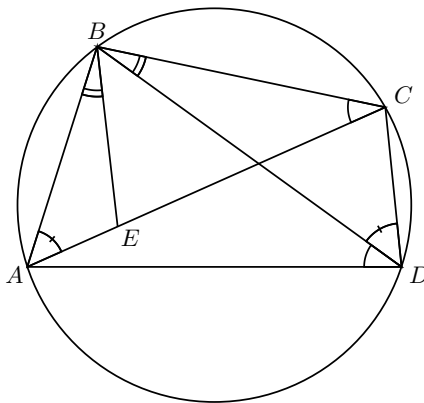
Ptolemaios určil hodnoty  $\text{tet}(108^\circ) = 97^d 4' 56''$  a  $\text{tet}(144^\circ) = 114^d 7' 37''$ . Podobně z hodnoty  $\text{tet}(60^\circ) = 60^d$  vypočítal  $\text{tet}(120^\circ) = 103^d 55' 23''$ .

4. Dosud popsané metody vedou pouze k určení několika málo jednotlivých hodnot funkce  $\text{tet}(\alpha)$ . Pro výpočet všech dalších hodnot funkce  $\text{tet}(\alpha)$  potřeboval Ptolemaios nový matematický nástroj. Tím se stala významná planimetrická věta, která dnes nese Řekovo jméno.

**Ptolemaiova věta.** *V každém tětivovém čtyřúhelníku platí: Součet součinů délek jeho protilehlých stran je roven součinu délek jeho úhlopříček.*

Při označení podle obr. 1.5 lze větu vyjádřit rovností

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$



Obrázek 1.5: K Ptolemaiově větě

*Důkaz.* Sestrojíme bod  $E$  na úhlopříčce  $AC$  tak, aby úhly  $ABE$  a  $DBC$  byly shodné, viz obr. 1.5, na kterém jsou rovněž vyznačeny dvě dvojice shodných obvodových úhlů. Další

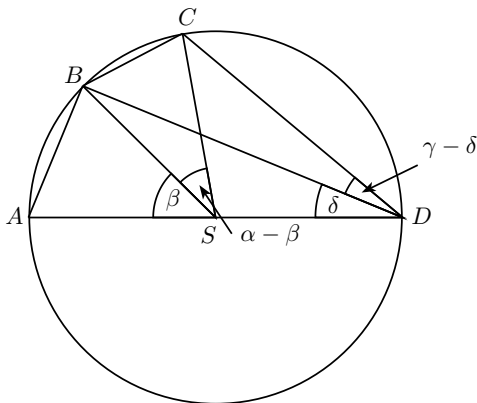
postup důkazu můžeme stručně zapsat takto:

- $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle EBC|$  ( $|\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle DBC|$ ),
- $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BCE|$  (obvodové úhly nad tětivou  $AB$ ),
- $\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|DA|}$  ( $\triangle ABD \sim \triangle EBC$  podle věty  $uu$ ),
- $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DBC|$  (dáno konstrukcí bodu  $E$ ),
- $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BDC|$  (obvodové úhly nad tětivou  $BC$ ),
- $\frac{|BA|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|DC|}$  ( $\triangle ABE \sim \triangle DBC$  podle věty  $uu$ ),
- $|BC| \cdot |AD| = |BD| \cdot |CE|$  (přepsána třetí rovnost),
- $|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |AE|$  (přepsána šestá rovnost).

Nyní poslední dvě rovnosti sečteme a součet upravíme:

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| &= |BD| \cdot |AE| + |BD| \cdot |CE|, \\ |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| &= |BD| \cdot (|AE| + |CE|), \\ |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| &= |AC| \cdot |BD|. \end{aligned}$$

Důkaz je hotov. Ještě poznamenejme, že ve speciálním případě, kdy tětivový čtyřúhelník je obdélníkem, získáme uvedeným postupem důkaz Pythagorovy věty pro obecný pravouhlý trojúhelník  $ABC$ , který nejprve doplníme na obdélník  $ABCD$  (bod  $E$  z obr. 1.5 bude patou výšky z vrcholu  $B$  na přeponu  $AC$ ). □



Obrázek 1.6: Ke vzorci pro  $\text{tet}(\alpha - \beta)$

5. Díky dokázané větě našel Ptolemaios odpověď na dvě důležité otázky:

(a) *Jak z hodnot  $\text{tet}(\alpha)$ ,  $\text{tet}(\beta)$  vypočítat hodnotu  $\text{tet}(\alpha - \beta)$ ?*

Pro dané úhly  $\alpha, \beta$ , kde  $0^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$ , uvážíme tětivový čtyřúhelník  $ABCD$  vepsaný do půlkruhu s průměrem  $AD$  tak, že  $|\sphericalangle ASB| = \beta$  a  $|\sphericalangle ASC| = \alpha$  (obr. 1.6). Pak  $|AB| = \text{tet}(\beta)$ ,  $|AC| = \text{tet}(\alpha)$  a  $|BC| = \text{tet}(\alpha - \beta)$ . Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem víme, že  $|\sphericalangle ADC| = \gamma = \frac{\alpha}{2}$  a  $|\sphericalangle ADB| = \delta = \frac{\beta}{2}$ . Následujme jeho postup:

$$\bullet |CD| = \sqrt{|AD|^2 - |AC|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2} \quad (\text{Pyth. věta}),$$

$$\bullet |BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2} \quad (\text{Pyth. věta}),$$

$$\bullet |BC| = \frac{|AC|\sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} - |AB|\sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}}{|AD|} \quad (\text{Ptol. věta}),$$

$$\bullet \text{tet}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tet}(\alpha)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2} - \text{tet}(\beta)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2}}{120^d} \quad (\text{dosazení}).$$

Poznamenejme, že když rovnost z Ptolemaiovy věty vydělíme výrazem  $|AD|^2$ , získáme

$$\frac{|AB|}{|AD|} \cdot \frac{|CD|}{|AD|} + \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|},$$

což se dá v situaci z obr. 1.6 pomocí funkcí sinus a kosinus podle novodobého zápisu přepsat na tvar známého rozdílového vzorce

$$\sin(\gamma - \delta) = \sin \gamma \cos \delta - \cos \gamma \sin \delta.$$

V tomto okamžiku mohl Ptolemaios díky znalosti všech dosavadních hodnot  $\text{tet}(\alpha)$  vypočítat délky tětiv pro všechny úhly o velikosti  $k \cdot 6^\circ$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ . Tedy

$$\text{tet}(18^\circ) = \text{tet}(90^\circ - 72^\circ) = 18^d 46' 19'',$$

$$\text{tet}(12^\circ) = \text{tet}(72^\circ - 60^\circ) = 12^d 32' 36'',$$

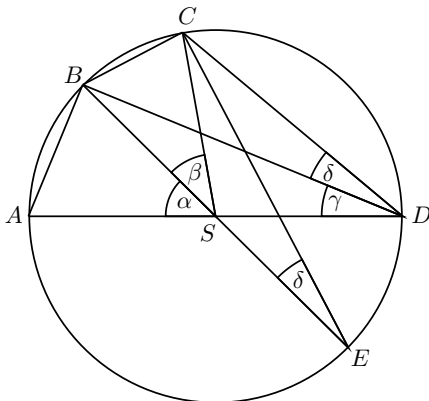
$$\text{tet}(6^\circ) = \text{tet}(18^\circ - 12^\circ) = 6^d 16' 50'',$$

$$\text{tet}(24^\circ) = \text{tet}(60^\circ - 36^\circ) = \dots,$$

⋮

(b) *Jak z hodnot  $\text{tet}(\alpha)$ ,  $\text{tet}(\beta)$  vypočítat hodnotu  $\text{tet}(\alpha + \beta)$ ?*

Pro dané úhly  $\alpha, \beta$ , kde  $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$  a  $\alpha + \beta < 180^\circ$ , uvážíme tětivový čtyřúhelník  $ABCD$  vepsaný do půlkruhu s průměrem  $AD$  tak, že  $|\sphericalangle ASB| = \alpha$  a  $|\sphericalangle BSC| = \beta$  (obr. 1.7). Pak  $|AB| = \text{tet}(\alpha)$ ,  $|BC| = \text{tet}(\beta)$  a  $|AC| = \text{tet}(\alpha + \beta)$ . Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem víme, že  $|\sphericalangle ADB| = \gamma = \frac{\alpha}{2}$  a  $|\sphericalangle BDC| = \delta = \frac{\beta}{2}$ . Pro následující odvození je nutná konstrukce pomocného bodu  $E$  – úsečka  $BE$  je průměr kruhu. Tentokrát užitíme Ptolemaiovu větu dvakrát – pro čtyřúhelníky  $ABCD$  a  $BCDE$ .


 Obrázek 1.7: Ke vzorci pro  $\text{tet}(\alpha + \beta)$ 

- $|AD| = |BE| = 120^d$  (průměry kruhu),
- $|BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2}$  (Pyth. věta),
- $|CE| = \sqrt{|BE|^2 - |BC|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2}$  (Pyth. věta),
- $|DE| = |AB| = \text{tet}(\alpha)$  ( $\triangle DES \cong \triangle ABS$ ),
- $|BC| \cdot |DE| + |CD| \cdot |BE| = |BD| \cdot |CE|$  (Ptol. věta),
- $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$  (Ptol. věta).

V posledních dvou rovnostech vystupují neznámé hodnoty  $|AC|$  a  $|CD|$ . Druhou z nich eliminujeme, když rovnice vhodně vynásobíme (první vynásobíme  $-|AB|$  a druhou  $|AD|$ ) a následně je sečteme. Ještě než tak učiníme, přepíšeme  $|DE|$  hodnotou  $|AB|$  a  $|BE|$  hodnotou  $|AD|$ . Tudíž

$$\begin{aligned}
 -|AB| \cdot (|BC| \cdot |AB| + |CD| \cdot |AD|) &= -|AB| \cdot (|BD| \cdot |CE|), \\
 |AD| \cdot (|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|) &= |AD| \cdot (|AC| \cdot |BD|).
 \end{aligned}$$

Po sečtení a úpravách obdržíme rovnost

$$|BC| \cdot (|AD|^2 - |AB|^2) = |BD| \cdot (|AC| \cdot |AD| - |CE| \cdot |AB|), \quad (*)$$

která je po dosazení ekvivalentní s rovností

$$\begin{aligned}
 &\text{tet}(\beta) \cdot \left( (120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2 \right) = \\
 &= \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2} \cdot \left( \text{tet}(\alpha + \beta) \cdot 120^d - \sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2} \cdot \text{tet}(\alpha) \right).
 \end{aligned}$$

Vyjádřením členu  $\text{tet}(\alpha + \beta)$  tak Ptolemaios získal kýžený vzorec

$$\text{tet}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tet}(\alpha)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\beta))^2} + \text{tet}(\beta)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(\alpha))^2}}{120^d}.$$

Poznamenejme, že když rovnost (\*) vydělíme výrazem  $|AD|^3$ , získáme

$$\frac{|BC|}{|AD|} \cdot \left(1 - \frac{|AB|^2}{|AD|^2}\right) = \frac{|BD|}{|AD|} \cdot \left(\frac{|AC|}{|AD|} - \frac{|CE|}{|AD|} \cdot \frac{|AB|}{|AD|}\right),$$

což se dá v situaci z obr. 1.7 pomocí funkcí sinus a kosinus podle novodobého zápisu s přihlédnutím k rovnosti  $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BDC| = \delta$  přepsat na tvar

$$\sin \delta(1 - \sin^2 \gamma) = \cos \gamma (\sin(\gamma + \delta) - \sin \gamma \cos \delta).$$

Odtud po dělení hodnotou  $\cos \gamma \neq 0$  získáme známý tvar součtového vzorce

$$\sin(\gamma + \delta) = \sin \gamma \cos \delta + \cos \gamma \sin \delta.$$

Díky odvozenému vzorci pro  $\text{tet}(\alpha + \beta)$  obdržel Ptolemaios pro případ  $\alpha = \beta$  aparát na výpočet hodnot  $\text{tet}(3^\circ)$ ,  $\text{tet}(1,5^\circ)$  a  $\text{tet}(0,75^\circ)$  z hodnoty  $\text{tet}(6^\circ)$ , kterou již znal:

$$\begin{aligned} \text{tet}(6^\circ) &= \text{tet}(3^\circ + 3^\circ) = \frac{2 \cdot \text{tet}(3^\circ)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(3^\circ))^2}}{120^d}, \\ 6^d 16' 50'' &= \frac{2 \cdot \text{tet}(3^\circ)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(3^\circ))^2}}{120^d}, \\ &\vdots \\ \text{tet}(3^\circ) &= 3^d 8' 28''. \\ \text{tet}(3^\circ) &= \frac{2 \cdot \text{tet}(1,5^\circ)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(1,5^\circ))^2}}{120^d}, \\ 3^d 8' 28'' &= \frac{2 \cdot \text{tet}(1,5^\circ)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(1,5^\circ))^2}}{120^d}, \\ &\vdots \\ \text{tet}(1,5^\circ) &= 1^d 34' 15''. \\ \text{tet}(1,5^\circ) &= \frac{2 \cdot \text{tet}(0,75^\circ)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(0,75^\circ))^2}}{120^d}, \\ 1^d 34' 15'' &= \frac{2 \cdot \text{tet}(0,75^\circ)\sqrt{(120^d)^2 - (\text{tet}(0,75^\circ))^2}}{120^d}, \\ &\vdots \\ \text{tet}(0,75^\circ) &= 0^d 47' 8''. \end{aligned}$$

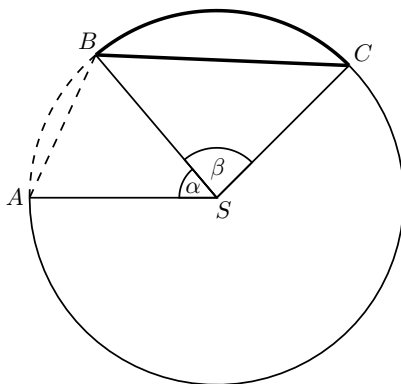
6. Aby mohl Ptolemaios sestavit tabulku délek tětiv s krokem  $0,5^\circ$ , potřeboval ještě vypočítat hodnotu  $\text{tet}(1^\circ)$  jako hodnotu ležící mezi  $\text{tet}(0,75^\circ)$  a  $\text{tet}(1,5^\circ)$ . Použil k tomu duchaplnou metodu interpolace, která byla známa již astronomu Aristarchovi (asi 320 – 250 př. n. l.) a která je pro délky tětiv založena na této vlastnosti: Splňují-li úhly  $\alpha, \beta$  nerovnosti  $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ , pak platí

$$1 < \frac{\text{tet}(\beta)}{\text{tet}(\alpha)} < \frac{\beta}{\alpha},$$

viz obr. 1.8, na kterém poměr  $\beta : \alpha$  je poměrem délek vyznačených oblouků  $BC$  a  $AB$ , zatímco  $\text{tet}(\beta) : \text{tet}(\alpha)$  je poměrem  $|BC| : |AB|$  příslušných tětiv. (V dnešní terminologii jde o implikaci  $0^\circ < \gamma < \delta < 90^\circ \Rightarrow 1 < \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} < \frac{\delta}{\gamma}$ , která plyne z toho, že funkce sinus je na intervalu  $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$  rostoucí a konkávní.) Původní geometrický důkaz zde uvádět nebudeme, lze ho však nalézt v [4] nebo [43]. Následujeme Ptolemaiov postup, který Aristarchovu nerovnost využil hned dvakrát:

$$\frac{\text{tet}(1^\circ)}{\text{tet}(0,75^\circ)} < \frac{1}{0,75} \quad \text{a} \quad \frac{\text{tet}(1,5^\circ)}{\text{tet}(1^\circ)} < \frac{1,5}{1}.$$

Po dosažení hodnot  $\text{tet}(0,75^\circ)$  a  $\text{tet}(1,5^\circ)$  dospěl Ptolemaios k odhadům



Obrázek 1.8

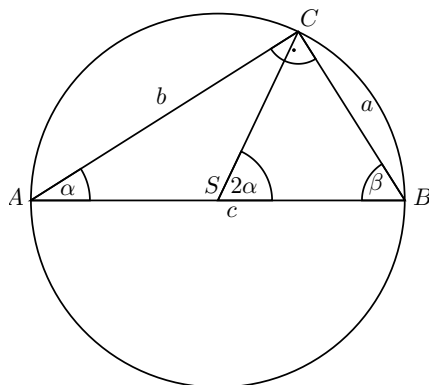
$$\text{tet}(1^\circ) < 1^d 2' 50'' \quad \text{a} \quad \text{tet}(1^\circ) > 1^d 2' 50''.$$

Jelikož je hodnota  $\text{tet}(1^\circ)$  zároveň menší a větší jak délka  $1^d 2' 50''$  (vyšlo to tak, protože hodnoty  $\text{tet}(0,75^\circ)$  a  $\text{tet}(1,5^\circ)$  byly přibližné), mohl Ptolemaios zapsat poslední hodnotu, díky níž již byl schopen vyplnit celou tabulku délek tětiv –  $\text{tet}(1^\circ) = 1^d 2' 50''$ .

Nyní vylíšme, jak mohl Ptolemaios pomocí své tabulky vyřešit jakýkoliv rovinný trojúhelník. Po vzoru Hipparcha budeme uvažovat trojúhelník vepsaný do kruhu. Popíšeme nyní pouze ten nejjednodušší případ, kdy zkoumaný trojúhelník  $ABC$  bude pravoúhlý. Nutno však poznamenat, že Ptolemaios si věděl rady i s obecnými trojúhelníky, a to výpočty ve dvou pravoúhlých trojúhelnících, které dostaneme, když původní trojúhelník rozdělíme některou jeho výškou na dvě části. Na tomto postupu se v pozdějších dobách budovala *novější trigonometrie* až do své současné podoby.

Z elementární geometrie víme, že přepona  $AB$  pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  z obr. 1.9 je průměrem opsaného kruhu a že  $|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle BAC|$ . Předpokládejme, že velikost  $\alpha = |\sphericalangle BAC|$  a délka přepony  $c = |AB|$  jsou dány. Nejdříve vypočítáme  $2\alpha$  a použijeme tabulku k zjištění délky odpovídající tětivy  $BC$ . Jelikož Ptolemaiova tabulka předpokládá délku průměru  $c = 120$ , výsledek ještě musíme vynásobit zlomkem  $\frac{c}{120}$ . Tak dostaneme délku  $a$  odvěsny  $BC$ . Délku  $b$  druhé odvěsny  $AB$  pak spočítáme pomocí Pythagorovy věty a třetí úhel  $\beta = |\sphericalangle ABC|$  snadno určíme z rovnosti  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Kdyby naopak byly dány strany  $a$  a  $c$ , zlomek  $\frac{a}{c}$  nejprve vynásobíme číslem 120.





Obrázek 1.9

Teprve potom sáhneme po tabulce délek tětiv, kde budeme *obráceně* hledat velikost  $2\alpha$ , ze které pak po dělení dvěma určíme velikost  $\alpha$ .

Ptolemaiov postup výpočtu můžeme zapsat ve tvaru vzorce

$$a = \frac{c}{120} \cdot \text{tet}(2\alpha). \quad (**)$$

To nás přivádí k zajímavému komentáři: násobení a dělení číslem 120 je v šedesátkové soustavě obdobné tomu, když násobíme a dělíme číslem 20 v desítkové soustavě. Provádíme to jednoduše tak, že po vynásobení nebo vydělení číslem 2 ještě posuneme desetinnou čárku o jedno místo doprava nebo doleva. Vzorec (\*\*) tudíž vyžaduje, abychom zdvojnásobili úhel, vyhledali ho v tabulce, délku odpovídající tětivy vydělili dvěma a nakonec posunuli šedesátinnou čárku. Bylo jen otázkou času, než někdo zkrátit tohle úmorné počítání sestavením jiné tabulky, která dvojnásobnému úhlu přiřazuje délku poloviční tětivy. Tento úkol, který dnes můžeme nazvat sestavením tabulky pro funkci sinus, splnili až učenci středověké Indie.

Dobytí Řecka Římem a řada jiných příčin postupně přivodily úpadek helénské kultury. Po Ptolemaiovi nevytvořili alexandrijští učenci v oblasti astronomie a trigonometrie, stejně jako v dalších vědních oborech, nic podstatného. Římská kultura také nebyla žádnou spásou, protože Římané nevymysleli v tomto období nového téměř nic, sami jen kopírovali to, co převzali od Řeků. Další rozvoj matematiky v oblasti trigonometrie je teprve spojován s národy Indů (od 5. stol. n. l.) a Arabů (od 7. stol. n. l.).

## 1.2 Středověký zrod trigonometrických veličin

Podle internetové encyklopedie Wikipedie je středověk tradiční označení dějinné epochy mezi koncem starověku a antické civilizace a začátkem novověku, které se poprvé objevilo v období renesance. Středověk je obvykle ohraničen pádem Západořímské říše v roce 476 a objevením Ameriky Kryštofem Kolumbem roku 1492 či zveřejněním 95 tezí Martinem Lutherem roku 1517.

Již dlouho před pátým stoletím našeho letopočtu se začala matematika rozvíjet na dalekém Východě – v Číně a Indii. Tato vývojová etapa dále pokračovala v arabských zemích, v Íránu a ve Střední Asii, později v Evropě a asi v 15. století až 16. století spěla ke svému konci.

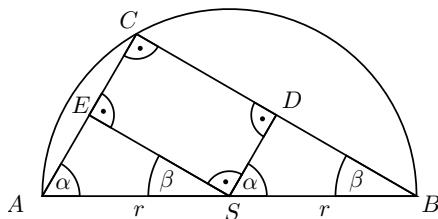
Přibližně tisíc let středověku prošly ať už existující či nově vznikající oblasti matematiky velkým vývojem (jazyk, pojmy, postupy, symbolika). Nejinak tomu bylo i v oblasti našeho zájmu, v trigonometrii. Tabulky tětiv, díky nimž byli starověcí astronomové schopni dopočítat úhly i délky stran pravoúhlého trojúhelníka, ustupovaly do pozadí. Objevovaly se vhodnější trigonometrické veličiny (jako například *sinus* nebo *tangens*), které byly po řadu staletí chápány jako *délky*, později jako *poměry*, *podíly čísel* (zlomky) a konečně jako *čísla*. I názvy a symboly pro nové trigonometrické veličiny prošly složitým vývojem. Málokdo ví, že až učenci raného novověku dali těmto veličinám označení, které přetrvalo až do dneška.

Velké uplatnění v astronomii a kartografii a potřeba stále přesnějších tabulek motivovaly mnohé středověké vzdělance k novým a stále hlubším zkoumáním, jaké obecné vlastnosti mají závislosti, které trigonometrické veličiny vyjadřují. Jejich výsledky pak na přelomu patnáctého a šestnáctého století vedly ke vzniku teorie goniometrických funkcí, které se analytickou cestou definitivně „odpoutaly“ od svých staletých nositelů – délek stran a velikostí úhlů trojúhelníků. Pro geometrické výpočty se význam těchto funkcí nijak nesnížil, ba naopak. Analytické prostředky tyto výpočty (nadále v praxi vysoce potřebné a žádané) ještě více zefektivnily.

Zaměříme se nyní na dvě asijské oblasti a uvedené nejdůležitější stránky vývoje středověké trigonometrie doplníme o konkrétní přínosy jednotlivých osobností. Přestože objektem našeho zájmu je především trigonometrie rovinná, nezapomeneme ani na trigonometrii sférickou, která byla rovněž intenzivně rozvíjena. Mnohá stěžejní díla té doby jsou provázaným výkladem metod výpočtů v rovinných i sférických trojúhelnících.

### 1.2.1 Trigonometrie v Indii

V oblasti trigonometrie se Indové opírali o práce helénistických autorů, ale přinesli také mnoho nového. Nejvíce čerpali z Ptolemaiova učení o délkách tětiv, které je popsáno v části 1.1.2. Vzpomeňme, že jeho tabulka udává délku tětivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který vymezuje. Řešení libovolného rovinného trojúhelníku pomocí Ptolemaiovy tabulky bylo však velice zdolouhavé, což vedlo indické učence k zavedení nových trigonometrických veličin. První a nejdůležitější byla veličina *sinus*. Díky ní se již s tětivami při řešení trojúhelníků setkáváme velice málo, neboť poloviční délka tětivy oblouku  $\varphi$  je rovna sinu oblouku  $\frac{\varphi}{2}$ . Ilustrujme nyní poloviční délky tětiv v kružnici



Obrázek 1.10: Délky polovičních tětiv

o daném poloměru  $r$  pomocí obrázku 1.10. Za předpokladu, že poloměr kruhu se rovná jedné a při označení  $\alpha = |\angle BAC|$  definujeme po vzoru Indů veličiny *sinus* a *kosinus* příslušného úhlu  $\alpha$  rovnostmi

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}|BC| = |BD| = |SE|, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}|AC| = |AE| = |SD|.$$

Po zavedení úhlu  $\beta = |\angle ABC| = 90^\circ - \alpha$  okamžitě dostáváme rovnosti  $\sin \beta = \cos \alpha$  a  $\cos \beta = \sin \alpha$ .

Je nutné zdůraznit, že těmto dvěma novým *délkovým* veličinám, které Indové používali pouze

pro úhly z intervalu  $\langle 0, 90^\circ \rangle$ , říkáme dnešním způsobem *sinus* a *kosinus* a jejich hodnoty značíme  $\sin \alpha$ , resp.  $\cos \alpha$ , i když to je korektní pouze v případě poloměru  $r = 1$ . Sami Indové pro tyto veličiny měli své názvy, které následně prošly dlouhým historickým vývojem. Zmíníme se o něm o pár řádků níže.

Z provedené úvahy o dvojicích úhlů  $\alpha, \beta$  z obr. 1.10 plyne, že sinus a kosinus jsou dva exempláře veličiny téhož druhu („poloviční tětivy“), což přesněji zapíšeme rovností

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Otázka zní, proč je tedy Indové vůbec rozlišovali a nevystačili si s jednou veličinou, jako si dříve Ptolemaios vystačil s tet  $\alpha$ , délkou tětivy příslušnou středovému úhlu  $\alpha$ ? *Dvojice* sinus, kosinus umožnila Indům vyjadřovat jednodušeji vztahy mezi stranami a úhly pravoúhlého trojúhelníku a také různé důležité vzorce, jako například vztah pro „sinus poloviny oblouku“

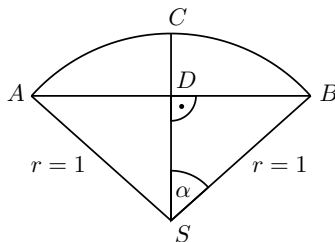
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r(r - \cos \alpha)}{2}}$$

či vzorce pro „sinus součtu a rozdílu“

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{r}, \quad \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{r}.$$

(Pro nás neobvyklý jmenovatel  $r$  je namístě, neboť trigonometrické veličiny byly tehdy chápány jako *délky*.) Všechny tyto vztahy Indové popisovali slovně bez jakékoliv algebraické symboliky, navíc při poloměru  $r$  různém od 1. Představme si další komplikaci, kdybychom každé užití hodnoty  $\cos \alpha$  museli nahradit popisem výpočtu  $\sin(90^\circ - \alpha)$ , nejčastěji zřejmě pomocí výrazu  $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ! Další historie matematiky ukázala, že zrod indických „dvojčat“ sinus a kosinus byl opravdu šťastnou událostí – díky nim dnes elegantně vyjadřujeme nejenom třeba sinovou a kosinovou větu z planimetrie trojúhelníku, ale také hodnoty exponenciální funkce v oboru komplexních čísel.

Je překvapující, že podle [47] v dobách středověkých považovali matematici za druhou (po sinu) nejdůležitější trigonometrickou veličinu nikoliv kosinus, ale dnes již téměř zapomenutý *sinusversus*, délku úsečky *mezi tětivou a obloukem*. Za předpokladu  $r = 1$  a při označení  $\alpha = \frac{1}{2}|\angle ASB|$  je veličina *sinusversus* příslušná úhlu  $\alpha$  znázorněna na obr. 1.11 délkou úsečky  $CD$ , tedy  $\text{sinvers } \alpha = |CD|$ . Význam této veličiny byl v řadě trigonometrických aplikací větší než význam kosinu, neboť např.



Obrázek 1.11: Délka sinusversus

v zeměměřičství a stavitelství odedávna patřily k základním početním údajům *výšky úsečí* a *vzepětí oblouků* (angl. *versed sines*). I když podle obrázku 1.11 zřejmě platí

$$\text{sinvers } \alpha = |CD| = |SC| - |SD| = 1 - \cos \alpha,$$

i tento jednoduchý převodní vztah by v namáhavé praxi středověkých výpočtů znamenal další (tedy nežádoucí) početní operaci (o to více komplikovanou v pozdější epoše výpočtů s logaritmy). Proto byly hodnoty sinvers  $\alpha$  tabelizovány, zejména pro malá  $\alpha$  s přesností větší než hodnoty sinů a kosinů, protože bylo navíc zásadní otázkou, nakolik se hodnota sinvers  $\alpha$ , řádově menší než  $\sin \alpha$ , přibližuje k nule. V dnešní počítačové době ztratily tyto numerické argumenty svoji váhu, a tak funkci  $1 - \cos \alpha$  nadále nějak pojmenovávat zcela pozbylo smyslu.

Jak jsme v předchozím slíbili, promluvíme krátce o etymologickém vývoji termínů sinus, kosinus a sinusversus. S těmito veličinami (ovšem pod jinými názvy) se setkáváme již v anonymních astronomických dílech *Siddhántas* a také ve veršovaném astronomickém a matematickém traktátu *Árjabhattíja*, který byl sepsán roku 499 triadvacetiletým Árjabhattou. Árjabhatta zde používal slovo *arddhadžíva* pro délku poloviny tětivy – pro veličinu sinus. Později zkrátil název na pouhé *džíva*. Když arabští učenci přeložili dílo *Árjabhattíja*, indický termín změnili na *džíba*, následně na skutečné arabské slovo *džaiib*, tj. nádra, výstřih, vypuklost atd. Ve dvanáctém století bylo při překladu z arabštiny do latiny použito slovo *sinus*, které mělo též základní význam jako *džaiib*. Zkrácený zápis *sin* se poprvé objevil u anglického profesora astronomie Edmunda Guntera (1581 – 1626).

Veličinu kosinus nazýval Árjabhatta *kótadžíva*, tj. sinus zbytku (doplňku do  $90^\circ$ ). Slovo *kótadžíva* bylo přeloženo do arabštiny jako *džaiib al-tamam* a následně do latiny ve dvanáctém století jako *sinus residui*. V patnáctém století se objevuje u Peurbacha (1423 – 1461) a Regiomontana (1436 – 1476) označení *sinus complementi*, tj. sinus doplňku, ze kterého s největší pravděpodobností vznikl záměnou pořadí a zkrácením náš dnešní *cosinus*, který Edmund Gunter na přelomu šestnáctého a sedmnáctého století zapisoval jako *co.sinus*. Zkratka *cos* se poprvé objevila roku 1674 u anglického matematika a geometra Jonase Moora (1617 – 1679).

Slovem *utkramadžíva* nazývali Indové sinusversus. Když ve dvanáctém století začali učenci používat latinské termíny všech trigonometrických veličin, mezi nimiž byl i *sinusversus*, pro termín sinus (aby ho odlišili od sinusversu) měli název *sinus rectus*, tj. přímý sinus a poloměr kružnice nazývali *sinus totus*, tj. úplný sinus. Tento poslední termín se udržoval v evropských dílech věnovaných trigonometrii až do dob Eulera, který svými pracemi definitivně prosadil pro poloměr trigonometrické kružnice hodnotu  $r = 1$ .

Při hodnocení přínosu indických vědců pro trigonometrii nesmíme zapomenout na tabulky trigonometrických veličin, bez kterých by byla tato věda prakticky nepoužitelná. První tabulka sinů a sinusversů se nalézá v anonymní astronomické práci ze 4. a 5. století *Súrja Siddhánta* a v díle *Árjabhattíja*. V práci *Árjabhattíja* jsou uvedeny hodnoty obou těchto veličin pro úhel  $3,75^\circ = 225'$  a jeho celočíselné násobky. Porovnáním s tabulkami od Ptolemaia můžeme konstatovat, že první indické tabulky nedosahovaly přesnosti Ptolemaiova *Almagestu*.

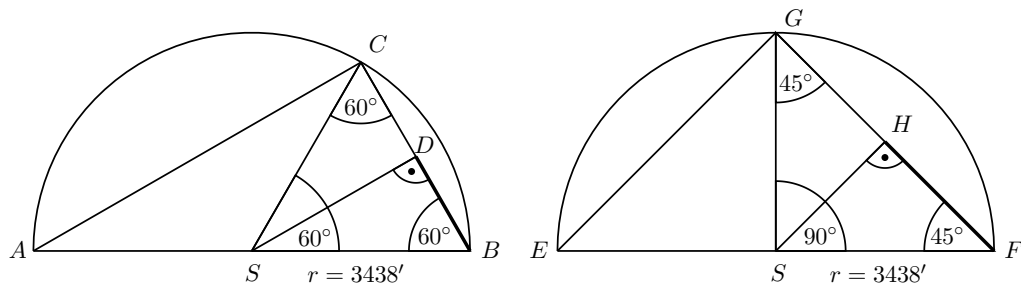
Dříve než se zaměříme na způsob výpočtu tabulek, promluvíme o jisté zvláštnosti *míry* (jednotek, ve kterých tyto délky vyjadřujeme celými čísly nebo zlomky) trigonometrických veličin. Stejně jako ve starověkém Řecku, také Indové dělili kruh na 360 stupňů neboli 21600 (úhlových) minut. Vzpomeňme na Ptolemaia, který průměr kruhu rozdělil na 120 stejných jednotkových dílů (délky  $1^d$ ), takže poloměr kruhu měl velikost  $r = 60^d$ . Těmito díly a jejich šedesátinými zlomky potom Ptolemaios vyjadřoval délky tětiv. Většina indických vědců však stejnou míru u trigonometrických veličin nepoužívala, ne jinak tomu bylo u autorů již zmíněných *Siddhántas* a *Árjabhattíja*. Ti šli ve stopách Hipparcha. Zda se jim více zamlouvaly Hipparchovy myšlenky, nebo se jim Ptolemaiovi *Almagest* do rukou dostal později než spisy Hipparchovy, se můžeme jen domýšlet. Hipparchos vyjadřoval trigonometrické veličiny a délky oblouků pomocí stejné jednotky – uváděl je v (úhlových) minutách. Tuto jednotku délky určil tak, že položil poloměr kruhu rovný 3438 minutám ( $r = 3438'$ ). K tomuto číslu patrně dospěl ze vzorce pro obvod kruhu  $o = 2\pi r = 360^\circ = 360 \cdot 60'$ . Pro zajímavost

ze vzorce vyjádříme a pro hodnotu  $r = 3438'$  vyčíslíme konstantu  $\pi$ :

$$\pi = \frac{21600'}{2r} = \frac{21600'}{2 \cdot 3438'} = 3,141361 \dots$$

Vidíme, že chyba je až na místě desetitisícin.

Způsob, jakým indiští učenci tabulky sestavovali, není nikde autenticky popsán. S největší pravděpodobností po vzoru Hipparcha nejdříve zjistili hodnoty  $\sin 90^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$  a  $\sin 45^\circ$ . Hodnota  $\sin 90^\circ = 3438'$  byla zřejmá, jelikož je to právě polovina délky tětivy oblouku o velikosti  $180^\circ$ , tedy poloměr  $r$ . Hodnota  $\sin 30^\circ = 1719'$  je poloviční délka poloměru a hodnota  $\sin 45^\circ = 2431'$  byla spočítána z Pythagorovy věty pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, viz obr. 1.12. Následně



Obrázek 1.12:  $\sin 30^\circ = |BD|$  a  $\sin 45^\circ = |FH|$

hodnoty sinů pro další úhly do tabulek Indové doplnili pomocí jim známého vztahu pro sinus polovičního oblouku (který jsme uvedli výše), až dospěli k hodnotě  $\sin 3,75^\circ$ . Poté počítali siny doplňků těchto úhlů a polovin těchto doplňků atd.

Do 12. století žádný indický astronomický text neobsahoval tabulky trigonometrických veličin pro úhly menší než  $3,75^\circ$ . Podstatně přesnější tabulky sinů s nejmenším úhlem  $1^\circ$  sestavil až Bháskara (1114 – ?), který počítal se stejnou hodnotou poloměru  $r = 3438'$  a položil  $\sin 1^\circ = 60'$ . Využil tedy přiblížení  $\sin \alpha \approx \alpha$ , které, jak je známo, platí pro malá  $\alpha$  právě v obloukové míře.

Praktické úlohy, které Indové řešili, byly věnované měření vzdáleností a výšek pomocí vertikální tyče – gnómonu a pomocí podobnosti. Gnómon a jeho projekce (stín) tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, vedou tedy k trigonometrickým úlohám. Početná stránka těchto úloh předcházela zavedení veličin *tangens* a *kotangens*. Setkáváme se však s nimi až v první polovině 9. století v dílech učenců arabského chalífátu.

### 1.2.2 Trigonometrie v arabských zemích

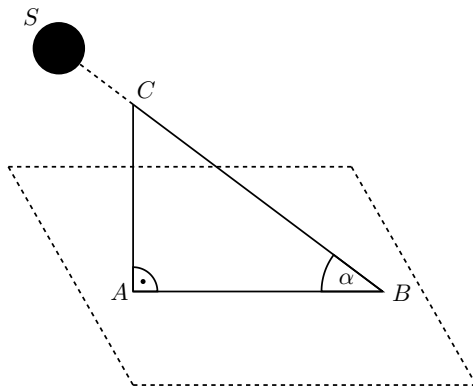
Arabská matematika byla nejvíce ovlivněna matematikou mezopotámskou, řeckou a indickou. Z indické matematiky převzala zápis čísel a algoritmy pro písemné počítání, z řecké matematiky abstraktní geometrii a myšlenku axiomatické výstavby matematiky, z mezopotámského a egyptského světa převzala tradici numericky náročných výpočtů a především důraz na užití matematiky v praktickém životě. Desítkový poziční systém pronikal pomalu na Blízký východ a byl používán vedle domácích systémů.

Pro rozvoj matematiky měla základní význam hlavní přírodní věda té doby – astronomie. Není tedy divu, že stejně jako v Indii, rovněž v islámských zemích byli matematikové většinou i astronomy. Článkem, který spojoval matematiku a astronomii, byla právě trigonometrie.

Základ arabských trigonometrických znalostí tvořila díla předchůdců starších kultur – jedna

z indických *Siddhāntas*, Ptolemaiův *Almagest* a Menelaova *Sférika*. Inspirováni jejich výsledky a metodami zavedli arabští učenci některé nové trigonometrické pojmy, prozkoumali vlastnosti trigonometrických veličin a vyřešili všechny případy rovinných a sférických trojúhelníků. Tím postupně propracovali trigonometrii jako samostatnou oblast matematiky.

Přístupem k tomu hlavnímu, čím konkrétním přispěli arabští učenci k rozvoji trigonometrie – zavedli nové veličiny *tangens*, *kotangens* a také *sekans* a *kosekans*. Tyto trigonometrické veličiny se



Obrázek 1.13: Svislá tyč a její stín

v islámských dílech objevily v devátém století v souvislosti s gnómonikou, tedy nikoli v souvislosti s tětivami a oblouky vztahujícími se ke kruhu, jak tomu bylo u veličin sinus a kosinus. Na obrázku 1.13 vidíme Slunce  $S$  a tyč  $AC$  kolmo k povrchu Země. Tyč  $AC$  vrhá stín  $AB$ , z jehož konce  $B$  je vrchol  $C$  tyče vidět pod výškovým úhlem, který označíme  $\alpha$ . Za předpokladu, že  $|AC| = 1^\circ = 60'$ , závisí délka stínu  $|AB|$  i délka  $|BC|$  slunečního paprsku mezi body  $B$  a  $C$  pouze na úhlu  $\alpha$ . Tyto dvě Araby zavedené veličiny dnes nazýváme *kotangens*, respektive *kosekans*:

$$\cotg \alpha = |AB|, \quad \operatorname{cosec} \alpha = |BC|.$$

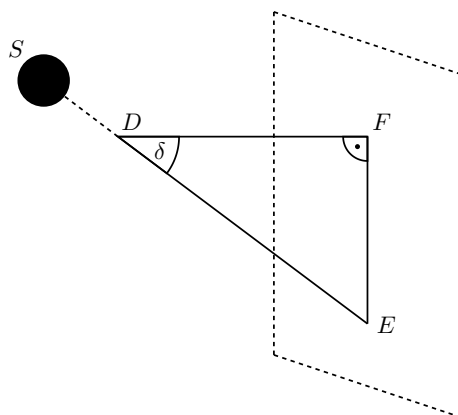
Velichiny tangens a sekans definovali arabští učenci podobně. Tentokrát upevnili tyč  $DF$  kolmo na svislou zeď, aby byla vodorovná, tj. rovnoběžná se zemským povrchem (viz obr. 1.14). Tyč  $DF$  vrhá stín  $EF$ . Z vrcholu tyče  $D$  je konec  $E$  stínu vidět pod úhlem, který označíme  $\delta$ . Za předpokladu, že  $|DF| = 1^\circ = 60'$ , závisí délka stínu  $|EF|$  i délka  $|DE|$  slunečního paprsku mezi body  $D$  a  $E$  pouze na úhlu  $\delta$ . Tyto dvě veličiny dnes nazýváme *tangens*, respektive *sekans*:

$$\operatorname{tg} \delta = |EF|, \quad \operatorname{sec} \delta = |DE|.$$

Ještě jednou poznamenejme, že ve středověkých arabských zemích byly trigonometrické veličiny délky (kotangens se nazýval *prvním*, tangens *druhým stínem*), jejichž mírou byly (obloukové) stupně. Dnes jsou to samozřejmě čísla. Zdůrazněme, že Arabové tyto veličiny přiřazovali pouze úhlům z intervalu  $(0, 90^\circ)$ .

Systematický výklad všech nových trigonometrických veličin ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sinvers}$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\cotg$ ,  $\operatorname{sec}$ ,  $\operatorname{cosec}$ ) najdeme v astronomické práci *Zdokonalení Almagestu*, napsané již koncem 9. století al-Battáním. Je v ní odvozena řada vztahů, mezi nimi vyjádření tangens a kotangens pomocí poměrů sinu a kosinu ve tvaru

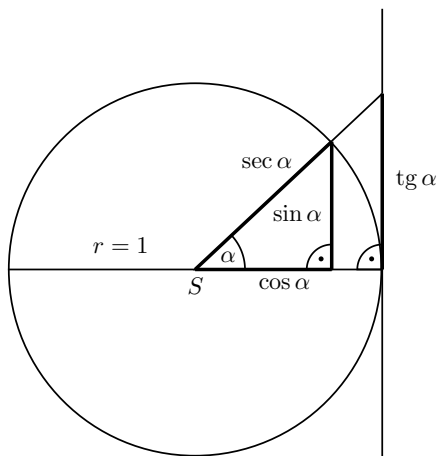
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{a} \quad \frac{\cotg \alpha}{r} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$



Obrázek 1.14: Vodorovná tyč a její stín

(Znovu upozorňujeme na neobvyklý jmenovatel  $r$ .) Přes tyto dva jednoduché převodní vztahy veličiny tangens a kotangens neztratily svůj význam, naopak našly rychle mnohá uplatnění i mimo gnómoniku (zejména v astronomii), takže tabulky jejich hodnot byly velmi potřebné.

Asi sto let po *Zdokonalení Almagestu* se objevily ještě propracovanější základy trigonometrie v *Knize dokonalosti* astronoma Abu'l-Wafy (940 – 997), který v ní definoval (patrně historicky



Obrázek 1.15: Trigonometrické veličiny na jednotkové kružnici

poprvé) všechny trigonometrické veličiny jednotně pomocí kružnice způsobem, který je nám dobře znám a který je pro ostrý úhel  $\alpha$  znázorněn na obr. 1.15. Je na něm také krásně vidět původ termínů tangens a sekans, které pocházejí z latiny a které se objevily v Evropě až v 16. a 17. století. Výraz tangens totiž v doslovném překladu znamená „dotýkající se, tečný“ a termín sekans má české synonymum „protínající, sečný“.

S použitím trigonometrie se nesetkáváme u islámských autorů jen v oblasti astronomie, ale také v matematické geografii u perského kartografa a cestovatele al-Bírúního (973 – 1048). Jeho dílo o jedenácti knihách *Masúdosvský kánón* zaujímá velmi důležité místo v historii trigonometrie. Je jí totiž věnována celá třetí kniha. Al-Bírúní zde nejdříve pro  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$  spočítal délky stran pravidelných  $n$ -úhelníků vepsaných do kružnice o daném poloměru a následně při  $n = 9$  pro tuto délku odvodil kubickou rovnici. Dále se věnoval důkazům vět o délkách třetiv, které jsou ekvivalentní větám o sinu součtu a rozdílu dvou úhlů, sinu dvojnásobku úhlu, sinu poloviny úhlu atd. Mimo jiné al-Bírúní také vyvinul nové metody přibližných výpočtů hodnot jako je např.  $\text{tet } 1^\circ = 2 \sin 0,5^\circ$ , kterou využil k sestavení velmi přesných tabulek hodnot sinů a tangens, mimochodem jedněch z prvních, které jsou vypočteny pro poloměr  $r = 1$ . Tento výběr al-Bírúní komentuje přáním zbavit se neustálého dělení a násobení šedesáti. Poznamenejme, že v Evropě to ve 14. století byl Thomas Bradwardinus, který jako první doporučil brát délku poloměru  $r = 1$ .

Nejznámější orientální učenec v oblasti trigonometrie byl Nasír ad-Dín at-Túsi (1201 – 1274) se svým hlavním dílem o pěti knihách *Traktát o úplném čtyřstranu*. Je to první práce, ve které již trigonometrie nebyla pouhým pomocníkem astronomie, ale ve které se učení o řešení trojúhelníka považuje za samostatnou oblast matematiky. At-Túsi ve svém díle vybudoval první skutečně úplnou a celistvou soustavu rovinné i sférické trigonometrie od základních pojmů a vztahů až k algoritmům řešení všech typických úloh. O rovinné trigonometrii pojednává pouze třetí z pěti knih. Můžeme se v ní například setkat s úlohou vyjádřenou dvojicí rovnic

$$x \pm y = d \quad \text{a} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = p,$$

kde  $x$  a  $y$  jsou neznámé úhly,  $d$  daný úhel a  $p$  dané číslo. K těmto soustavám, kterým se dnes říká *Snellovy*, se vrátíme v kapitole 4 při řešení příkladu 4.5.1.

Podívejme se nyní, jaké nové početní postupy vyvinuli arabští učenci pro sestavování tolik potřebných trigonometrických tabulek, které byly zahrnovány do tzv. „zídž“, což bychom přeložili jako sbírky tabulek pro astronomy a geografy. Nejstarší dochované arabské trigonometrické tabulky z 9. století (jedny sestavené al-Chwárizmím, druhé al-Habašem) byly jako i u většiny pozdějších arabských autorů vyčísleny pro poloměr  $r = 60$  a z hlediska metod i přesnosti byly srovnatelné s tabulkami Ptolemaia. Ten, jak jsme dříve podrobně popsali, klíčovou hodnotu  $\text{tet } 1^\circ$  získal z hodnot  $\text{tet } 0,75^\circ$  a  $\text{tet } 1,75^\circ$  postupem, jehož meze přesnosti odpovídají tomu, že na intervalu  $(0,75^\circ; 1,75^\circ)$  nahradíme funkci  $\alpha \mapsto \text{tet } \alpha$  funkcí lineární. S novátorstvím v tomto ohledu přišel až Abu'l-Wafá, který v již vzpomenuté *Knize dokonalosti* pro svou tabulku sinů s krokem  $0,25^\circ$  provedl výpočet klíčové hodnoty  $\sin 0,5^\circ$  nikoliv ze dvou, ale tří blízkých hodnot  $\sin \alpha$ , a to pro úhly  $\alpha$  rovné ve stupních zlomkům  $\frac{12}{32}$ ,  $\frac{15}{32}$  a  $\frac{18}{32}$ . Tyto tři hodnoty sinů je možné určit ze vzorců pro sinus rozdílu a sinus polovičního úhlu a ze známých hodnot sinu, a to díky rovnostem  $12 = 72 - 60$ ,  $15 = 45 - 30$ ,  $18 = 36 : 2$  a díky tomu, že platí  $32 = 2^5$ . Na základě pravidla

$$0^\circ < \alpha < \beta < \beta + \delta < 90^\circ \Rightarrow \sin(\alpha + \delta) - \sin \alpha > \sin(\beta + \delta) - \sin \beta,$$

které je geometricky dokázáno v [5, str. 305] a které vyjadřuje, že funkce sinus je na intervalu  $(0^\circ; 90^\circ)$  konkávní, pak Abu'l-Wafá získal odhady

$$\sin \alpha + \frac{\sin(\alpha + 3\delta) - \sin \alpha}{3} < \sin(\alpha + \delta) < \sin \alpha + \frac{\sin \alpha - \sin(\alpha - 3\delta)}{3},$$

které ho volbou  $32\alpha = 15^\circ$  a  $32\delta = 1^\circ$  po dlouhých a náročných výpočtech přivedly k hodnotě  $\sin 0,5^\circ$  s obdivuhodnou přesností (řádově  $10^{-8}$ ).

Zdůrazněme, že jak Ptolemaius, tak i Abu'l-Wafáův postup určování klíčové hodnoty ze dvou



či tří vstupních hodnot má přesnostní bariéru: klíčovou hodnotu nemůžeme výpočtem dostat s libovolnou přesností (na které by mohla záviset délka výpočtů), i kdybychom měli vstupní hodnoty sebezpřesnější. Je pozoruhodné, že později al-Bírúní v 11. století a Marjám Čelebí v 15. století popsal postupy, kterými lze tuto bariéru překonat. Popíšeme v samotném závěru této části podstatu výpočtu Marjáma Čelebího (metodu však vymyslel jeho dědeček al-Kaší, jehož dílo se však nedochovalo), protože je zajímavě spojena s úlohou o trisekci libovolného úhlu a numerickým řešením kubických rovnic.

Marjám Čelebí nejprve poměrně snadno vypočetl (jedinou!) vstupní hodnotu  $v = \sin 3^\circ$ , kterou lze s libovolnou přesností určit z hodnot  $\sin 72^\circ$  a  $\sin 60^\circ$ . Klíčovou hodnotu  $x = \sin 1^\circ$  pak Čelebí počítal ze vztahu

$$4 \sin^3 1^\circ + \sin 3^\circ = 3 \sin 1^\circ,$$

tedy cestou řešení kubické rovnice  $4x^3 + v = 3x$  s parametrem  $v$ . K numerickému výpočtu kořenů podobných rovnic vymyslel al-Kaší jednoduchý iterační algoritmus se zaručenou konvergencí k hledanému kořenu ([5, str. 317–318]). Dnes je patrné, že uvedený vztah mezi hodnotami  $\sin 3^\circ$  a  $\sin 1^\circ$  je okamžitým důsledkem vzorce pro sinus trojnásobného úhlu

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

který ovšem takto trigonometricky patrně zapsal až F. Viète. Marjám Čelebí ovšem získal vztah hodnot  $\sin 3^\circ$  a  $\sin 1^\circ$  z tzv. rovnice pro trisekci úhlů ([5, str. 314–316]), tedy rovnice pro slavnou antickou úlohu o rozdělení libovolného úhlu na tři menší shodné úhly, která byla známa v arabských zemích od 11. století. Konkrétním výpočtem dosáhl Čelebí hodnoty  $\sin 1^\circ$  s přesností  $10^{-10}$ .

Stejně jako matematici islámských zemí převzali vše již objevené od Indů, Řeků, Syřanů a Babylóňanů, tak i učenci středověké Evropy, než začali sami svými příspěvky obohacovat vědu, sáhli nejdříve po písemnostech předchozích kultur. Mohli tak začít stavět své výsledky na pevném základě.

### 1.3 Trigonometrie v Evropě 15. – 17. století

Po šesti stoletích vědecky neplodného raného středověku (konec 5. až začátek 12. století), kdy se evropští učenci zabývali výhradně náboženskými a scholastickými úvahami, nastalo v Evropě postupné ožívání věd a umění, které bylo spojeno se vznikem městské kultury. V době obchodních výprav a křížáckých válek se Evropané seznámili nejen s vymoženostmi východní kultury, ale i s kulturními poklady dávno zapomenutého antického světa. To vše dalo mohutný podnět k samostatné tvůrčí činnosti evropských učenců. Pozvolna začíná jedno z nejkrásnějších a na památky nejbohatších období v dějinách Evropy – renesance.

Neopomenutelný význam pro rozvoj matematiky měly překlady z řečtiny a arabštiny do jazyka latinského, který se stal společným pro všechny západoevropské učence té doby. Například do latiny přeložený Ptolemaïův *Almagest* (z řečtiny i arabštiny) mohli středověcí evropští matematici a astronomové studovat již ve druhé polovině 12. století.

Podoba a přehlednost trigonometrických tabulek ve středověké Evropě byly závislé na způsobu zapisování čísel a jejich vyjadřování zlomky. S naší moderní desítkovou poziční soustavou a s indo-arabskými číslicemi byla Evropa seznámena v 8. století. Tento indo-arabský systém nebyl ihned přijat širokou veřejností, která dávala přednost zápisům čísel pomocí římských číslic. Nicméně evropští učenci vnímali výhodu nového systému a nadšeně ho obhajovali. Hlavně díky výkladu o indo-arabských číslicích v díle *Liber abaci* (1202) od Leonarda Pisánského získala desítková poziční soustava všeobecnou podporu ve vědeckých kruzích.

První trigonometrické tabulky využívající nového systému byly sestaveny okolo roku 1460 rakouským astronomem a matematikem Georgem Peurbachem (1423 – 1461). Narozdíl od Ptolemaia, který položil poloměr kruhu  $r$  rovný 60 jednotkám a následně délky třetiv vyjadřoval pomocí šedesátinných zlomků, Peurbach kombinoval systém o základu šedesát se systémem o základu deset. Zvolil poloměr kruhu  $r = 600\,000$  jednotek a hodnoty trigonometrických veličin vyjadřoval celými čísly v desítkovém systému. Peurbachův žák Regiomontanus, o němž se více zmíníme v této podkapitole, nejdříve zvětšil poloměr kruhu na  $r = 6\,000\,000$ , ovšem velice brzy se šedesátkového systému vzdal a roku 1467 sepsal první čistě desetinné trigonometrické tabulky při poloměru kruhu  $r = 10^7$ . Hodnoty trigonometrických veličin byly opět zapisovány celými čísly. Při přechodu od  $r = 10^7$  ke konečnému  $r = 1$ , jak je tomu dnes, se význam těchto tabulek neztratil: zapsaná celá čísla se stala čitateli desetinných zlomků (desetinná čárka se posunula o sedm míst doleva). Ke skutečnému přechodu k desetinným zlomkům dospěl ve svých trigonometrických tabulkách až F. Viète. Pro zajímavost uvedeme Viětův zápis hodnoty jedné z goniometrických veličin (při  $r = 10^5$ ):

$$\sin 60^\circ = 86,602|540,37.$$

Svislá čára odděluje čitatele zlomku od celého čísla (jmenovatele Viète vynechává) a čárky slouží k seskupování řádů od nuly vždy po třech. Dnes bychom jeho výsledek zapsali smíšeným číslem ve tvaru  $\sin 60^\circ = 86602\frac{54037}{10^5}$ .

Až do 16. století stáli u rozvoje trigonometrie hlavně astronomové. Není tedy žádným překvapením, že jím byl i vynikající německý matematik Johannes Müller alias Regiomontanus (1436 – 1476), který napsal dílo *O trojúhelnících všelikých knih patero* – první evropskou práci, v níž byla trigonometrie chápána jako samostatná matematická disciplína. V této významné práci, která se skládala z pěti knih, Regiomontanus metodicky uspořádal trigonometrické znalosti Ptolemaia a indických a arabských učenců. První kniha začíná zavedením základních pojmů. Funkce sinus je zde uvedena po vzoru indické definice. Ta pravá trigonometrie (tedy řešení obecných trojúhelníků) se objevuje až v knize druhé. Sinová věta, stejně tak jako všechna ostatní pravidla, je uvedena pomocí slovních spojení, nikoli v symbolech. Objevuje se zde také poprvé vzorec pro obsah  $S$  trojúhelníka  $ABC$  ve tvaru

$$S = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

Je neobvyklé, že Regiomontanus nikdy nepoužil funkci tangens, přestože ji musel znát, ať už od svého blízkého přítele Peurbacha, nebo z arabských výpočtů stínů.

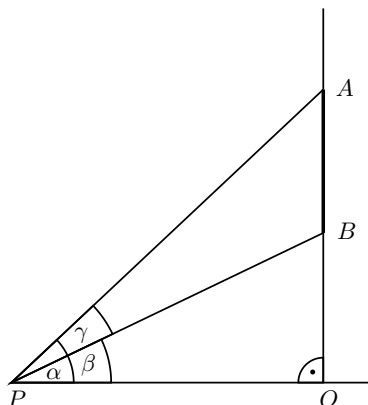
Zbývající tři knihy pojednávají o sférické geometrii a trigonometrii – obou nezbytných nástrojích astronomie. Regiomontanus celé dílo dokončil roku 1464, avšak publikováno bylo až roku 1533.

Nyní se zmíníme o jedné Regiomontanově úloze, v níž se hledá maximum. Byla to mimořádně první úloha tohoto druhu od dob starořecké matematiky. Jelikož žil Regiomontanus dvě stě let před objevením diferenciálního počtu, problém řešil elementární metodou. Zadání zní: Tyč  $AB$  dané délky je zavěšena svisle tak, že se nedotýká podlahy. Vzdálenost mezi spodním koncem tyče  $B$  a podlahou je dána délkou úsečky  $BO$  (viz obr. 1.16). Otázka zní: V jaké vzdálenosti od bodu  $O$  se nachází na podlaze bod  $P$ , z něhož je tyč vidět pod největším úhlem  $\gamma$ ?

Regiomontanus pro své řešení vyjádřil poměr  $\cos \gamma : \sin \gamma$  (veličiny tangens a kotangens nepoužíval) ve tvaru součtu dvou zlomků, který bychom dnes pomocí vzorce pro kotangens rozdílů úhlů  $\alpha, \beta$  z obrázku odvodili takto:

$$\cotg \gamma = \cotg(\alpha - \beta) = \frac{\cotg \alpha \cotg \beta + 1}{\cotg \beta - \cotg \alpha} = \frac{\frac{|PO|}{|AO|} \frac{|PO|}{|BO|} + 1}{\frac{|PO|}{|BO|} - \frac{|PO|}{|AO|}} = \frac{|PO|}{|AO| - |BO|} + \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO| - |BO|) \cdot |PO|}.$$

Největší možný úhel  $\gamma$  odpovídá nejmenší možné hodnotě  $\cotg \gamma$ . Základem dalšího Regiomontanova postupu pro odhad součtu dvou zlomků byla užitečná nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým



Obrázek 1.16: Extremální Regiomontanova úloha

průměrem dvou kladných čísel  $u$  a  $v$ . Tato nerovnost  $\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{u \cdot v}$  se stane rovností právě tehdy, když kladná čísla  $u$  a  $v$  jsou si rovna. Položíme-li  $u = \frac{|PO|}{|AO| - |BO|}$  a  $v = \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO| - |BO|) \cdot |PO|}$ , obdržíme

$$\cotg \gamma = u + v \geq 2\sqrt{u \cdot v} = 2\sqrt{\frac{|PO|}{|AO| - |BO|} \cdot \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO| - |BO|) \cdot |PO|}} = \frac{2\sqrt{|AO| \cdot |BO|}}{|AO| - |BO|}.$$

Nejmenší hodnota  $\cotg \gamma$  tedy nastane, když bude platit  $u = v$ :

$$\frac{|PO|}{|AO| - |BO|} = \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO| - |BO|) \cdot |PO|},$$

$$|PO| = \sqrt{|AO| \cdot |BO|}.$$

Hledaný bod  $P$  je umístěn od bodu  $O$  ve vzdálenosti, která je rovna geometrickému průměru výšek bodů  $A$  a  $B$  měřených od podlahy. V geometrické interpretaci je takový bod  $P$  bodem kružnice, která prochází koncovými body  $A, B$  tyče a dotýká se přímky podlahy právě v bodě  $P$ . Výsledek rovinné úlohy se svislou tyčí se pro Regiomontana stal rovněž motivací pro další velice zajímavou, tentokrát prostorovou úlohu o nalezení nejpříznivější pozice pro pohled do daného okna budovy.

V první polovině 17. století se o podstatný přínos pro praxi trigonometrických výpočtů zasloužil anglický matematik John Napier (1550 – 1617), když roku 1614 objevil logaritmy. Myšlenka zavedení logaritmů má své kořeny právě u výpočtů podle trigonometrických vzorců, a to ve snaze převést součin či podíl trigonometrických veličin na jejich součet nebo rozdíl. Astronomové si totiž uvědomili, že počítání bude jednodušší a kratší, když hledané součiny a podíly vypočítají pomocí sčítání a odčítání.

Dnes mluvíme o logaritmech jako o funkcích jejich základu a logaritmovaného čísla. Hlavním zájmem Napierovy doby však bylo sestavení logaritmických tabulek. Mezi všemi průkopníky byl John Napier (autor samotného termínu „logarithmus“) první, který sestavil tabulky logaritmů hodnot sinů.<sup>1</sup> Znovu připomeňme, že ještě v 17. století byly hodnoty sinu stále chápány jako délky. Aby

<sup>1</sup>O významu trigonometrických výpočtů v tehdejší době svědčí i skutečnost, že přímé tabulky logaritmů čísel (a ne sinů) se objevily až o několik let později.



Obrázek 1.17: John Napier

dostal Napier požadovanou přesnost, položil  $\sin 90^\circ = r = 10^7$  (stejně jako Regiomontanus). Na ukázkou uvedeme jeden řádek z Napierovy tabulky, která sestává ze sedmi sloupců.

$34^\circ 40'$	5 688 011	5 642 242	3 687 872	1 954 370	8 224 751	$55^\circ 20'$
----------------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	----------------

První sloupec udává velikost úhlu  $\alpha$ , druhý hodnotu sinu pro daný úhel  $\alpha$ . V posledním sloupci se dočteme velikost úhlu doplňkového ( $90^\circ - \alpha$ ) a v předposledním hodnotu  $\sin(90^\circ - \alpha)$ , což je hodnota  $\cos \alpha$  (hodnoty sinu a kosinu jsou tedy přirozená čísla menší než  $10^7$ ). Třetí resp. pátý sloupec uvádí tzv. Napierovy logaritmy sinu ze druhého resp. kosinu ze šestého sloupce. Podle této (dnes již zapomenuté) konstrukce se „logaritmem“ čísla  $x$  nazývalo číslo  $y = \text{NapLog } x$  určené rovností  $x = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^y$ . Konečně prostřední sloupec udává hodnotu rozdílu zápisů ve třetím a pátém sloupci, rovnou hodnotě Napierova logaritmu pro tangens úhlu v prvním sloupci:

$$\text{NapLog}(\sin \alpha) - \text{NapLog}(\cos \alpha) = \text{NapLog} \left( 10^7 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \text{NapLog}(\text{tg } \alpha).$$

(Pro rozdíl Napierových logaritmů platí pro nás méně obvyklý vzorec  $\text{NapLog}(a) - \text{NapLog}(b) = \text{NapLog}(10^7 \cdot \frac{a}{b})$ . O činiteli  $r$  ve vztahu  $\text{tg } \alpha = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  jsme psali v části 1.2.2.) Jednotlivé řádky Napierovy tabulky odpovídají hodnotám úhlu  $\alpha$  s krokem 1 minuta.

Pro zajímavost numericky ověříme hodnotu z třetího sloupce uvedeného řádku Napierovy tabulky:

$$y = \text{NapLog}(5\,688\,011) \Leftrightarrow 5\,688\,011 = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^y.$$

Poslední rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé  $y$ :

$$y = \frac{\ln \frac{10^7}{5\,688\,011}}{\ln \frac{10^7}{10^7-1}}.$$

Jmenovatel posledního zlomku je velmi malé kladné číslo:

$$\ln \frac{10^7}{10^7-1} = \ln \left( 1 + \frac{1}{10^7-1} \right) \doteq \frac{1}{10^7-1} \text{ podle vzorce } \ln(1+x) \doteq x,$$

takže pro hodnotu  $y = 5\,642\,242$  z Napierovy tabulky nám vychází

$$y \doteq (10^7 - 1) \cdot \ln \frac{10^7}{5\,688\,011} \doteq 5\,642\,244.$$

Další postava z přelomu 16. a 17. století, která se zasloužila o přetvoření celé matematiky, a tedy i trigonometrie, do podoby, jak ji známe dnes, není nikdo jiný než velký francouzský aritmetik



Obrázek 1.18: Francois Viète

a algebraik, ale také geometr a především velký právník a advokát, Francois Viète (1540 – 1603). Jeho nejdůležitější dílo *Úvod do analytického umění* z roku 1591 je považováno za nejranější práci o symbolické algebře, ve které se čtenář seznamuje se systémem zápisu matematických vztahů, který odpovídá tomu našemu dnešnímu. Známé veličiny Viète označuje souhláskami a neznámé samohláskami, rovnici definuje jako porovnání neznámé veličiny s veličinou pevně danou a podává základní pravidla pro řešení rovnic. Tento Viětův přínos – přechod od slovní k symbolické algebře – je jeden z nejdůležitějších počínů v historii matematiky.

Nás ovšem především zajímá Viětův přínos v oblasti trigonometrie. Stejně tak jako byl Viète úspěšným zakladatelem symbolické algebry, může být také oprávněně nazýván otcem celkového analytického přístupu k trigonometrii. Ve svém díle *Canon mathematicus* z roku 1579 zhotovil rozsáhlé tabulky všech šesti trigonometrických veličin pro úhly blízké jedné minutě. Viète v nich dal přednost desetinným zlomkům před šedesátinnými. Aby se ovšem vyhnul zápisům tisíců zlomků, vybral si pro tvorbu sinových a kosinových tabulek hodnotu  $r = \sin 90^\circ = 100\,000$ .

Při řešení ostroúhlých trojúhelníků Viète objevil tvrzení ekvivalentní tangentové větě, o které pojednáme v podkapitole 3.5 a kterou dnes zapisujeme vzorcem

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

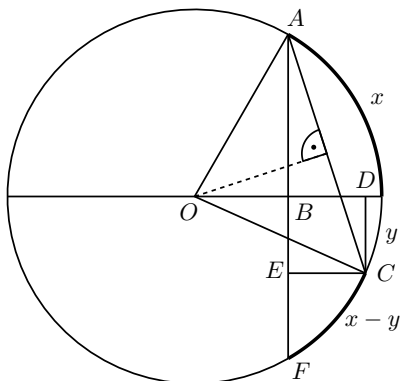
a která měla po staletí velký význam, neboť narozdíl od kosinové věty umožnila při trigonometrických výpočtech užívat logaritmy. Ačkoliv byl Viète možná prvním, kdo zmíněnou formuli používal, poprvé vyšla tiskem až roku 1583 v díle *Geometria rotundi* od autora Thomase Fincka.

V době Viètea se objevovaly v celé Evropě různé druhy dalších trigonometrických vzorců, které měly za následek snížení pracnosti výpočtů při řešení trojúhelníků. Mezi nimi byla také skupinka vzorců, pomocí kterých se dal součin či podíl převést na součet či rozdíl (nebo naopak). Pomocí obr. 1.19 odvodíme spolu s Vièteem alespoň jeden z nich. Obloukům délek  $x, y$  odpovídají hodnoty  $\sin x = |AB|$  a  $\sin y = |CD|$ . Potom platí

$$\sin x + \sin y = |AB| + |CD| = |AE| = |AC| \cos \frac{x - y}{2} = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

přítom v posledním kroku jsme využili, že  $AC$  je základnou rovnoramenného trojúhelníku  $OAC$  s úhlem  $x + y$  při vrcholu  $O$ . Když zavedeme substituce  $A = \frac{x+y}{2}$  a  $B = \frac{x-y}{2}$ , obdržíme užitečnější tvar

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B.$$



Obrázek 1.19

Podobným způsobem lze odvodit vztahy

$$\begin{aligned}\sin(A + B) - \sin(A - B) &= 2 \cos A \sin B, \\ \cos(A + B) + \cos(A - B) &= 2 \cos A \cos B, \\ \cos(A - B) - \cos(A + B) &= 2 \sin A \sin B.\end{aligned}$$

Jeden z těchto vzorců – převod součinu kosinů na jejich součet – byl znám již arabským učencům, ovšem až koncem 16. století, a to hlavně zásluhou Viëta, se všechny tyto vztahy staly široce užívanými. Když například chtěl někdo vynásobit dvě čísla 98,436 a 79,253, přiřadil polovinu prvního čísla a číslo druhé kosinům  $\cos A = 49,218$  ( $49,218 = \frac{98,436}{2}$ ) a  $\cos B = 79,253$  a z tehdy dostupných tabulek pro trigonometrické veličiny zjistil úhly  $A$  a  $B$ . Z tabulek vyhledal hodnoty  $\cos(A + B)$  a  $\cos(A - B)$  a jejich sečtením získal kýžený součin zadaných čísel 98,436 a 79,253. Poznamenejme, že součin byl nalezen bez použití operace násobení a bez logaritmě. Aplikací výše zmíněných vztahů na výpočet součinu dvou čísel jsme zřejmě moc času a energie neušetřili. Když si však připomeneme, že trigonometrické tabulky v té době s více jak deseti nebo patnácti platnými číslicemi nebyly nijak neobvyklé, práci šetřící možnost využít vztahy pro převod součinu na součet se stala stále více vyslovovanou. S podíly bylo možno zacházet stejným způsobem, tentokrát za dopomoci tabulek pro sekans a kosekans.

Asi nikde není Viëtovo zobecnění ryzí trigonometrie na analytickou teorii goniometrických funkcí výraznější než ve spojitosti s jeho vzorcí pro  $n$ -násobný úhel. Vztahy pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu byly známy již Ptolemaiovi a vztahy pro trojnásobný úhel mohly být jednoduše odvozeny z Ptolemaiových vzorců pro sinus a kosinus součtu dvou úhlů. Pouze s velkým úsilím bychom s pomocí Ptolemaiových pravidel dospěli ke vztahům pro  $\sin nx$  a  $\cos nx$ . Viëte použil duchaplnou myšlenku týkající se pravoúhlých trojúhelníků a velice známé algebraické identity

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2 = (ad - bc)^2 + (bd + ac)^2$$

k tomu, aby dospěl ke vzorcům pro vícenásobné úhly rovnocenné s těmi, které dnes zapisujeme ve

tvaru

$$\begin{aligned}\cos nx &= \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots, \\ \sin nx &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots\end{aligned}$$

a ve kterých vidíme snadný důsledek Moivreovy věty, o níž pojednáme v podkapitole 1.4.

Jak jsme již zmínili, byl to právě Viète, se kterým si trigonometrie začala osvojovat svůj moderní analytický charakter. Kromě symbolické algebry k tomu přispěla také analytická geometrie, u jejíhož zrodu stáli velikáni jako byl francouzský filosof, matematik a fyzik René Descartes (1596 – 1650) a francouzský matematik Pierre de Fermat (1601 – 1665). Tento objev je skutečně pro goniometrii významný. Uvědomme si, že dnes se goniometrické funkce sinus a kosinus definují pomocí souřadnic bodů na jednotkové kružnici.

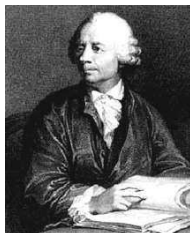
K dalšímu rozvoji trigonometrie a jejímu přerodu v samostatnou matematickou disciplínu, které dnes říkáme goniometrie, přispěla v první polovině 17. století narůstající vlna uplatnění goniometrických funkcí, a to nejenom při triangulačních výpočtech na určování poloh a vzdáleností užívaných nejčastěji pro účely geodézie, navigace, metrologie, astrometrie nebo při řízení palby, ale také v nových oblastech fyziky, které byly od samotné trigonometrie vzdálené. Galileův objev, že každý pohyb může být rozložen na dvě složky podél kolmých čar, volal po užívání trigonometrických veličin. V 17. století, kdy se velice cenila dělostřelecká dovednost, byla velice významnou motivací snaha pomocí výpočtů s goniometrickými veličinami určit místo dostřehu projektilu vystřeleného z kanónu.

V souvislosti s triangulační metodou zmíníme alespoň jednoho holandského astronoma a matematika Willebrorda Snella (1580 – 1626), který se zabýval určováním délek zemských rovnoběžek. Po vyslovení tohoto jména v souvislosti s goniometrií by byl hřích opomenout jeho zákon o lomu světla, který zní: poměr sinu úhlu dopadu a sinu úhlu lomu je pro dvě různá homogenní prostředí stálý a rovný poměru velikostí rychlostí vlnění v jednotlivých prostředích.

Další oblast fyziky, která byla výrazně studována v 17. a 18. století, se zabývala jedním z periodických pohybů – kmitáním. Velké námořní stavby v té době si žádaly stále větší přesnost navigační techniky. To přimělo vědce se zabývat kmitáním kyvadel a pružností různých druhů. Uvedeme alespoň jedno jméno nizozemského fyzika a matematika, který vytvořil teorii fyzikálního kyvadla a zkonstruoval kyvadlové hodiny. Nebyl jím nikdo jiný než Christiaan Huygens (1629 – 1695). S narůstajícím zdokonalováním hudebních nástrojů byli také vědci stále více motivováni zabývat se chvěním (kmitáním) strun, zvonů a dechových píšťal. Při popisech těchto i jiných periodických jevů hrají goniometrické funkce zásadní roli, kterou naznačíme v příkladu 4.7.1. Dalšími aplikacemi goniometrických funkcí uvnitř samotné elementární matematiky se budeme zabývat v závěrečné kapitole celé práce.

## 1.4 Eulerova reforma goniometrie

Leonhard Euler se narodil 15. dubna roku 1707 v Basileji (Švýcarsko). Rozšířil a doplnil všechny oblasti matematického myšlení, mnohé tak dobře a podstatně, jako by byly jím zcela nově vytvořeny. My se v následujícím textu samozřejmě omezíme na Eulerův přínos v jediné disciplíně – goniometrii.



Obrázek 1.20: Leonhard Euler

### 1.4.1 Hlavní rysy Eulerovy reformy

Z obecného pohledu na goniometrii je nejvýraznější Eulerovou zásluhou, že různé (do té doby pouze numericky vyčíslované a tabulizované) trigonometrické hodnoty *přetvořil ve funkce*. Toto tvrzení vzhledem ke složitému historickému vývoji pojmu funkce nyní vysvětlíme a upřesníme.

V dnešní době je termín funkce matematickým názvem pro *zobrazení* z nějaké množiny  $M$  do množiny čísel (většinou reálných nebo komplexních) nebo do množiny vektorů (pak se mluví o vektorové funkci). Je to tedy jakýkoliv předpis, který každému prvku z  $M$  jednoznačně přiřazuje nějaké číslo nebo vektor (hodnotu funkce). Přívlastkem „jakýkoliv“ vyjadřujeme, že předpis nemusí nést žádné známky pravidelnosti či obecnosti, funkční hodnoty pro jednotlivé prvky mohou být vyjádřeny různými vzorci, nemusí být mezi nimi žádná „příbuznost“ původu.

Pro Eulera, od něhož pochází označení  $y = f(x)$  z roku 1748, však pojetí funkce znamenalo existenci jednotného analytického výrazu obsahujícího  $x$ , podle kterého se dá  $y$  vypočítat. Na funkci tedy musela být dána určitá univerzální formule, do které mohlo být za proměnnou  $x$  dosazeno jakékoliv číslo – reálné či komplexní. Euler pak rozděloval funkce na dvě skupiny, a to na funkce *algebraické* a *transcendentní*. Nejjednodušší tvary algebraických funkcí s proměnnou  $x$  podle Eulera jsou:

$$y = a + x, \quad y = a - x, \quad y = ax, \quad y = \frac{a}{x}, \quad y = x^a, \quad y = \sqrt[a]{x},$$

všechny ostatní algebraické funkce dostane jejich skládáním. Transcendentní funkce jsou podle Eulera takové, které nelze úkony algebraickými konečným tvarem vyjádřit. Patří sem funkce exponenciální, goniometrické, logaritmické a cyklometrické. Tak pro dříve výlučně geometricky chápané hodnoty sinu a kosinu Euler objevil analytické formule ve tvaru (nekonečných) řad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Tyto univerzální formule mimo jiné odstranily pochybnosti, jak definovat hodnoty  $\sin x$  a  $\cos x$  pro čísla  $x$ , která nevyjadřují velikost ostrých úhlů.

Do doby Eulerovy bylo v trigonometrii mnoho nedorěšených teoretických otázek. Jak jsme právě naznačili, nebyla ještě vyjasněna otázka znamének goniometrických funkcí úhlů v různých kvadrantech. To bylo příčinou toho, že často vznikal zmatek v převodních vzorcích. Neexistovala ani jednotná symbolika, každý vzorec se odvozoval geometricky pomocí zvláštního náčrtku atd.

Uvedené vzorce zbavily Eulera nutnosti spojovat hodnoty sinu a kosinu s délkami stran pravoúhlého trojúhelníku. Navíc i při této trigonometrické interpretaci právě Eulerovou zásluhou začali lidé považovat goniometrické hodnoty nikoli za *délky* úseček (jako tomu bylo ve starověku a ve středověku), nýbrž za *čísla*, která vyjadřují poměry těchto délek. Tak například číslo 1, největší hodnotu funkce sinus, nazýval Euler *plný sinus*. Zdůrazněme, že podle [2] pro ty, kteří Eulerovy spisy znají, neexistuje žádná pochybnost, že Euler goniometrické funkce jako číselné chápal. Svědčí



o tom i název *Von den transcendenten Zahlgrößen, welche aus dem Kreise entspringen* z německého překladu 8. kapitoly Eulerova díla *Introductio*, které budeme v další části textu popisovat. Přitom je důležité poukázat na fakt, že pro Eulera goniometrické funkce nebyly pouhé podíly délek stran pravoúhlých trojúhelníků, nýbrž skutečné (analytické) funkce proměnného úhlu s číselným vyjádřením v radiánech.

Tím, že se Euler díval na hodnoty goniometrických funkcí jako na čísla bez geometrického rozměru, mohl je začít používat ve vzorcích, aniž by narušil jejich homogenitu. Krásným příkladem je kosinová věta vyjádřená známou rovností  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ , v níž je poslední člen – stejně jako tři předchozí – skalární veličina rozměru rovinného obsahu. Sám Euler o tom píše: „Domnívám se, že jsem první zavedl do algebry sinu a tangenty úhlu tak, aby se s nimi mohlo zacházet jako s ostatními čísly a nerušeně provádět operace všeho druhu.“

Označování stran trojúhelníka malými písmeny latinské abecedy  $a, b, c$ , protějších úhlů pak velkými písmeny téže abecedy  $A, B, C$  umožnilo Eulerovi značně zjednodušit trigonometrické vzorce, které tak nabyly známé symetrie. Těmuh účelu sloužilo Eulerem zavedené zkrácené označení goniometrických funkcí úhlu  $z$  znaky  $\sin .z$ ,  $\cos .z$ ,  $\text{tang} .z$ ,  $\text{cot} .z$ ,  $\text{sec} .z$ ,  $\text{cosec} .z$  nebo  $\sin .A.z$ ,  $\cos .A.z$  atd. Písmeno  $A$  u posledních zápisů je počátečním písmenem latinského slova „arcus“ – oblouk. Tu a tam se také v jeho spisech vyskytuje  $\sin .v.z$  namísto  $\text{sinvers}$  („sinus versus“ – latinsky – vzepětí oblouku, hodnota daná vzorcem  $v = \text{versin} \alpha = 1 - \cos \alpha$ ). My však budeme Eulerem odvozené vztahy zapisovat tak, jak jsme zvyklí v dnešní době.

Byl to právě L. Euler, který sestavil řadu analytických rovností, které goniometrické funkce splňují. Některé z nich v další části textu vypíšeme. Nyní upozorníme pouze na významný Eulerův objev, že funkce  $\sin x$ ,  $\cos x$  a  $e^x$  splňují v oboru komplexních čísel jednoduchý a nečekaný vztah

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Přestože Euler nenapsal žádné samostatné dílo věnované ucelenému výkladu goniometrických funkcí, jeho práce byly již v 18. století vědeckým podkladem pro sestavení některých učebnic trigonometrie a goniometrie, na svou dobu velice pokrokových. Jednou z prvních byla např. učebnice akademika M. J. Golovina *Rovinná a prostorová trigonometrie s algebraickými důkazy*, vydaná v Rusku roku 1789. Tato učebnice obsahovala všechny nejdůležitější vzorce pro goniometrické funkce téměř v tom tvaru, v jakém jich používáme v nynější době.

V další části podrobněji popíšeme místa, kde goniometrické funkce vystupují v jedné z Eulerových stěžejních knih, která se stala základní učebnicí infinitezimálního počtu a podnítila další rozvoj matematické analýzy ve druhé polovině 18. století.

### 1.4.2 Introductio in Analysin infinitorum (1748)

Ve svém díle *Úvod do analýzy* z roku 1748 Euler vytvořil z trigonometrie skutečnou vědu o goniometrických funkcích, podal její analytický výklad a odvodil řadu goniometrických vztahů z několika základních vzorců. Jeho postup a výsledky nyní stručně popíšeme.

Goniometrickým funkcím se Euler ve své knize *Introductio* začíná věnovat v 8. kapitole tvořené §126–142. V jejím úvodním paragrafu 126 připomíná měření úhlů pomocí kružnicových oblouků a označuje délku jednotkové polokružnice (vypsanou na 162 desetinných míst) symbolem  $\pi$ . V §127 pak úhlu  $z$  v obloukové míře přiřazuje pomocí bodu na jednotkové kružnici hodnoty  $\sin z$  a  $\cos z$ , vypisuje je pro úhly  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ , uvádí rovnosti

$$\cos z = \sin \left( \frac{\pi}{2} - z \right), \quad \sin z = \cos \left( \frac{\pi}{2} - z \right), \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

a definuje

$$\text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{cotg } z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\text{tg } z}.$$

V dalším paragrafu pak zmiňuje bez důkazu vzorce pro sinus a kosinus součtu a rozdílu dvou úhlů (jež považuje za známé z trigonometrie) a odvozuje vzorce pro hodnoty funkcí po zvětšení nezávislé proměnné o celé periody a poloviny period. K nim ještě v § 129 připojuje vzorce pro hodnoty

$$\sin(2y + z), \sin(3y + z), \sin(4y + z) \text{ a } \cos(2y + z), \cos(3y + z), \cos(4y + z).$$

V § 130 následují vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu, ke kterým se připojují v § 131 rovnosti, pomocí kterých jsou součty a rozdíly  $\sin a$  a  $\sin b$ ,  $\cos a$  a  $\cos b$  převedeny na součiny. Paragraf 132 pak přináší rovnost pro násobení komplexních jednotek

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1} \sin y) = \cos(x + y) \pm \sqrt{-1} \sin(x + y),$$

která je ještě rozšířena na podobnou rovnost pro tři nezávislé proměnné. Protože je zákon tvoření takových součinů ihned rozpoznatelný, Euler pokračuje v následujících paragrafech uvedením vzorce

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}$$

a obdobným vzorcem pro  $\sin nz$ . Odtud v §133 získává pomocí binomické věty známé výrazy pro  $\cos nz$  a  $\sin nz$  ve tvaru mnohočlenů proměnných  $\sin z$  a  $\cos z$ . Tyto rozvoje dnes zpravidla odvozuje oddělením reálných a imaginárních částí v rovnosti

$$\cos nz + i \sin nz = (\cos z + i \sin z)^n,$$

když její pravou stranu rozvineme podle binomické věty. Tato známá rovnost je dnes označována jako Moivreova věta podle matematika Abrahama de Moivre (1667 – 1754), který uvedenou rovnost v roce 1722 objevil, nikdy ji však ve svých pracích nezveřejnil.<sup>2</sup>

Euler dále v §134 pokračuje: pokud je  $z$  oblouk tak malý, že  $\sin z = z$  a  $\cos z = 1$ , a za  $n$  uvažujeme nekonečně velké číslo, takže  $nz$  bude konečný oblouk  $x$ , pak bude  $\sin z = z = \frac{x}{n}$  a ze zmíněných mnohočlenů pro  $\cos nz$ ,  $\sin nz$  dostaneme známé mocninné řady pro  $\sin x$  a  $\cos x$ . Bylo to bez užití integrálního počtu historicky první odvození sinové a kosinové řady, kterými lze analyticky definovat funkce sinus a kosinus a které jsme vypsalí na str. 32. Pokud do těchto řad dosadíme za  $x = \frac{m\pi}{2n}$ , pak dostaneme mocninné řady pro  $\sin \frac{m\pi}{2n}$  a  $\cos \frac{m\pi}{2n}$ , které Euler ještě v §134 vypisuje až k 29., resp. 30. mocnině zlomku  $\frac{m}{n}$  a jejich koeficienty uvádí s přesností na 28 desetinných míst. Tyto řady ostatně oznámil už v roce 1739 v pojednání *Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes, tam naturales, quam artificiales*. V § 135 díla *Introductio* jsou uvedeny řady pro  $\operatorname{tg} \frac{m\pi}{2n}$  a  $\operatorname{cotg} \frac{m\pi}{2n}$ , ve kterých se 13místními koeficienty dochází Euler až k mocnině  $\left(\frac{m}{n}\right)^{25}$ , ovšem bez udání odvození. Zmiňuje, že tyto řady můžeme nacházet pomocí dělení sinových a kosinových řad, později však dodává jiné jejich podrobné odvození. Spočívá v tom, že se snadno určí nulové body funkcí  $\cos \frac{x\pi}{2n} + \operatorname{tg} \frac{m\pi}{2n} \cdot \sin \frac{x\pi}{2n}$  a tyto se pak s jejich pomocí rozvinou v nekonečné součiny. Tím, že pak na druhé straně vypíšeme mocninné řady pro  $\cos \frac{x\pi}{2n}$  a  $\sin \frac{x\pi}{2n}$  a nekonečné součiny roznásobíme, dostaneme pomocí porovnání koeficientů u stejně vysokých mocnin  $x$  součty různých řad, z nichž ta první je tvaru:

$$\frac{\pi}{4mn} \operatorname{tg} \frac{m\pi}{2n} = \frac{1}{n^2 - m^2} + \frac{1}{9n^2 - m^2} + \frac{1}{25n^2 - m^2} + \dots$$

Podobně získáme součet řady

$$\operatorname{cotg} \frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi} \left( \frac{1}{4n^2 - m^2} + \frac{1}{16n^2 - m^2} + \frac{1}{36n^2 - m^2} + \dots \right).$$

<sup>2</sup>[25], str. 83.

Nyní Euler jednotlivé členy těchto řad rozvíjí v nekonečné geometrické řady a po přeskupení sčítanců dostane řadu z mocnin zlomku  $\frac{m}{n}$  opatřených koeficienty tvaru

$$1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \dots \text{ resp. } \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \frac{1}{8^{2k}} + \dots$$

Sčítání takových řad, které se Jakobovi Bernoullimu zdálo býti nepřekonatelnou překážkou, si Euler dovolil již v letech 1734 – 35.

V § 136 a § 137 *Introductia* jsou zmíněny prostředky potřebné k výhodnému sestavování tabulek hodnot goniometrických funkcí na základě dříve odvozených řad. K tomu Euler podotýká, že s pomocí již od Viëta známých vzorců

$$\sin(30^\circ + z) = \cos z - \sin(30^\circ - z) \text{ a } \cos(30^\circ + z) = \cos(30^\circ - z) - \sin z$$

mohou být pouhým sčítáním a odečítáním nalezeny hodnoty sinu a kosinu úhlů převyšujících  $30^\circ$  z hodnot pro úhly menší než  $30^\circ$ . Pak Euler ze vzorce pro  $\text{tg}(\alpha + \beta)$  vyvozuje vzorec

$$\text{tg } 2a = \frac{2\text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \text{ a } \text{cotg } 2a = \frac{\text{cotg } a - \text{tg } a}{2}$$

a ze druhého pro  $a = 30^\circ - b$  dostává třetí vzorec

$$\text{tg}(30^\circ + 2b) = \frac{\text{cotg}(30^\circ - b) - \text{tg}(30^\circ - b)}{2}.$$

Z těchto tří vzorců již můžeme počítat kotangenty a tangenty úhlů převyšujících  $30^\circ$  (z hodnot pro úhly menší než  $30^\circ$ ).

V §138 Euler přináší analytická vyjádření funkcí sinus a kosinus pomocí exponenciální funkce ve tvaru jednoduchých vzorců

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} \text{ a } \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i},$$

jež odvozuje z rovností

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{iv}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{iv}{n}\right)^n}{2} \text{ a } \sin v = \frac{\left(1 + \frac{iv}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iv}{n}\right)^n}{2i} \text{ pro } n = \infty.$$

Na toto odvození Euler patrně přišel po obdržení zprávy, kterou mu napsal Mikuláš I. Bernoulli v dopise ze 13. července 1742. Uvedl v něm, že již v 1728 seznámil svého strýce (Johanna Bernoulliho) se vzorcem

$$\sin nA = \frac{\left(\sqrt{1-z^2} + iz\right)^n - \left(\sqrt{1-z^2} - iz\right)^n}{2i}, \text{ kde } z = \sin A,$$

který pro  $A = \frac{v}{n}$  při nekonečně velkém  $n$  přechází do výše uvedeného vzorce pro  $\sin v$ . Euler však teprve v *Introductio* oba uvedené vzorce pro  $\cos v$  a  $\sin v$  sestavil, udal jejich odvození a jako důsledek ještě získal zápisy komplexních jednotek ve tvaru

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v, \quad e^{-iv} = \cos v - i \sin v.$$

O rok později (1749) opublikoval také vyjádření hodnot  $\sin(x + iy)$  a  $\cos(x + iy)$  z hodnot  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $e^y$ ,  $e^{-y}$ .

V obou následujících paragrafech 139 a 140 Euler doplňuje předchozí skupinu vzorců s komplexními hodnotami funkcí tak, že ještě odvozuje vztah mezi logaritmem a tangentou

$$z = \frac{1}{2i} \ln \frac{\cos z + i \sin z}{\cos z - i \sin z} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \operatorname{tg} z}{1 - i \operatorname{tg} z}.$$

Z toho pak získává pomocí řady

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

řadu pro arkustangens

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

a odtud pak volbou  $x = 1$  Leibnizovu řadu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

V závěrečných paragrafech 141 a 142 celé posuzované kapitoly 8 Euler uvádí některé další řady pro výhodnější výpočet čísla  $\pi$ .

K otázkám řešeným v kapitole 8 *Introductia* se Euler vrací i ve svých pozdějších pracích. Udělejme proto malou odbočku a poznamenejme nejprve, že jako doplněk k výše zmíněným rozvojem hodnot  $\sin n\varphi$  a  $\cos n\varphi$  (vedli jsme je již dříve na str. 31 jako Viětův výsledek) Euler uvádí v pojednání *Subsidium calculi sinuum* (1754) „opačná“ vyjádření mocnin  $\cos^n \varphi$  a  $\sin^n \varphi$  pomocí hodnot  $\cos k\varphi$  a  $\sin k\varphi$ , kde  $0 \leq k \leq n$ :

$$\begin{aligned} 2^{n-1} \cos^n \varphi &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\varphi, \\ 2^{4n-1} \sin^{4n} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k \binom{4n}{k} \cos(4n-2k)\varphi, \\ 2^{4n-2} \sin^{4n-1} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n-1} \binom{4n-1}{k} \sin(4n-2k-1)\varphi, \\ 2^{4n-3} \sin^{4n-2} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n-1} (-1)^{2k+1} \binom{4n-2}{k} \cos(4n-2k-2)\varphi, \\ 2^{4n-4} \sin^{4n-3} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n-2} (-1)^k \binom{4n-3}{k} \sin(4n-2k-3)\varphi. \end{aligned}$$

Do těchto rovností, které jsou správné pro přirozená  $n$ , Euler ale bez rozpaků dosazuje celá záporná  $n$ , aniž by se staral o konvergenci nebo divergenci takto vznikajících nekonečných řad. Tak Euler dospěl k různým nesprávným výsledkům, které zde nebudeme vypisovat. Místo toho ještě uvedeme, že Euler rovněž sestavil rozvoje do podobných řad pro funkce  $\sin^m \varphi \cos^n \varphi$  a nakonec dokázal větu, že pokud lze najít součet řady

$$Z = Az^m + Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} + \dots,$$

mohou být určeny také součty

$$S = A \cos m\varphi + B \cos(m+n)\varphi + C \cos(m+2n)\varphi + \dots,$$

$$T = A \sin m\varphi + B \sin(m+n)\varphi + C \sin(m+2n)\varphi + \dots.$$

K tomu Euler dodává, že pomocí této věty může být sčítáno mnoho řad sestavených ze sinů nebo kosinů násobků téhož úhlu. V příkladech, které uvádí, jsou poprvé vyjádřeny racionální funkce nezávislé proměnné (tedy úhlu) pomocí takových řad. Mnoho let poté (1773 a 1776) se Euler opět k této větě vrátil.

Tyto výzkumy o funkcích úhlů, které vytvářejí aritmetické posloupnosti, Eulera později přivádějí ke studiu vztahů mezi funkcemi takových úhlů, které jsou členy geometrických posloupností. Euler přitom vychází z rovnosti

$$s = \frac{\sin s}{\cos \frac{s}{2} \cos \frac{s}{4} \cos \frac{s}{8} \dots},$$

kterou zveřejnil v roce 1737, a dostává některé řady, které mu pak posloužily k výpočtu  $\pi$ .

Velkou roli v Eulerových analytických výzkumech sehrála vyjádření trigonometrických funkcí nekonečnými součiny, protože díky nim mohl Euler úplně vyřešit Johanem Bernoullim nastolený problém sčítání řad tvaru

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \dots,$$

kde parametr  $m$  je přirozené číslo. Již v pojednání *De summit serierum reciprocarum* z let 1734 – 35 Euler odvodil rozklad sinu na nekonečný součin, když uvážil rovnici

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{3!y^3} - \frac{s^5}{5!y^5} + \dots,$$

kde je  $y = \sin s$ , jako rovnici (s parametrem  $y$  a neznámou  $s$ ) o nekonečně vysokém stupni a podle analogie s mnohočleny rozložil její pravou stranu pomocí známé periodicity sinu do nekonečného součinu kořenových činitelů

$$\left(1 - \frac{s}{A}\right) \left(1 - \frac{s}{p-A}\right) \left(1 - \frac{s}{-p-A}\right) \left(1 - \frac{s}{2p+A}\right) \left(1 - \frac{s}{-2p+A}\right) \dots,$$

přičemž  $A$  znamenalo nejmenší kladné arcsin  $y$  a  $p$  bylo psáno místo  $\pi$ . Z Viětových vztahů mezi kořeny rovnice a jejími koeficienty pak vycházejí hodnoty elementárních symetrických funkcí těchto kořenů a pomocí Newtonova vzorce rovněž hodnoty součtů jejich mocnin daného stupně.

Pro případ, že  $y = \sin A = 1$ , tedy  $A = \frac{\pi}{2}$  (Euler píše  $q$ ), můžeme žádané součty řad vyjádřit pomocí mocnin  $\pi$ . Tak dostaneme např. součet Leibnizovy řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4},$$

součty

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

atd. Tímto postupem se dá získat součet řady  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$  pro jakékoliv přirozené  $m$ . Nás ovšem více zajímá přímé vyjádření sinu jako nekonečného součinu, ke kterému Euler uvedené rozvoje připojil. Sinová řada

$$y = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + \dots$$

totiž pro  $y = 0$  dává rovnici

$$0 = s \left( 1 - \frac{s^2}{3!} + \frac{s^4}{5!} - \frac{s^6}{7!} + \dots \right)$$

a protože úhly, jejichž sinus je roven nule, se rovnají  $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, \dots$ , platí podle stejného principu rozklad

$$\sin s = s \left( 1 - \frac{s^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{s^2}{4\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{s^2}{9\pi^2} \right) \dots$$

Mikuláš I. Bernoulli dvakrát Eulera dopisem upozornil na to, že tato odvození nejsou v žádném případě korektní, že není dokázána ani konvergence sinové řady a že Viětovy vztahy o rovnicích konečného stupně se nedají rozšířit bezprostředně na rovnice o nekonečně vysokém stupni. Euler svůj způsob odvození přesto také později zopakoval; tak je tomu ve dvou pojednáních z let 1740 a 1743, kde sestavil nekonečné součiny pro  $\sin \frac{m}{n}\pi$ ,  $\cos \frac{m}{n}\pi$ , stejně tak jako v *Introductio*, kde jsou mocninné řady rovněž pojaty jako mnohočleny nekonečně vysokého stupně. Přesto v posledním díle Euler modifikoval sestavení nekonečných součinů způsobem, že nejprve hyperbolické funkce

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

rozložil na součiny a pak po dosažení  $ix$  za  $x$  přešel k trigonometrickým funkcím.

Když pak Euler dosadil speciálně  $x = \frac{m\pi}{2n}$ , vyllynula mu vyjádření koeficientů rozvoju funkcí  $\sin \frac{m\pi}{2n}$  a  $\cos \frac{m\pi}{2n}$ , ke kterým se přidružily ještě dva další, když se píše  $n - m$  místo  $m$  (§ 184). Z nich vyplynuly odpovídající rozvoje dalších čtyř funkcí (§ 186), stejně tak jako praktické řady k výpočtu hodnot  $\ln \sin \frac{m\pi}{2n}$  a  $\ln \cos \frac{m\pi}{2n}$ , ve kterých Euler pokračoval až ke 30., popř. 38. mocnině zlomku  $\frac{m}{n}$ . Koeficienty těchto řad počítal na 20 desetinných míst.

Vraťme se po delší odbočce znovu k popisovanému dílu *Introductio*. V něm se Euler zabývá goniometrickými funkcemi nejen ve výše komentované kapitole 8, nýbrž rovněž v kapitole 14, jež má v německém překladu název *Von der Vervielfachung und Teilung der Winkel* a jež je tvořena paragrafy 234–263. Náplní první části (§236–257) je hledání různých vztahů mezi hodnotami

$$f(nz) \quad \text{a} \quad f\left(\pm z + \frac{kT}{n}\right) \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

kde  $z$  je reálná proměnná,  $f$  je vždy jedna z goniometrických funkcí (Euler postupně uvažuje sinus, kosinus, sekans, kosekans, tangens a kotangens),  $T$  označuje nejmenší kladnou periodu funkce  $f$  a  $n$  je přirozené číslo dané parity (sudé nebo liché). Obecně vzato, Euler tyto vztahy odvozuje tak, že hodnotu  $f(nz)$  vyjádří ve tvaru  $f(nz) = P(x)$ , kde  $P(x)$  je vhodný polynom proměnné  $x = f(z)$  (závislý na dané funkci  $f$  a daném čísle  $n$ ) a pak zapíše všechny kořeny algebraické rovnice  $P(x) - f(nz) = 0$ , kterými jsou hodnoty  $f$  se zlomkovými argumenty uvedenými výše. Kýžené vzorce pak dostane vypsáním Viětových vztahů mezi kořeny a koeficienty sestavené rovnice. Nejdůležitějším z těchto vztahů je vyjádření hodnoty  $f(nz)$  ve tvaru (konečného) součinu dotýčných kořenů. Dodejme, že polynomické vyjádření  $\sin nz = P(x)$  v případě sudého čísla  $n$  neexistuje; Euler tehdy nachází vyjádření  $\sin nz = P(x)\sqrt{1 - x^2}$ , v němž odmocnina zastupuje hodnotu  $\cos z$ , a před dalším postupem se odmocniny zbaví umocněním, aby dostal polynomickou rovnici.

V druhé části kapitoly 14 (§258–261) se Euler věnuje odvozování vzorců pro konečné součty

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \sin(s + kt) \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos(s + kt),$$

kteře uvedl již v roce 1743 v VII. svazku *Miscelanea Berolinensia*, protože je potřeboval k výpočtu jistého integrálu. Správné vzorce pro tyto konečné součty dostává tak, že pro první součet uváží rozdíl nekonečných řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sin(s + kt) - \sum_{k=n}^{\infty} z^k \sin(s + kt)$$

a do vzorců pro součty obou řad dosadí hodnotu  $z = 1$  (pro niž však jde o rozdíl dvou *divergentních* řad). Podobným postupem (který dnes nemůžeme pokládat za korektní) Euler získává i správný vzorec pro výše uvedený konečný součet kosinů.

Shrňme stručně závěr plynoucí z předchozího výkladu. Dvěma popsányi kapitolami díla *Introductio* se Euler zasloužil o skutečný zrod teorie goniometrických funkcí, jež do té doby byly pouhými prostředky trigonometrických výpočtů. Ve zmíněném díle se mu dokonale povedlo přetvořit dotyčné funkce do formální analytické podoby, v jaké s nimi pracujeme dodnes.

## Kapitola 2

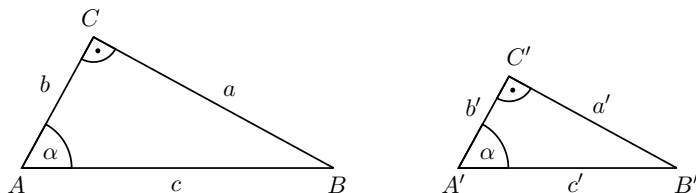
# Goniometrie pravoúhlého trojúhelníku

### 2.1 Funkce ostrého úhlu

Zavedení goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans ostrých úhlů  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  je spojeno s řešením pravoúhlých trojúhelníků.

#### 2.1.1 Od podobnosti k poměrům

Na obrázku 2.1 vidíme dva různé pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$ , které se shodují ve vnitřním úhlu  $\alpha$ . Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků jsou navzájem podobné, z čehož plyne,



Obrázek 2.1

že poměry odpovídajících si stran jsou *stejné*:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Odtud pro poměry dvojice stran téhož trojúhelníku dostáváme šest rovností

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, & 2. \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, & 3. \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \\ 4. \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, & 5. \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}, & 6. \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}, \end{array}$$

ze kterých plyne, že ve všech pravoúhlých trojúhelnících se shodným ostrým vnitřním úhlem  $\alpha$  má

1. poměr odvěsny protilehlé úhlu  $\alpha$  a přepony stejnou hodnotu,
2. poměr odvěsny přilehlé úhlu  $\alpha$  a přepony stejnou hodnotu,
3. poměr odvěsny protilehlé úhlu  $\alpha$  a odvěsny přilehlé úhlu  $\alpha$  stejnou hodnotu,

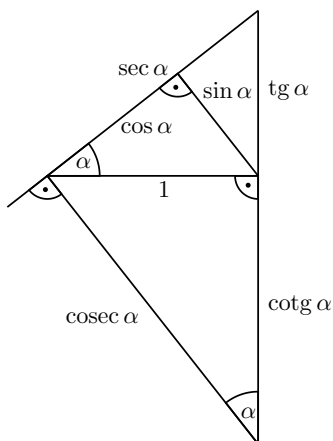


4. poměr odvěsny přilehlé úhlu  $\alpha$  a odvěsny protilehlé úhlu  $\alpha$  stejnou hodnotu,
5. poměr přepony a odvěsny přilehlé úhlu  $\alpha$  stejnou hodnotu,
6. poměr přepony a odvěsny protilehlé úhlu  $\alpha$  stejnou hodnotu.

Tyto poměry tedy nezáleží na velikosti pravoúhlého trojúhelníku. Jejich hodnoty jsou kladná čísla, která závisí pouze na velikosti úhlu  $\alpha$  a kterým říkáme

1. sinus úhlu  $\alpha$  –  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,
2. kosinus úhlu  $\alpha$  –  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ,
3. tangens úhlu  $\alpha$  –  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ ,
4. kotangens úhlu  $\alpha$  –  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$ ,
5. sekans úhlu  $\alpha$  –  $\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha}$ ,
6. kosekans úhlu  $\alpha$  –  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \alpha}$ .

Zvolíme-li délku přepony pravoúhlého trojúhelníku za jednotku délky, hodnoty sinu a kosinu budou rovny přímo délkám odvěsen a délkami úseček lze znázornit i hodnoty tangens, kotangens, sekans a kosekans (viz obr. 2.2). Z takového znázornění lze geometricky zdůvodnit všechny poznatky, které uvedeme v následující části.



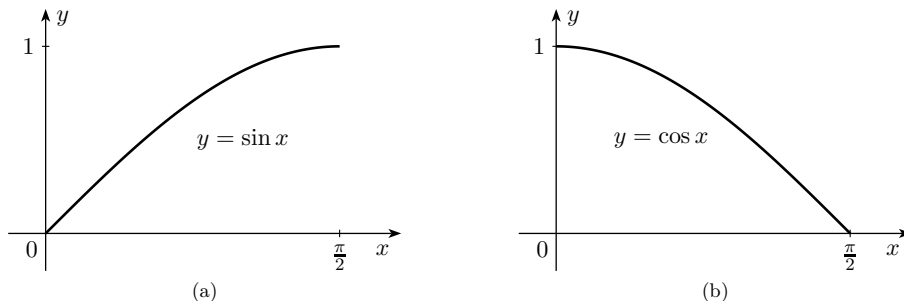
Obrázek 2.2: Goniometrické hodnoty graficky

### 2.1.2 Grafy a základní vztahy

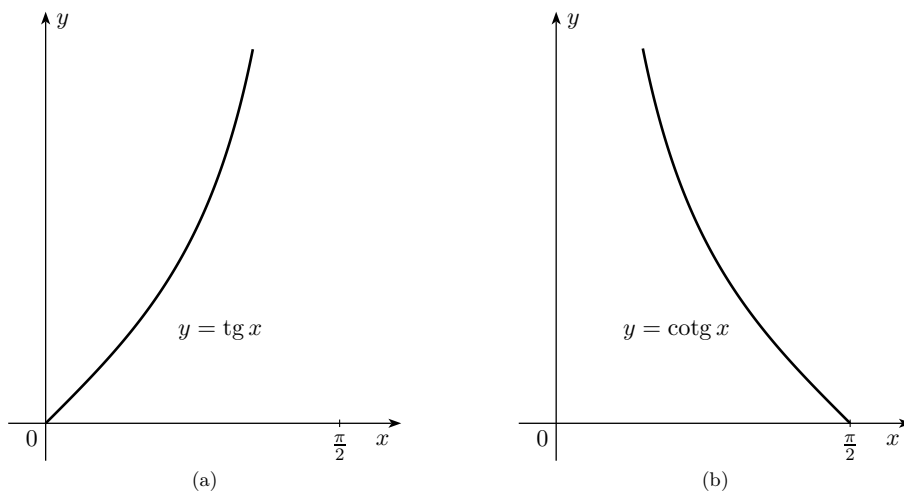
Z předchozího zavedení hodnot sinu a kosinu úhlu  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  plyne, že obě tato čísla leží v otevřeném intervalu  $(0, 1)$ . Krajních hodnot dosáhnout nemohou. (V žádném pravoúhlém trojúhelníku nemůže být délka odvěsny nulová a odvěsna s přeponou nemohou mít stejnou délku.) Z geometrického názoru je však zřejmé, že hodnoty sinu a kosinu mají v krajních bodech  $\alpha = 0$  a  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  jednostranné limity

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sin \alpha = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin \alpha = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \cos \alpha = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos \alpha = 0.$$

Proto můžeme dodefinovat hodnoty  $\sin 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2}$  a  $\cos 0$ ,  $\cos \frac{\pi}{2}$  a mluvit o *funkcích* sinus a kosinus na uzavřeném intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Funkce sinus je na intervalu  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  rostoucí, funkce kosinus klesající (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Grafy funkcí sinus a kosinus na intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$



Obrázek 2.4: Grafy funkcí tangens a kotangens na intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

Hodnoty tangens a kotangens úhlu  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  leží v otevřeném intervalu  $(0, \infty)$ . V krajních bodech definičního oboru mají zřejmé limity:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} \alpha = \infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \operatorname{cotg} \alpha = \infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} \alpha = 0.$$

Jelikož  $\infty$  není reálné číslo, nebudeme hodnoty  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$  a  $\operatorname{cotg} 0$  definovat. Rostoucí funkce tangens tak bude definována na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ , klesající funkci kotangens budeme uvažovat na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  (obr. 2.4).

Poslední dvě goniometrické funkce – sekans a kosekans – lze jednoduše vyjádřit pomocí funkcí sinus a kosinus rovnostmi

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \text{a} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Vypočítat převrácené číslo k dané hodnotě je v epoše počítačů triviální úkol. Proto funkce sekans a kosekans již ztratily praktický význam a ani my se jimi dále nebudeme téměř vůbec zabývat.

Mezi goniometrickými funkcemi existuje řada závislostí, které můžeme vyjádřit pomocí různých rovností. Např. každá výše zmíněná goniometrická funkce  $f(\alpha)$  má svoji tzv. goniometrickou kofunkci  $\text{cof}(\alpha)$ , pro kterou při každém  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  platí

$$f(\alpha) = \text{cof}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Které dvě goniometrické funkce jsou takto svými „sourozenci“, se dá jednoduše odvodit vyjádřením goniometrických poměrů v pravoúhlém trojúhelníku pro oba vnitřní ostré úhly  $\alpha$  a  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . (Úhly  $\alpha, \beta$  nazýváme doplňkové, jelikož  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ .) Zde jsou očekávané vztahy:

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \text{tg } \alpha = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \text{cotg } \alpha = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

a

$$\sec \alpha = \text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \text{cosec } \alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Dlouhá staletí se hledaly hodnoty goniometrických funkcí pro daný úhel jen pomocí tabulek. Tabulky sloužily i opačné úloze – najít úhel, jehož goniometrická hodnota byla dána. Tato úloha vedla ke vzniku inverzních funkcí arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg), které budeme uvažovat prozatím na intervalech  $\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, (0, \infty),$  a  $(0, \infty)$ . Velikost příslušných úhlů bude ležet v rozmezí  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Cyklometrické funkce – název pro inverzní funkce ke goniometrickým – dnes také slouží k přesnému zápisu výsledků, které v daný okamžik nepotřebujeme vyjadřovat přibližnými čísly pro účely praxe. Například pro ostré úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  píšeme:

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{1}{5}, \quad \text{tg } \gamma = 2011 \Rightarrow \gamma = \arctg 2011.$$

## 2.2 Pythagorova a Eukleidovy věty

Pythagorova věta byla pojmenována podle Pythagora ze Samu (okolo 570 př. n. l. – 510 př. n. l.), jenž ji objevil pro Evropu, resp. starověké Řecko. Pravděpodobně však byla známa i v jiných starověkých civilizacích dávno předtím (v Číně, částečně např. v Egyptě). Popisuje vztah, který platí mezi délkami stran pravoúhlých trojúhelníků v rovině.

**Věta 2.2.1** (Pythagorova). *Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého rovinného trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů dvou čtverců nad jeho odvěsnami:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Eukleidova věta je označení pro geometrická tvrzení o vlastnostech pravoúhlých trojúhelníků, pojmenovaná po svém objeviteli, řeckém matematikovi Eukleidovi (450 př. n. l. – 370 př. n. l.). Ve skutečnosti jsou Eukleidovy věty dvě – Eukleidova věta o výšce a Eukleidova věta o odvěsně. V obou se mluví o *úsecích*, na které je přepona rozdělena patou výšky z protilehlého vrcholu trojúhelníku.

**Věta 2.2.2** (Eukleidova věta o výšce). *Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku ABC je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony:*

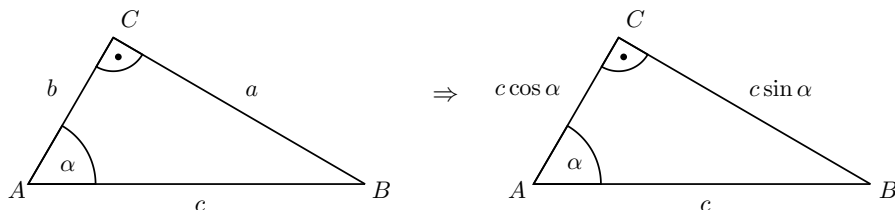
$$v^2 = c_a \cdot c_b.$$

**Věta 2.2.3** (Eukleidova věta o odvěsně). *Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlého:*

$$\boxed{a^2 = c \cdot c_a \quad a \quad b^2 = c \cdot c_b.}$$

Všechny tyto tři věty nyní odvodíme pomocí goniometrických funkcí ostrých úhlů.

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$ . Ze vztahů pro hodnoty sinu a kosinu úhlu  $\alpha$  u vrcholu  $A$  vyjádříme délky odvěsen  $a$ ,  $b$  pravoúhlého trojúhelníku (viz obr. 2.5). V troj-

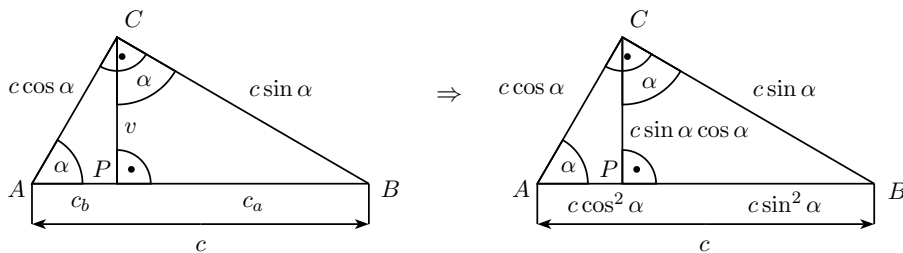


Obrázek 2.5

úhelníku  $ABC$  dále vyznačíme výšku  $v = CP$ , která nám rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky  $APC$  a  $PBC$  (viz obr. 2.6). Z trojúhelníků  $ABC$  a  $BPC$  vidíme, že každý z úhlů  $CAB$  a  $PCB$  je doplňkový ke společnému úhlu u vrcholu  $B$ , takže platí  $|\angle PCB| = \alpha$ . Proto můžeme pomocí hodnot  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  vyjádřit i výšku  $v$ , i délky obou úseků  $c_a = |BP|$  a  $c_b = |AP|$ , jak je uvedeno v pravé části obrázku:

$$v = c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad c_a = c \cdot \sin^2 \alpha, \quad c_b = c \cdot \cos^2 \alpha.$$

Z nalezených vyjádření délek  $a, b, v, c_a, c_b$  již dostaneme všechny potřebné rovnosti:



Obrázek 2.6

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin \alpha \Rightarrow a^2 = c^2 \cdot \sin^2 \alpha \Rightarrow a^2 = c \cdot (c \cdot \sin^2 \alpha) \Rightarrow \underline{a^2 = c \cdot c_a}, \\ b &= c \cdot \cos \alpha \Rightarrow b^2 = c^2 \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow b^2 = c \cdot (c \cdot \cos^2 \alpha) \Rightarrow \underline{b^2 = c \cdot c_b}, \\ v &= c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow v^2 = (c \cdot \sin^2 \alpha) \cdot (c \cdot \cos^2 \alpha) \Rightarrow \underline{v^2 = c_a \cdot c_b}, \\ a^2 + b^2 &= c \cdot c_a + c \cdot c_b \Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b) \Rightarrow \underline{a^2 + b^2 = c^2}. \end{aligned}$$

Dodejme, že z rovnosti  $c = c_a + c_b$  okamžitě plyne klíčový vztah mezi hodnotami sinu a kosinu, tzv. *goniometrická jednička*

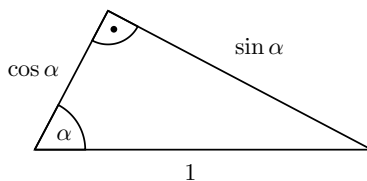
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

kteřá je rovněž bezprostředním důsledkem dokázané Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou přeponou.

## 2.3 Goniometrické hodnoty těhož úhlu

Na začátku této kapitoly jsme každému ostrému úhlu  $\alpha$  přiřadili čtyři goniometrické hodnoty –  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  a  $\operatorname{cotg} \alpha$ . Z každé z těchto čtyř hodnot je zpětně určen nejen úhel  $\alpha$ , ale i další tři zbývající goniometrické hodnoty, což nyní potvrdíme. Obdržíme jednoduché vzájemné vztahy mezi goniometrickými hodnotami těhož ostrého úhlu, které plynou přímo z definice goniometrických hodnot a z Pythagorovy věty.

- Je-li dána hodnota  $\sin \alpha$ , zvolíme pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou přeponou a s vnitřním ostrým úhlem  $\alpha$ . Z definice plynou délky odvěsen (obr. 2.7).



Obrázek 2.7

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{Pythagorova věta}),$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad (\text{definice hodnoty } \operatorname{tg} \alpha),$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \quad (\text{definice hodnoty } \operatorname{cotg} \alpha).$$

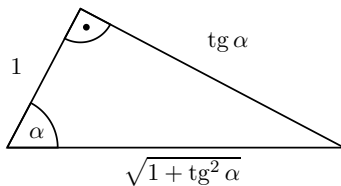
- Je-li dána hodnota  $\cos \alpha$ , použijeme opět obr. 2.7.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (\text{Pythagorova věta}),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \quad (\text{definice hodnoty } \operatorname{tg} \alpha),$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \quad (\text{definice hodnoty } \operatorname{cotg} \alpha).$$

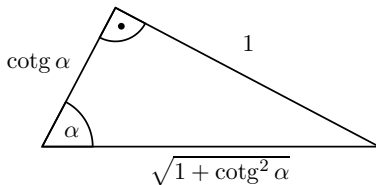
- Je-li dána hodnota  $\operatorname{tg} \alpha$ , zvolíme pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou odvěsnou a přilehlým vnitřním ostrým úhlem  $\alpha$ . Z definice tangens plyne délka protilehlé odvěsny a z Pythagorovy věty délka přepony (obr. 2.8).



Obrázek 2.8

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} && \text{(definice hodnoty } \sin \alpha), \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} && \text{(definice hodnoty } \cos \alpha), \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} && \text{(definice hodnoty } \operatorname{cotg} \alpha). \end{aligned}$$

- Je-li dána hodnota  $\operatorname{cotg} \alpha$ , zvolíme pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou odvěsnou a protilehlým vnitřním ostrým úhlem  $\alpha$ . Z definice kotangens plyne délka přilehlé odvěsny a z Pythagorovy věty délka přepony (obr. 2.9).



Obrázek 2.9

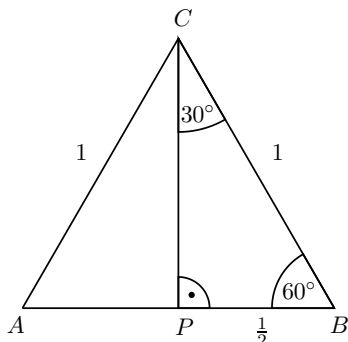
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} && \text{(definice hodnoty } \sin \alpha), \\ \cos \alpha &= \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}} && \text{(definice hodnoty } \cos \alpha), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} && \text{(definice hodnoty } \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

## 2.4 Goniometrické hodnoty významných úhlů

V části 2.1.2 jsme pomocí limit přiřadili goniometrickým funkcím hodnoty pro „okrajové“ úhly  $\alpha = 0^\circ$  a  $\alpha = 90^\circ$ . Žádné konkrétní goniometrické hodnoty pro úhly mezi  $0^\circ$  a  $90^\circ$  jsme dosud nepoznali. V této podkapitole ukážeme, že z pravidelných mnohoúhelníků lze odvodit hodnoty

goniometrických funkcí pro ostré úhly  $\alpha \in \{18^\circ, 30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 54^\circ, 60^\circ, 72^\circ\}$ . (Tyto významné úhly je výhodnější zapisovat ve stupních než v obloukové míře, které dáváme jinde přednost.)

- Pravidelný trojúhelník – *rovnostranný trojúhelník* – o délce strany jedna jednotka lze výškou



Obrázek 2.10

rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s vnitřními ostrými úhly o velikosti  $30^\circ$  a  $60^\circ$  (obr. 2.10). Délku jejich delší odvěsny vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|PC| = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly  $30^\circ$  a  $60^\circ$  z pravoúhlého trojúhelníku  $PBC$  jsou:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, & \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, & \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

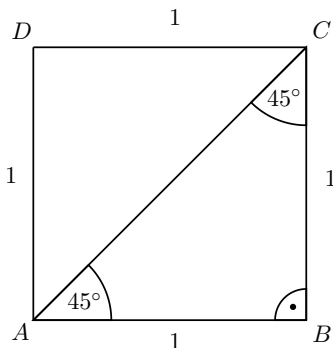
- Pravidelný čtyřúhelník – *čtverec* – o délce strany jedna jednotka lze úhlopříčkou rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s vnitřními ostrými úhly o velikosti  $45^\circ$  (obr. 2.11). Délku jejich přepony vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|AC| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhel  $45^\circ$  z pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  jsou:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

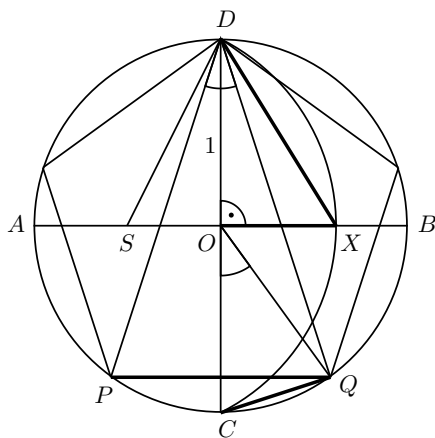
K dalšímu odvozování budeme potřebovat délky stran pravidelného pětiúhelníku a pravidelného desetiúhelníku vepsaných do kružnice o poloměru jedna jednotka. Nejdříve popíšeme konstrukci těchto dvou délek, která je znázorněna na obr. 2.12.



Obrázek 2.11

*Postup:*

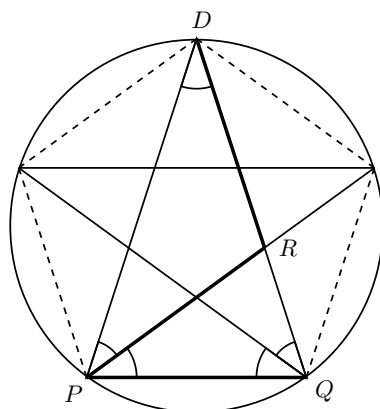
1. Sestrojíme jednotkovou kružnici se středem  $O$  a její dva navzájem kolmé průměry  $AB$  a  $CD$ .
2. Nalezneme střed  $S$  úsečky  $AO$ .
3. Sestrojíme oblouk  $CD$  kružnice se středem v bodě  $S$  a poloměrem  $|SD|$ , průsečík oblouku s úsečkou  $OB$  označíme  $X$ .
4. Délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice je  $a_5 = |DX|$ , délka strany příslušného pravidelného desetiúhelníku je  $a_{10} = |OX|$ .



Obrázek 2.12: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku

*Důkaz.* Abychom ověřili správnost konstrukce délek stran pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku, podíváme se nejprve na pentagram - pěticípou hvězdu nakreslenou pěti příjmymi tahy téže délky (obr. 2.13). Pentagram velmi úzce souvisí s pravidelným pětiúhelníkem, který dostaneme spojením vrcholů pentagramu úsečkami. Uvažujme jeho dvě úhlopříčky vycházející z jednoho vrcholu,





Obrázek 2.13: Pentagram

například úhlopříčky  $DP$  a  $DQ$  na obrázku. Tyto dvě úhlopříčky spolu se stranou  $PQ$  vymezují rovnoramenný trojúhelník  $DPQ$ . Další úhlopříčka vycházející z vrcholu  $P$  protne úsečku  $DQ$  ve vnitřním bodě  $R$ .

Protože stranám pravidelného pětiúhelníku příslušející v opsané kružnici shodné obvodové úhly (vyznačené na obrázku obloučky), jsou trojúhelníky  $PQR$  a  $DPQ$  podobné a rovnoramenné a rovněž trojúhelník  $DRP$  je rovnoramenný. Úsečky  $DR$ ,  $PR$  a  $PQ$  jsou proto shodné a pro poměry stran trojúhelníků  $PQR$  a  $DPQ$  platí

$$\frac{|DP|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{|PQ|}{|DQ| - |DR|} = \frac{|PQ|}{|DP| - |PQ|}$$

neboli

$$|PQ|^2 = |DP| \cdot (|DP| - |PQ|).$$

Po vydělení hodnotou  $|PQ|^2$  tak pro poměr  $\varphi = \frac{|DP|}{|PQ|}$  dostáváme kvadratickou rovnici  $1 = \varphi \cdot (\varphi - 1)$ , která má jediný kladný kořen  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . (Určená hodnota  $\varphi$  je známá jako *zlatý řez* a objevuje se v různých souvislostech v geometrii a v teorii čísel.)

Pravidelný pětiúhelník se stranou  $PQ$  a protilehlým vrcholem  $D$  je přikreslen i k naší konstrukci na obr. 2.12. Protože přímka  $CD$  je osou úsečky  $PQ$ , je úsečka  $CQ$  stranou vepsaného pravidelného desetiúhelníku. Její délku  $a_{10}$  určíme z rovnoramenného trojúhelníku  $OCQ$ , který má u hlavního vrcholu  $O$  úhel velikosti poloviny středového úhlu  $POQ$ , tedy úhel shodný s obvodovým úhlem  $PDQ$  (oba shodné úhly jsou na obr. vyznačeny obloučky). Rovnoramenné trojúhelníky  $DPQ$  a  $OCQ$  jsou tedy podobné. Z rovnosti

$$\frac{|OC|}{|CQ|} = \frac{|DP|}{|PQ|} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

po dosazení  $|OC| = 1$  již dostaneme

$$a_{10} = |CQ| = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Abychom určili druhou hledanou délku  $a_5 = |PQ|$ , vypočteme nejdříve délku odvěsny  $DQ$  pravoúhlého trojúhelníku  $CDQ$ :

$$|DQ| = \sqrt{|CD|^2 - |CQ|^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Odtud již dostáváme

$$a_5 = |PQ| = \frac{|DP|}{\varphi} = \frac{|DQ|}{\varphi} = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Nyní se vraťme k původní konstrukci. Naším cílem je ukázat, že úsečky  $DX$  a  $OX$  mají délky rovné hodnotám  $a_5$ , resp.  $a_{10}$ , jejichž výpočet jsme před chvílí dokončili. K tomu nám stačí použít dvakrát Pythagorovu větu:

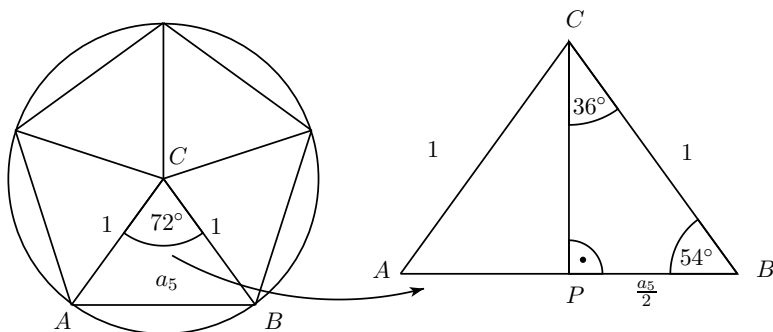
$$|SX| = |SD| = \sqrt{|OD|^2 + |OS|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$|OX| = |SX| - |OS| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$|DX| = \sqrt{|OD|^2 + |OX|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Správnost celé konstrukce je tak ověřena. Zároveň jsme určili délky  $a_5$ ,  $a_{10}$  stran pravidelných pětiúhelníků a desetiúhelníků vepsaných do jednotkové kružnice, které nyní uplatníme k našemu hlavnímu záměru.  $\square$

- Pravidelný pětiúhelník o délce strany  $|AB| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$  lze rozdělit na pět shodných rovno-



Obrázek 2.14: Pravidelný pětiúhelník

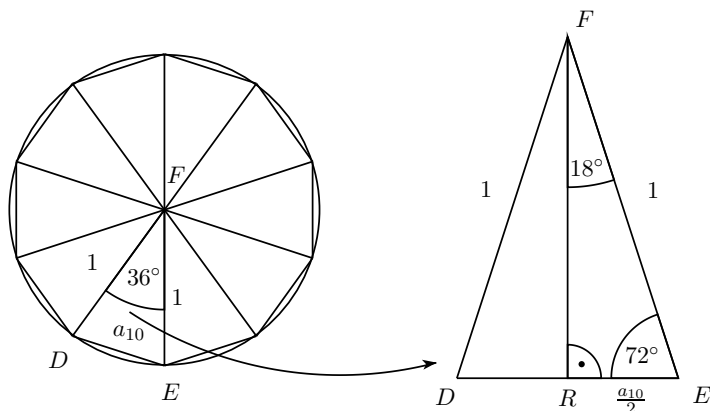
ramenných trojúhelníků s vnitřním úhlem proti základně o velikosti  $72^\circ$  (obr. 2.14), jejichž výšku na základnu vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|CP| = \sqrt{|BC|^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly  $36^\circ$  a  $54^\circ$  z pravoúhlého trojúhelníku  $PBC$  jsou:

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ = \cos 54^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, & \cos 36^\circ = \sin 54^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5+1}}{4}, \\ \operatorname{tg} 36^\circ = \operatorname{cotg} 54^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, & \operatorname{cotg} 36^\circ = \operatorname{tg} 54^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}. \end{aligned}$$

- Pravidelný desetiúhelník o délce strany  $|DE| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  lze rozdělit na deset shodných rovno-



Obrázek 2.15: Pravidelný desetiúhelník

ramenných trojúhelníků s vnitřním úhlem proti základně o velikosti  $36^\circ$  (obr. 2.15), jejichž výšku na základnu vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|FR| = \sqrt{|EF|^2 - \left(\frac{|DE|}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly  $18^\circ$  a  $72^\circ$  z pravoúhlého trojúhelníku  $REF$  jsou:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ = \cos 72^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, & \cos 18^\circ = \sin 72^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \\ \operatorname{tg} 18^\circ = \operatorname{cotg} 72^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}, & \operatorname{cotg} 18^\circ = \operatorname{tg} 72^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Z odvozených hodnot bychom mohli užitím goniometrických vzorců (viz 2.5) algebraicky vyjadřovat hodnoty příslušné dalším úhlům, např.  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ ,  $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$  apod. Takové výpočty dnes nemají příliš valný význam, v historii však sehrály (jak jsme uvedli v kap. 1) velkou roli při sestavování trigonometrických tabulek.

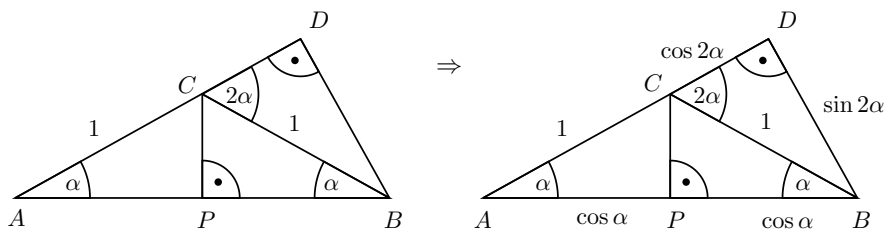
## 2.5 Goniometrické vzorce

V goniometrii pracujeme s velkým množstvím vzorců. Zatím jsme definovali goniometrické funkce v souvislosti s pravoúhlým trojúhelníkem, budeme proto nyní u goniometrických vzorců uvádět omezení, za kterých jsou *všechny* zastoupené argumenty z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Názorně odvodíme vzorce pro dvojnásobný argument, součtové vzorce a vzorce pro součet funkcí.<sup>1</sup>

- Vzorce pro dvojnásobný argument, kde  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

*Odvození:* Zvolíme si rovnoramenný trojúhelník  $ABC$  s rameny  $AC, BC$  o délce jedna jednotka tak, aby vnitřní úhly přilehlé k základně  $AB$  měly velikost  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ , a výškou  $PC$  ho rozdělíme na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Základna  $AB$  je současně přeponou pravoúhlého trojúhelníku  $ABD$  (viz obr. 2.16 vlevo). Z trojúhelníku  $ABC$  je  $|\angle ACB| = \pi - 2\alpha$ ,



Obrázek 2.16

tudíž pro velikost vedlejšího úhlu  $BCD$  platí  $|\angle BCD| = 2\alpha$ .

Nyní vyjádříme a do obrázku vpravo zapíšeme délky jednotlivých stran pomocí goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned} \triangle APC : \cos \alpha &= \frac{|AP|}{1} \Rightarrow |AP| = \cos \alpha, & \Rightarrow |AB| &= 2|AP| = 2 \cos \alpha, \\ \triangle CBD : \sin 2\alpha &= \frac{|BD|}{1} \Rightarrow |BD| = \sin 2\alpha, & \cos 2\alpha &= \frac{|CD|}{1} \Rightarrow |CD| = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

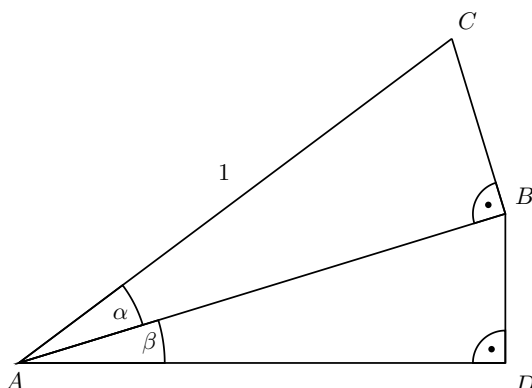
Z trojúhelníku  $ABD$  již odvodíme kýžené vzorce:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

- Součtové vzorce pro sinus a pro kosinus, kde  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

*Odvození:* Zvolíme si dva pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  a  $ADB$  s přeponami  $AC$ , resp.  $AB$  tak, aby strana  $AB$  byla společná, strana  $AC$  měla délku jedna jednotka a aby vnitřní úhly



Obrázek 2.17

$CAB$ ,  $BAD$  měly velikosti  $\alpha$ , resp.  $\beta$  o součtu menším než  $\frac{\pi}{2}$  (viz obr. 2.17). Do stejného obrázku dokreslíme obdélník  $ADEF$  (obr. 2.18). Úhly  $CAD$  a  $ACF$  jsou střídavé, z čehož plyne, že  $|\angle ACF| = \alpha + \beta$ . Jednoduše lze také spočítat, že  $|\angle CBE| = \beta$ . Nyní určíme a do dolní části obrázku 2.18 zapíšeme délky jednotlivých stran pomocí goniometrických funkcí, z čehož pak obdržíme kýžené vzorce:

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \sin \alpha &= \frac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \sin \alpha, & \cos \alpha &= \frac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \cos \alpha, \\ \triangle ADB : \sin \beta &= \frac{|DB|}{|AB|} \Rightarrow |DB| = \cos \alpha \sin \beta, & \cos \beta &= \frac{|AD|}{|AB|} \Rightarrow |AD| = \cos \alpha \cos \beta, \\ \triangle BEC : \sin \beta &= \frac{|EC|}{|BC|} \Rightarrow |EC| = \sin \alpha \sin \beta, & \cos \beta &= \frac{|BE|}{|BC|} \Rightarrow |BE| = \sin \alpha \cos \beta, \\ \triangle ACF : \sin(\alpha + \beta) &= \frac{|AF|}{1} \Rightarrow |AF| = \sin(\alpha + \beta), & \cos(\alpha + \beta) &= \frac{|CF|}{1} \Rightarrow |CF| = \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

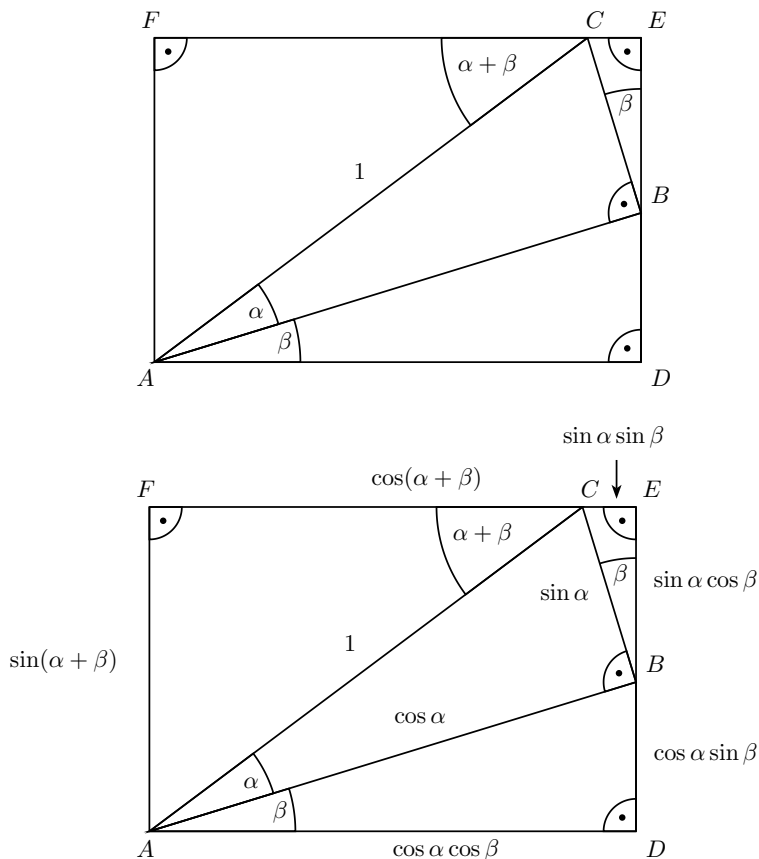
$$\begin{aligned} |AF| &= |DE| = |BE| + |DB| \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ |AD| &= |FE| = |FC| + |CE| \Rightarrow \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta, \\ &\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

- Součtový vzorec pro tangens, kde  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ :

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

*Odvození:* Součtový vzorec pro tangens lze názorně demonstrovat ze stejného obrázku obdélníku  $ADEF$  z obr. 2.18, pokud jinak (vhodně) zvolíme výchozí jednotku délky (obr. 2.19).

<sup>1</sup>Díky analytičnosti obou stran vzorců můžeme tvrdit, že takto odvozené vzorce budou platit pro *všechny* argumenty z oboru reálných či dokonce komplexních čísel. S ohledem na zaměření naší práce však budeme rozšiřovat obory pravdivosti goniometrických vzorců v následujících kapitolách výhradně elementárními prostředky.



Obrázek 2.18

$$\triangle ADB : \operatorname{tg} \beta = \frac{|DB|}{1} \Rightarrow |DB| = \operatorname{tg} \beta, \quad \cos \beta = \frac{1}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{1}{\cos \beta},$$

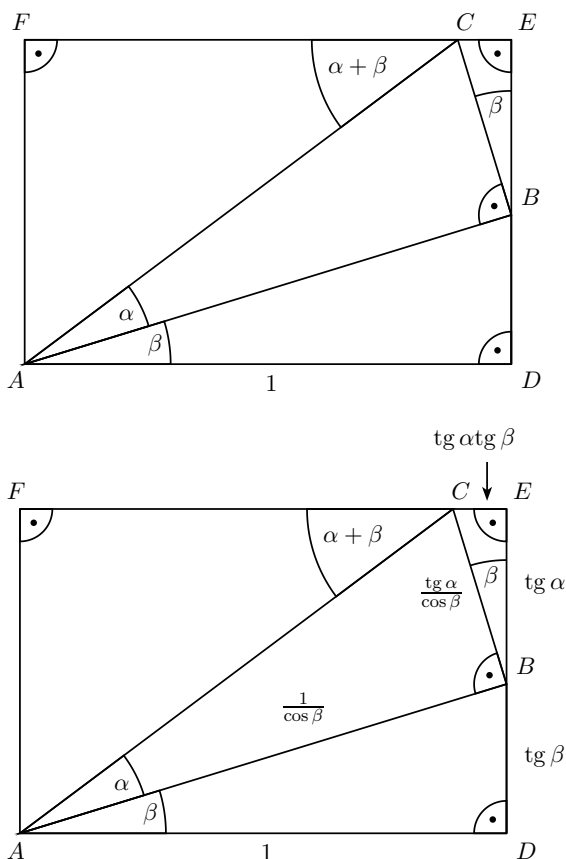
$$\triangle ABC : \operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{\frac{1}{\cos \beta}} \Rightarrow |BC| = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta},$$

$$\triangle BEC : \sin \beta = \frac{|CE|}{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}} \Rightarrow |CE| = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad \cos \beta = \frac{|BE|}{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}} \Rightarrow |BE| = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\triangle ACF : \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|DE|}{|FC|} = \frac{|BE| + |DB|}{1 - |CE|} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Dodejme, že v případě  $\alpha = \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$  odtud plyne vzorec

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

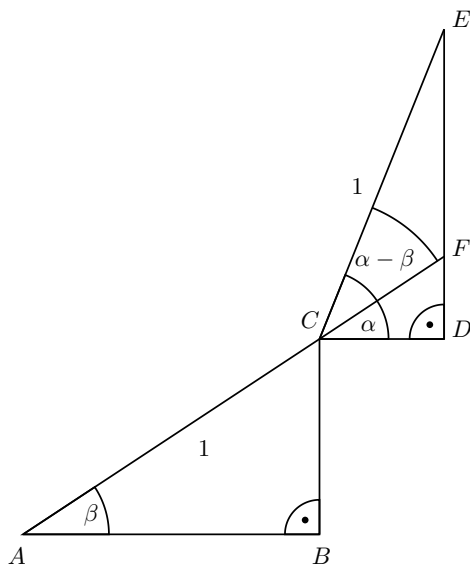


Obrázek 2.19

- Vzorce pro součet sinů a pro součet kosinů, kde  $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

*Odvození:* Zvolíme si dva pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  a  $CDE$  se společným vrcholem  $C$  tak, aby jejich přepony  $AC$  a  $CE$  měly délku jedna jednotka, odvěsny  $AB$  a  $CD$  byly navzájem rovnoběžné a aby pro vnitřní úhly  $\alpha = |\angle DCE|$  a  $\beta = |\angle BAC|$  platilo  $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$  (viz obr. 2.20). Prodloužením strany  $AC$  za bod  $C$  obdržíme průsečík  $F$  se stranou  $DE$ . Ze shodnosti střídavých úhlů  $BAC$  a  $DCF$  plyne  $|\angle ECF| = \alpha - \beta$ . Do stejného obrázku (viz obr. 2.21) dokreslíme pravoúhlý trojúhelník  $AGE$ . V rovnoramenném trojúhelníku  $ACE$  sestrojíme výšku na základnu  $AE$  a její patu označíme písmenem  $H$ . K odvození vzorců nám zbývá už jen zjistit velikost úhlu  $EAF$ , shodného s oběma vnitřními úhly při základně  $AE$  trojúhelníku  $ACE$ . Protože jeho vnější úhel při vrcholu  $C$  má velikost  $\alpha - \beta$ , je  $|\angle EAF| = \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Nyní vyjádříme a do obrázku zapíšeme potřebné délky pomocí goniometrických funkcí:



Obrázek 2.20

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \sin \beta &= \frac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \sin \beta = |GD|, & \cos \beta &= \frac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \cos \beta, \\ \triangle CDE : \sin \alpha &= \frac{|DE|}{1} \Rightarrow |DE| = \sin \alpha, & \cos \alpha &= \frac{|CD|}{1} \Rightarrow |CD| = \cos \alpha = |BG|. \end{aligned}$$

$$\triangle ACH : \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{|AH|}{1} \Rightarrow |AH| = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \Rightarrow |AE| = 2|AH| = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Zaměříme se na pravoúhlý trojúhelník  $AGE$ , jehož odvěsny  $AG$  a  $GE$  mají délky

$$|AG| = |AB| + |BG| = \cos \alpha + \cos \beta,$$

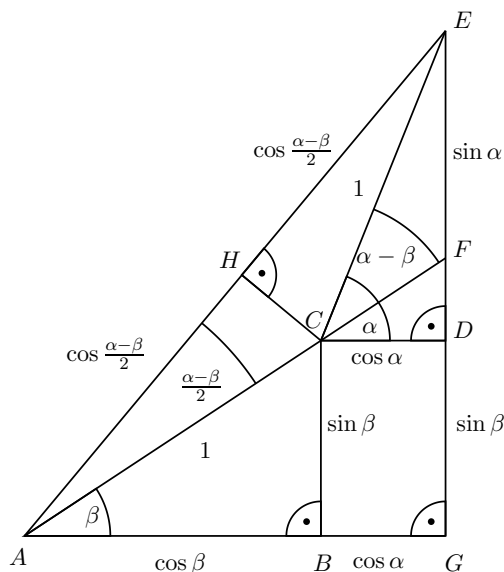
$$|GE| = |GD| + |DE| = \sin \alpha + \sin \beta$$

a jehož ostrý vnitřní úhel u vrcholu  $A$  má velikost  $\frac{\alpha - \beta}{2} + \beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ . To nám spolu s dříve určenou délkou přepony  $AE$  umožňuje vyjádřit délky odvěsen  $AG$ ,  $GE$  jiným způsobem zapsaným na obr. 2.22:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{|GE|}{|AE|} \Rightarrow |GE| = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{|AG|}{|AE|} \Rightarrow |AG| = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Porovnáním obou vyjádření délek  $|AG|$  a  $|GE|$  docházíme k očekávaným vzorcům.





Obrázek 2.21

## 2.6 Příklady

■ **Příklad 2.6.1.** Geometricky dokažte rovnost<sup>2</sup>

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

*Řešení:* Do čtvercové sítě o délce strany jedna jednotka nakreslíme trojúhelník  $ABC$  (obr. 2.23). Jelikož jsou trojúhelníky  $ADC$  a  $CFB$  shodné, je trojúhelník  $ABC$  rovnoramenný pravoúhlý, tedy  $|\angle CAB| = \frac{\pi}{4}$ . Další postup důkazu můžeme stručně zapsat takto:

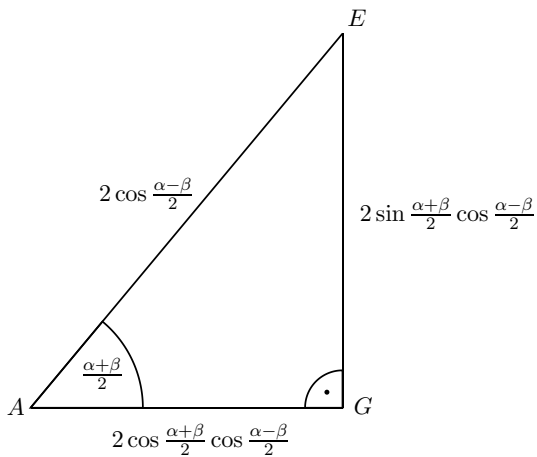
- $\triangle ADC : \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ ,
- $\triangle ABE : \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ ,
- $\alpha + \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ ,
- $\alpha + \beta = |\angle CAB| = \frac{\pi}{4}$ .

■ **Příklad 2.6.2.** Geometricky dokažte rovnost

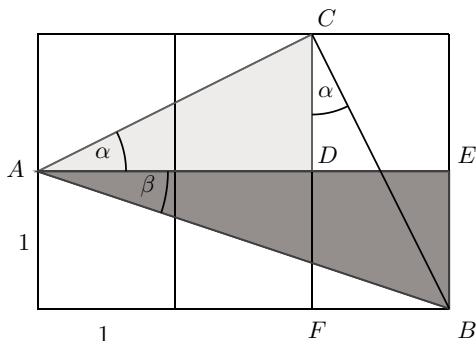
$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi.$$

*Řešení:* Do čtvercové sítě o délce strany jedna jednotka nakreslíme trojúhelník  $ABC$ , který následně rozdělíme na tři trojúhelníky  $ADE$ ,  $EDC$  a  $CDB$  (obr. 2.24). Vnitřní úhly trojúhelníků u vrcholu

<sup>2</sup>Autorem příkladů a řešení 2.6.1 a 2.6.2 je podle [21] Edward M. Harris.



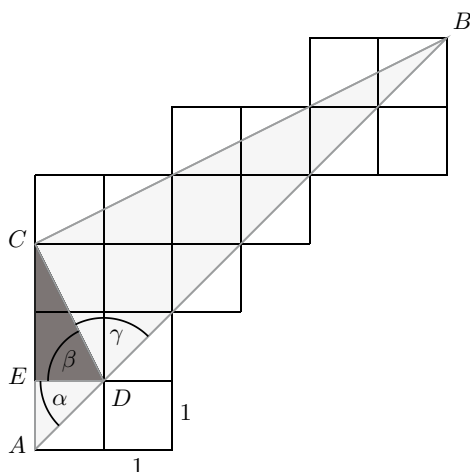
Obrázek 2.22



Obrázek 2.23

$D$  označíme postupně  $\alpha, \beta, \gamma$ , přičemž  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Z obrázku je zřejmé, že  $|CB| = 3 \cdot |CD|$ . Další postup důkazu můžeme stručně zapsat takto:

- $\triangle ADE$  :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 1$ ,
- $\triangle EDC$  :  $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} 2$ ,
- $|CD| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ,  $|CB| = 3 \cdot \sqrt{5}$ ,  $|DB| = 5 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 5 \cdot \sqrt{2}$ ,  
 $|CD|^2 + |CB|^2 = 5 + 45 = 50$ ,  $|DB|^2 = 25 \cdot 2 = 50 \Rightarrow \triangle CDB$  je pravoúhlý,
- $\triangle CDB$  :  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{|CB|}{|CD|} = \frac{3 \cdot |CD|}{|CD|} \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg} 3$ ,
- $\alpha + \beta + \gamma = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$ .



Obrázek 2.24

■ **Příklad 2.6.3.** Bez užití goniometrických vzorců odvoďte hodnoty goniometrických funkcí pro úhly  $15^\circ$  a  $75^\circ$ .

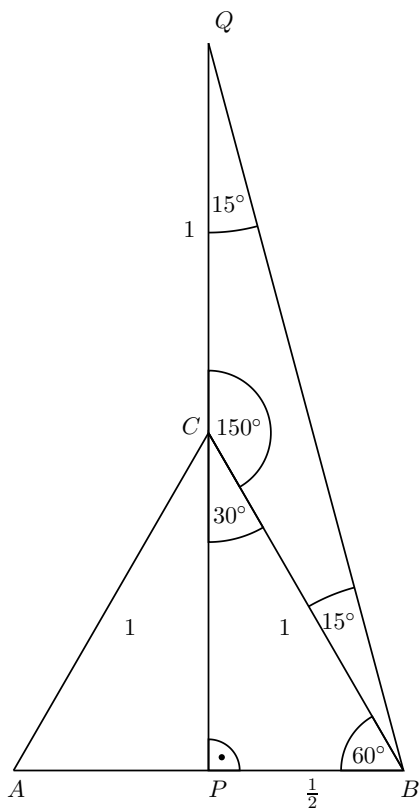
*Řešení:* K odvození použijeme obrázek 2.10 z podkapitoly 2.4, který ještě doplníme o rovnoramenný trojúhelník  $CBQ$  s rameny  $CB$  a  $CQ$  o délce jedna jednotka, přičemž rameno  $CQ$  leží na polopřímce opačné k  $CP$  (viz obr. 2.25). Vnitřní úhly trojúhelníku  $CBQ$  jsou  $15^\circ$ ,  $15^\circ$  a  $150^\circ$ . Délku výšky  $CP$  v rovnostranném trojúhelníku  $ABC$  jsme již vypočítali v podkapitole 2.4 –  $|CP| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Zbývá určit délku strany  $BQ$  pomocí Pythagorovy věty:

$$|BQ| = \sqrt{|PB|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly  $15^\circ$  a  $75^\circ$  určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku  $PBQ$ :

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ = \cos 75^\circ &= \frac{|PB|}{|BQ|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \\ \cos 15^\circ = \sin 75^\circ &= \frac{|PQ|}{|BQ|} = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \\ \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{cotg} 75^\circ &= \frac{|PB|}{|PQ|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3}, \\ \operatorname{cotg} 15^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ &= \frac{|PQ|}{|PB|} = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

■ **Příklad 2.6.4.** Jak je poznamenáno v [8, str. 126], v případě ostrých úhlů lze součtové vzorce pro sinus a kosinus odvodit třemi postupy. Vždy vycházíme z dvojice pravoúhlých trojúhelníků, které se navzájem stýkají podél jedné společné strany. Možné způsoby takového jejich spojení vidíme na obr. 2.26. Levou dvojici trojúhelníků jsme využili při odvozování v podkapitole 2.5 (obr. 2.17), pravou dvojici jsme v podstatě uplatnili při odvozování Ptolemaiovy věty v části 1.1.2 (obr. 1.5 v případě,



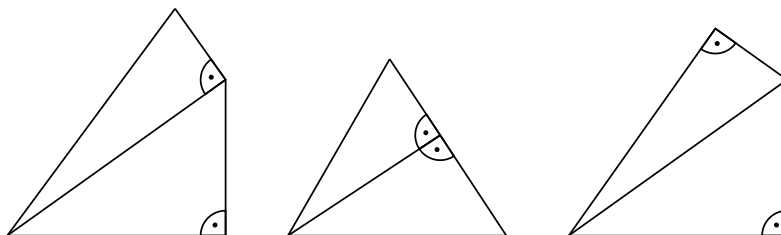
Obrázek 2.25

kdy  $AC$  je průměrem kružnice) a k získání součtových vzorců bychom ještě potřebovali sinovou větu, o které pojednáme teprve v kapitole 3. Nyní pomocí prostřední dvojice trojúhelníků z obr. 2.26 znovu dokažte, že platí součtový vzorec

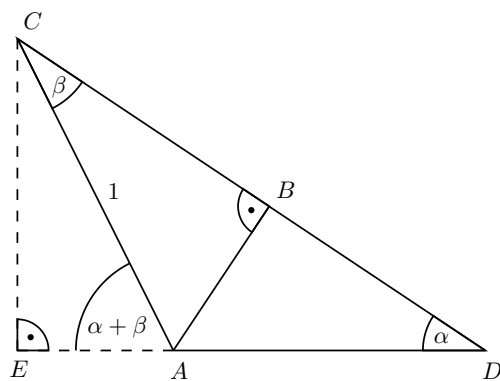
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

jsou-li všechny tři úhly  $\alpha, \beta, \alpha + \beta$  ostré.

*Řešení:* Dva pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  a  $ABD$  se společnou odvěsnou  $AB$  a jedním vnitřním úhlem  $\alpha$ , resp.  $\beta$  zvolíme podle obr. 2.27.



Obrázek 2.26



Obrázek 2.27

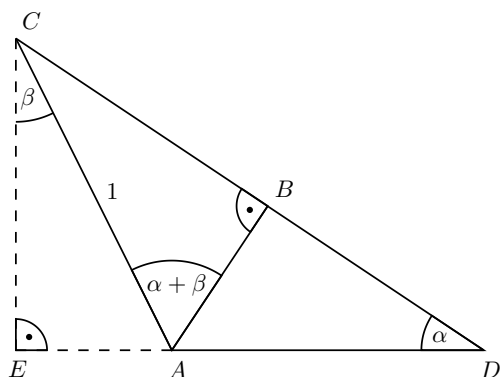
- $\triangle ACE$  :  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{|CE|}{1} \Rightarrow |CE| = \sin(\alpha + \beta)$ ,
- $\triangle ABC$  :  $\sin \beta = \frac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \sin \beta$ ,
- $\triangle ABC$  :  $\cos \beta = \frac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \cos \beta$ ,
- $\triangle ABD$  :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{\sin \beta}{|BD|} \Rightarrow |BD| = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,
- $\triangle CDE$  :  $\sin \alpha = \frac{|CE|}{|CD|} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha}} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

■ **Příklad 2.6.5.** Pomocí dvou pravoúhlých trojúhelníků se společnou odvěsnou (obr. 2.26 uprostřed) znovu dokažte, že platí součtový vzorec

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

jsou-li všechny tři úhly  $\alpha, \beta, \alpha + \beta$  ostré.

*Řešení:* Opět zvolíme pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  a  $ABD$  se společnou odvěsnou  $AB$ , které



Obrázek 2.28

tentokrát mají po vnitřním úhlu  $\alpha$ , resp.  $\alpha + \beta$  (obr. 2.28).

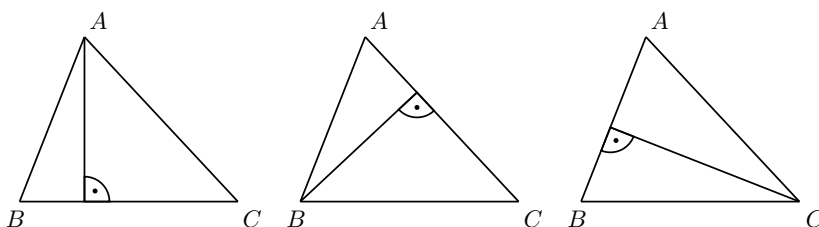
- $\triangle ABC : \sin(\alpha + \beta) = \frac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \sin(\alpha + \beta)$ ,
- $\triangle ABC : \cos(\alpha + \beta) = \frac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \cos(\alpha + \beta)$ ,
- $\triangle ACE : \sin \beta = \frac{|AE|}{1} \Rightarrow |AE| = \sin \beta$ ,
- $\triangle ACE : \cos \beta = \frac{|CE|}{1} \Rightarrow |CE| = \cos \beta$ ,
- $\triangle ABD : \sin \alpha = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{|AD|} \Rightarrow |AD| = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$ ,
- $\triangle CDE : \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{|CE|}{|DE|} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta + \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .

## Kapitola 3

# Goniometrie obecného trojúhelníku

### 3.1 Věty o průmětech

Goniometrické hodnoty (ostrých) úhlů jsme zavedli v předchozí kapitole jako poměry stran pravoúhlých trojúhelníků. Abychom je uplatnili při výpočtech v obecných trojúhelnících, použijeme obrat, který byl znám již starověkým matematikům: zkoumaný trojúhelník rozdělíme výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. V případě *ostrouhlého* trojúhelníku tak máme dokonce tři možnosti (obr. 3.1). Co je všem třem rozdělením na dva pravoúhlé trojúhelníky společné?



Obrázek 3.1

Pro přepony a odvěsny každého páru vytvořených trojúhelníků platí:

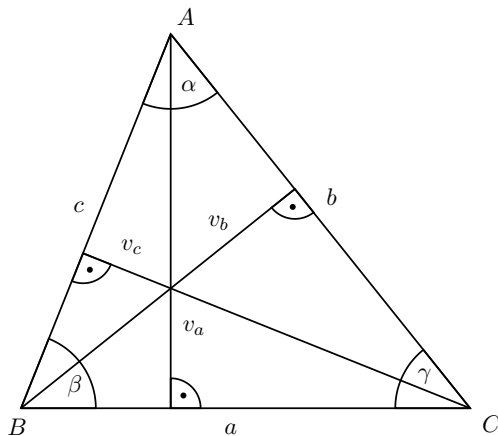
1. přepony jsou dvě strany původního trojúhelníku,
2. společná odvěsna je výška na třetí stranu,
3. součet zbylých odvěsen je roven třetí straně.

V této kapitole ukážeme, že z těchto tří vlastností lze odvodit všechna pravidla pro výpočty v obecných trojúhelnících. K tomu nejprve v uvažovaných dvojicích pravoúhlých trojúhelníků vyjádříme pomocí přepon a vnitřních úhlů jejich odvěsny (podle obr. 3.2)<sup>1</sup> a pak vlastnosti uvedené v bodech 2 a 3 vyjádříme vztahy v levém, resp. pravém sloupci:

$$\begin{array}{ll} \bullet v_a = c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma, & \bullet a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta, \\ \bullet v_b = c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \gamma, & \bullet b = a \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \alpha, \\ \bullet v_c = b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta, & \bullet c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha. \end{array}$$

<sup>1</sup>Nepotřebujeme k tomu pochopitelně výsledek, jehož první historicky známý důkaz podal L. Euler a který je z obr. 3.2 patrný, že totiž výšky trojúhelníku procházejí jedním bodem. Zmíníme se o něm v závěru podkapitoly 3.6.

Tyto rovnosti vlastně vyjadřují vztahy pro kolmé průměty libovolných dvou stran trojúhelníku do



Obrázek 3.2

směru třetí strany a do směru k němu kolmé. Proto se jim často říká *věty o průmětech*. Jejich základní důsledky (známé pod názvy sinová a kosinová věta) posoudíme v podkapitolách 3.3 a 3.4. Předtím ještě vyřešíme důležitou otázku, jak zařídit, abychom věty o průmětech mohli používat ve stejné podobě nejen pro ostroúhlé, ale i tupoúhlé trojúhelníky, aniž bychom museli přecházet od tupých vnitřních úhlů k ostrým vnějším úhlům.

### 3.2 Goniometrické hodnoty tupých úhlů

Věty o průmětech – základ celé trigonometrie – byly v podkapitole 3.1 odvozeny a mají prozatím smysl pro trojúhelníky, které jsou ostroúhlé. Dosud jsme totiž nedefinovali hodnoty  $\sin \alpha$  a  $\cos \alpha$  v případě, kdy  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Hodnoty sinu a kosinu tupého úhlu nyní zavedeme právě tak, aby věty o průmětech platily pro strany a úhly libovolného trojúhelníku.<sup>2</sup>

Dvě ze tří výšek *tupoúhlého* trojúhelníku  $ABC$  s vnitřním úhlem  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$  leží vně trojúhelníku, totiž výšky  $v_b$  a  $v_c$ . Zaměříme se pouze na jednu z nich, např. výšku  $v_c$ .<sup>3</sup> Její patu výšky  $v_c$  označíme  $P$  a vedlejší úhel k úhlu  $\alpha$  označíme  $\alpha'$  (obr. 3.3). Jeho velikost je  $\alpha' = 180^\circ - \alpha < 90^\circ$ . Výšku  $v_c$  nyní vyjádříme pomocí sinů úhlů v pravoúhlých trojúhelnících  $PBC$  a  $PAC$ :

$$v_c = a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha'.$$

V podkapitole 3.1 jsme v ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  odvodili dvojí vyjádření výšky  $v_c$  ve tvaru

$$v_c = a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha.$$

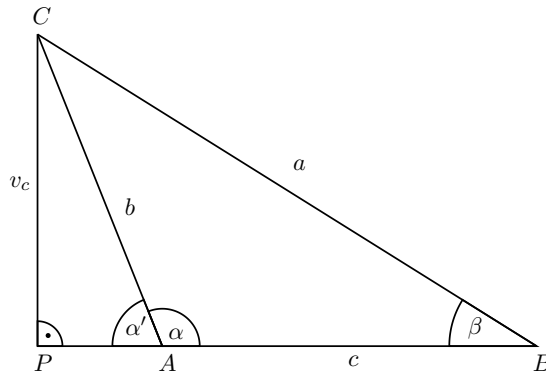
Aby věty o průmětech libovolných dvou stran do směru kolmé k třetí straně byly vyjádřeny stejným vzorcem pro strany a úhly libovolného trojúhelníku, budeme požadovat, aby pro hodnotu sinu tupého úhlu  $\alpha$  platilo

$$\sin \alpha = \sin \alpha'.$$

<sup>2</sup>Pomocí limitních úvah v kap. 2 zavedené hodnoty  $\sin 90^\circ = 1$  a  $\cos 90^\circ = 0$  zaručují platnost vět o průmětech i pro pravoúhlé trojúhelníky – jsou to triviální rovnosti.

<sup>3</sup>Ke stejnému závěru bychom došli i při úvaze o druhé „vnější“ výšce  $v_b$ .





Obrázek 3.3

Vrátíme se k pravoúhlým trojúhelníkům  $PBC$  a  $PAC$  z obr. 3.3 a tentokrát pomocí kosinů jejich úhlů vyjádříme stranu  $c$ :

$$c = |AB| = |BP| - |AP| = a \cdot \cos \beta - b \cdot \cos \alpha'.$$

V podkapitole 3.1 jsme v ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  odvodili vyjádření strany  $c$  ve tvaru

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha.$$

Porovnání obou rovností vede k požadavku, aby pro hodnotu kosinu tupého úhlu  $\alpha$  platilo

$$\cos \alpha = -\cos \alpha'.$$

Oba odvozené požadavky splníme, když pro každé  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$  definujeme:

$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha), \quad (3.1)$$

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha). \quad (3.2)$$

Vzorce 3.1 a 3.2 pak zřejmě platí i pro  $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ .

Tímto postupem, totiž na základě vzorců, které ještě jednou zapíšeme pro úhly v obloukové míře

$$\boxed{\sin x = \sin(\pi - x) \quad \text{a} \quad \cos x = -\cos(\pi - x),}$$

jsme definiční obory funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$  rozšířili z intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  na interval  $\langle 0, \pi \rangle$ . Grafy těchto funkcí jsou zobrazeny na obr. 3.4.

Bez důkazu, který je triviální, uvedeme, že vzorec zvaný goniometrická jednička

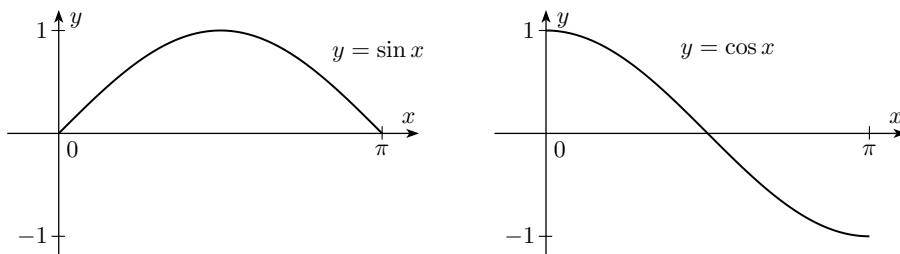
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(viz podkapitola 2.2) zůstává v platnosti pro každé  $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ . Následující dva vzorce

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha, \quad (3.3)$$

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha \quad (3.4)$$

pro sinus a kosinus součtu ostrého úhlu s úhlem pravým pro libovolné  $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$  již důkazy opatříme.


 Obrázek 3.4: Grafy funkcí sinus a kosinus na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ 

*Důkaz vzorců 3.3 a 3.4:*

Jelikož je úhel  $\alpha + 90^\circ$  tupý, použijeme vzorce 3.1 a 3.2 z definice sinu a kosinu tupého úhlu:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 90^\circ) &= \sin[180^\circ - (\alpha + 90^\circ)] = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \\ \cos(\alpha + 90^\circ) &= -\cos[180^\circ - (\alpha + 90^\circ)] = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha,\end{aligned}$$

kde jsme nakonec využili vztah goniometrické funkce se svou kofunkcí z části 2.1.2.

### 3.3 Sinová věta a obsah trojúhelníku

V trigonometrické praxi je *sinová věta* jedno z nejužívanějších tvrzení o rovinných trojúhelnících. Její obvyklý tvar odvodíme z věty o výškách trojúhelníku jako průmětech stran, kterou můžeme podle podkapitoly 3.1 zapsat pro ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  jako

$$\begin{aligned}v_a &= c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma, \\ v_b &= c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \gamma, \\ v_c &= b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta,\end{aligned}$$

a která díky proceduře z podkapitoly 3.2 nyní platí pro obecný trojúhelník  $ABC$  (bez ohledu na to, zda je ostroúhlý, pravoúhlý či tupouhlý). Přepíšeme-li rovnosti součinů na rovnosti podílů, dostaneme:

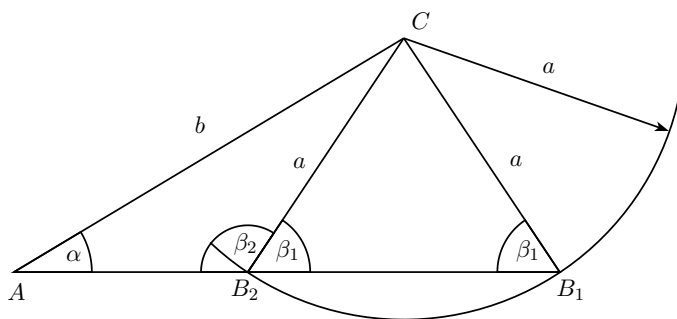
**Věta 3.3.1** (Sinová věta). *V libovolném trojúhelníku  $ABC$  platí:*

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}} \quad \text{neboli} \quad \boxed{a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma}. \quad (3.5)$$

Sinovou větu používáme k standardním výpočtům zejména v následujících případech:

- Máme dány dva úhly trojúhelníku a délku jedné jeho strany a chceme dopočítat velikosti zbývajících stran.
- Známe délky dvou stran trojúhelníku a velikost jednoho úhlu, který tyto strany nespírají, a chceme zjistit zbývajících úhly.

Pokud je ve druhém případě zadán úhel oproti *menší* z obou daných stran, vede úloha ke dvěma možným výsledkům – viz konstrukci na obr. 3.5. Vzhledem ke vzorci  $\sin(\pi - x) = \sin x$  není totiž číslo  $x$  z intervalu  $(0, \pi)$  hodnotou  $\sin x$  určeno jednoznačně (pro úhly z obr. platí  $\sin \beta_1 = \sin \beta_2$ ,



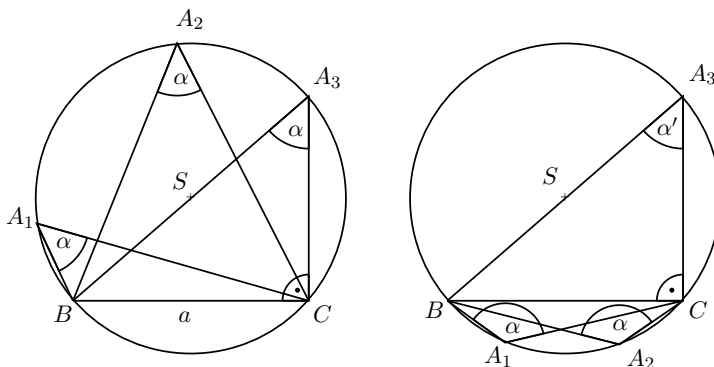
Obrázek 3.5: Dáno  $a, b, \alpha$ , sestrojte  $\triangle ABC$ .

neboť  $\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ$ ).

Kromě obvyklého tvaru (3.5) sinové věty odvodíme ještě tzv. *rozšířenou sinovou větu* založenou na vlastnostech úhlů v kružnici. Podle věty o obvodovém úhlu je totiž poměr  $a : \sin \alpha$  konstantní pro všechny trojúhelníky  $ABC$  s proměnným vrcholem  $A$ , společnou stranou  $BC$  a společnou opsanou kružnicí (viz obr. 3.6 vlevo pro úhel  $\alpha < 90^\circ$ ). V poloze  $A = A_3$ , kdy  $BA_3$  je průměrem dané kružnice, je podle Thaletovy věty úhel  $A_3CB$  pravý, takže

$$\sin \alpha = \frac{a}{|BA_3|}, \quad \text{odtud} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = |BA_3| = 2r,$$

kde  $r$  je poloměr kružnice. Stejný vzorec platí i v případě tupého úhlu  $\alpha$  (viz obr. 3.6 vpravo), kdy ostrý úhel u vrcholu  $A_3$  má velikost  $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ , neboť  $\sin \alpha' = \sin \alpha$ . Dostáváme tak slíbenou



Obrázek 3.6

rozšířenou sinovou větu: *V libovolném trojúhelníku  $ABC$  vepsaném do kružnice o poloměru  $r$  platí*

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.} \quad (3.6)$$

V této podkapitole se ještě zmíníme o vzorcích pro obsah trojúhelníku, ve kterých vystupuje funkce sinus a které odvodíme ze základních vzorců pro obsah trojúhelníku  $ABC$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c.$$

1.

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

*Odvození:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma, \text{ podobně ostatní dva vzorce.}$$

2.

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$$

*Odvození:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \frac{a}{2r} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}.$$

3.

$$S = 2r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

*Odvození:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin \gamma \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin \gamma \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin \gamma \cdot 2r \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha = 2r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Proslulý *Heronův vzorec* pro obsah trojúhelníku odvodíme v příkladu 3.7.4 pomocí kosinové věty.

### 3.4 Kosinová věta, závislost tří kosinů

Sinová věta nám nepomůže vyřešit trojúhelník, když máme dány dvě jeho strany a úhel, který svírají, nebo když známe délky všech tří stran trojúhelníku. Nový prostředek, kterým zbývající dva případy vyřešíme, se jmenuje *kosinová věta* a věnujeme mu celou tuto podkapitolu.

Kosinovou větu odvodíme z věty o průmětech

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta,$$

$$b = a \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \alpha,$$

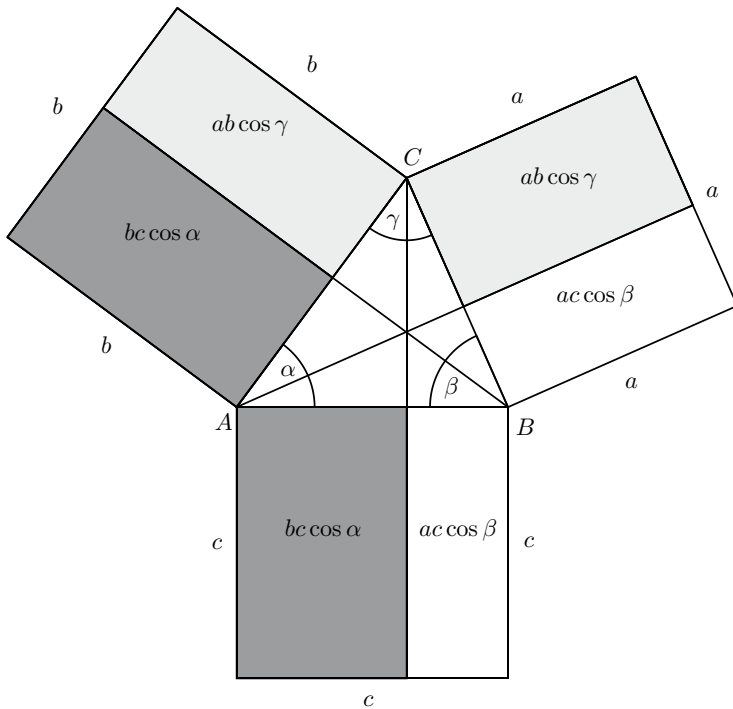
$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha,$$

uvedené v podkapitole 3.1 a platné, znovu připomínáme, pro obecný trojúhelník  $ABC$ . Nejdříve jednotlivé rovnosti vynásobíme po řadě délkami stran  $a, b, c$

$$a^2 = a \cdot b \cdot \cos \gamma + a \cdot c \cdot \cos \beta, \tag{3.7}$$

$$b^2 = b \cdot a \cdot \cos \gamma + b \cdot c \cdot \cos \alpha, \tag{3.8}$$

$$c^2 = c \cdot a \cdot \cos \beta + c \cdot b \cdot \cos \alpha \tag{3.9}$$


 Obrázek 3.7: Důkaz  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$  přes obsahy

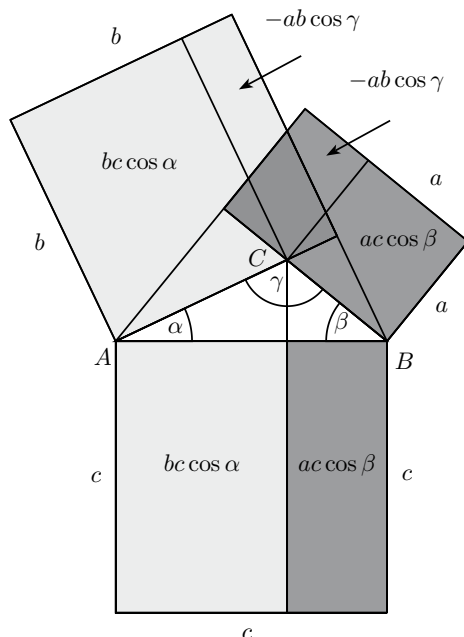
a nové rovnosti mezi sebou sečteme a odečteme, jak je vidět níže:

$$\begin{aligned}
 (3.7) + (3.8) - (3.9) &: & a^2 + b^2 - c^2 &= 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma, \\
 (3.8) + (3.9) - (3.7) &: & b^2 + c^2 - a^2 &= 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \\
 (3.9) + (3.7) - (3.8) &: & c^2 + a^2 - b^2 &= 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta.
 \end{aligned}$$

Dodejme, že ze získaných rovností, které ihned přepíšeme do obvyklých tvarů kosinové věty, naopak plynou sčítáním a odčítáním rovností (3.7) – (3.9), a tedy i výchozí tři rovnosti. Proto je věta o průmětu dvou stran trojúhelníku do směru třetí strany algebraicky ekvivalentní s kosinovou větou, k jejímuž důkazu jsme (narozdíl od obvyklého učebnicového postupu) nepotřebovali Pythagorovu větu.

**Věta 3.4.1** (Kosinová věta). *V libovolném trojúhelníku ABC platí rovnosti:*

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \\
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta, \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.
 \end{aligned}
 } \tag{3.10}$$



Obrázek 3.8: Důkaz  $a^2 + b^2 + (-2ab \cos \gamma) = c^2$  přes obsahy

Vztah čtverců  $a^2, b^2, c^2$  daný kosinovou větou lze rovněž odvodit názorně (viz obr. 3.7 pro ostroúhlý trojúhelník, obr. 3.8 pro tupouhlý trojúhelník a obr. 3.9 pro pravoúhlý trojúhelník). V jednotlivých obrázcích obdélníky téže barvy sice nejsou shodné, mají však shodné obsahy uvedených hodnot.<sup>4</sup>

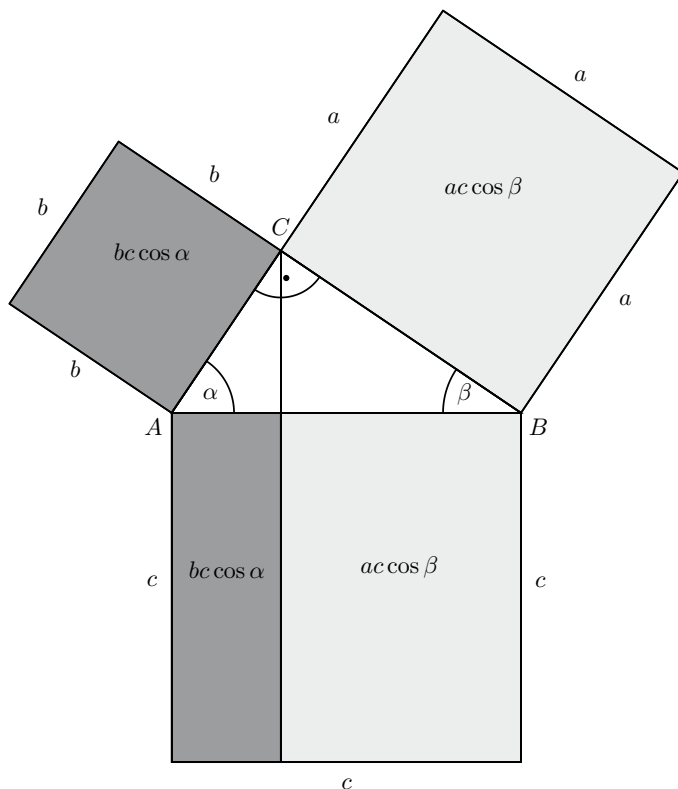
Praktické výpočty založené na kosinové větě umožňují jak přímé určení délek z levých stran vzorců (3.10), tak jednoznačné určení úhlů, jejichž kosiny vystupují na pravých stranách. Druhý fakt je dán tím, že funkce kosinus je na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ , ve kterém leží úhly každého trojúhelníku, *prostá*, tedy hodnotou  $\cos x$  je číslo  $x$  z intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  určeno jednoznačně.

Ještě poznamenejme, že v případě, kdy známe délky všech stran trojúhelníku, můžeme ze vzorců (3.10) snadno určit znaménka hodnot  $\cos \alpha, \cos \beta$  a  $\cos \gamma$  a podle nich rozhodnout, zda jde o trojúhelník ostroúhlý (všechny tři hodnoty jsou kladné), tupouhlý (mezi hodnotami je jedna záporná) nebo pravoúhlý (jedna hodnota je nulová). Tak například podle prvního ze vzorců (3.10) platí:

- $\alpha < 90^\circ$ , je-li  $b^2 + c^2 > a^2$ ,
- $\alpha = 90^\circ$ , je-li  $b^2 + c^2 = a^2$ ,
- $\alpha > 90^\circ$ , je-li  $b^2 + c^2 < a^2$ .

V druhé části této podkapitoly odvodíme, jaká závislost platí mezi kosiny vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku. Vráťme se k rovnostem z věty o průmětech, které tentokrát zapíšeme ve

<sup>4</sup>Čtverce nad stranami trojúhelníku jsou na obrázcích rozděleny na dvojice obdélníků způsobem, který odpovídá rovnostem (3.7) – (3.9) z našeho důkazu kosinové věty. Tato „vizualizace“ kosinové věty je převzata z knihy [20].



Obrázek 3.9: Důkaz  $a^2 + b^2 = c^2$  přes obsahy

tvaru

$$\begin{aligned} a - \cos \gamma \cdot b - \cos \beta \cdot c &= 0, \\ -\cos \gamma \cdot a + b - \cos \alpha \cdot c &= 0, \\ -\cos \beta \cdot a - \cos \alpha \cdot b + c &= 0. \end{aligned}$$

Protože trojice  $(a, b, c)$  je netriviálním řešením takové homogenní soustavy tří lineárních rovnic, musí být determinant této soustavy roven nule:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vyjádřením determinantu např. pomocí Sarrusova pravidla dostaneme následující výsledek.<sup>5</sup>

**Věta 3.4.2.** Pro kosiny vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku  $ABC$  platí

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

<sup>5</sup>Odvození jsme převzali z učebnice [22].

Všimněme si, že podle dokázané věty je trojúhelník  $ABC$

- ostroúhlý, je-li  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma < 1$ ,
- pravoúhlý, je-li  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ,
- tupoúhlý, je-li  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma > 1$ .

O tom, který ze tří případů nastane, rozhoduje totiž znaménko součinu  $2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  z dokázaného vzorce. Mnohé jiné trigonometrické nerovnosti posoudíme v podkapitole 5.2.

### 3.5 Tangentová věta, Mollweidovy vzorce

Nejen funkce sinus a kosinus, ale také funkce tangens dává název jednomu tvrzení o rovinných trojúhelnících.

**Věta 3.5.1** (Tangentová věta). *Pro každý trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  a protilehlými stranami délek  $a, b, c$  platí*

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2}}.} \quad (3.11)$$

Než přistoupíme k důkazu, poznamenejme, že v minulosti měla tangentová věta velký numerický význam, neboť v případě (3.11) jde o rovnosti, které se snadno logaritmují (narozdíl od rovností (3.10) z kosinové věty). Proto dřívější počtáři dávali přednost tangentové větě například při úloze vypočítat z daných délek  $a, b$  a úhlu  $\gamma$  trojúhelníku  $ABC$  zbylou stranu  $c$ . Dnes bychom spíše sáhli po kosinové větě, avšak v dané situaci ze známých hodnot  $a-b, a+b$  a  $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$  můžeme z prvního ze vzorců (3.11) určit  $\frac{\alpha-\beta}{2}$ , poté vypočítat  $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$  a stranu  $c$  nakonec dopočítat ze sinové věty.

Posoudíme nyní první ze vzorců (3.11), v dalších dvou jde jen o cyklickou záměnu. Podle našeho dosavadního výkladu má tento vzorec smysl, jen když oba úhly  $\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}$  leží v intervalu  $(0^\circ, 90^\circ)$ . Pro druhý úhel, který je roven  $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ , to platí automaticky; pro první úhel dostáváme podmínku  $\alpha \geq \beta$  neboli  $a \geq b$ . V případě  $a < b$  bychom proto měli psát upravený vzorec

$$\frac{b-a}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta-\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Chceme-li však, aby vzorec (3.11) měly univerzální platnost, stačí dodefinovat hodnoty tangens pro úhly z intervalu  $(-90^\circ, 0^\circ)$  tak, aby pro každé  $x$  platilo

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x.$$

Tangentovou větu nebudeme dokazovat přímo. Ukážeme nejprve, že plyne z tzv. *Mollweidových vzorců* (vypíšeme a níže dokážeme jen jednu ze tří analogických dvojic)

$$\boxed{\begin{aligned} (a-b) \cdot \cos \frac{\gamma}{2} &= c \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}, \\ (a+b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} &= c \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}. \end{aligned}}$$



Když totiž tyto rovnosti mezi sebou vydělíme a použijeme implikaci

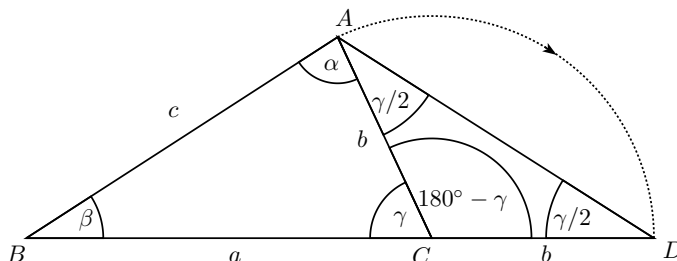
$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2},$$

dostaneme rovnou první ze vzorců (3.11). Nezbyvá než odvodit oba vypsané Mollweidovy vzorce. Algebraicky je možné je získat ze sinové věty

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

za pomocí vzorců pro  $\sin \alpha - \sin \beta$ ,  $\sin \alpha + \sin \beta$ , které však posoudíme až v kap. 4. Místo toho nyní dokážeme Mollweidovy vzorce názorně pomocí dvou užitečných obrázků, kterými např. při konstrukčních úlohách znázorňujeme součet, resp. rozdíl dvou stran trojúhelníku. Budeme přitom předpokládat, že platí  $a \geq b$ , a tedy i  $\alpha \geq \beta$ .<sup>6</sup>

Na obrázku 3.10 vidíme takový trojúhelník  $ABC$ , jehož strana  $AC$  je otočena kolem bodu  $C$  do směru prodloužené strany  $BC$  za vrchol  $C$ . Vznikl tak rovnoramenný trojúhelník  $ACD$  s vnitřním úhlem  $ACD$  proti základně  $AD$  o velikosti  $180^\circ - \gamma$ . Odtud plyne  $|\angle ADC| = |\angle CAD| = \frac{\gamma}{2}$ . Nyní



Obrázek 3.10

se zaměříme na trojúhelník  $ABD$ , ve kterém platí  $|BD| = a + b$ ,

$$|\angle BAD| = \alpha + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

a napíšeme pro něj sinovou větu. Následně užijeme vzorec (3.3) a provedeme drobnou úpravu:

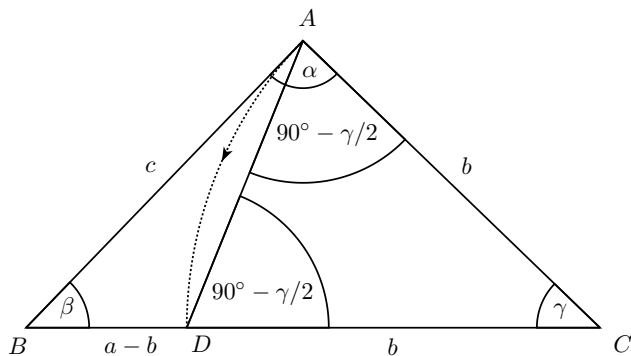
$$\frac{a + b}{c} = \frac{\sin(90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2})}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \text{ odkud } (a + b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = c \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Mollweidův vzorec pro součet stran je tak dokázán.

Trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha \geq \beta$  uvažíme i při odvození druhého Mollweidova vzorce. Tentokrát však otočíme kratší stranu  $AC$  kolem bodu  $C$  do směru polopřímky  $CB$  (obr. 3.11). Dostaneme tak rovnoramenný trojúhelník  $ACD$  s vnitřními úhly u základny  $AD$  o velikosti

$$|\angle ADC| = |\angle CAD| = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

<sup>6</sup>Mollweidovy vzorce platí pro všechny trojúhelníky ve stejné podobě, když hodnoty sinu a kosinu definujeme pro úhly z intervalu  $(-90^\circ, 0^\circ)$  tak, aby platilo  $\sin(-x) = -\sin x$  a  $\cos(-x) = \cos x$ , což je v souladu s dřívější dohodou  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$  podle vzorce  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .



Obrázek 3.11

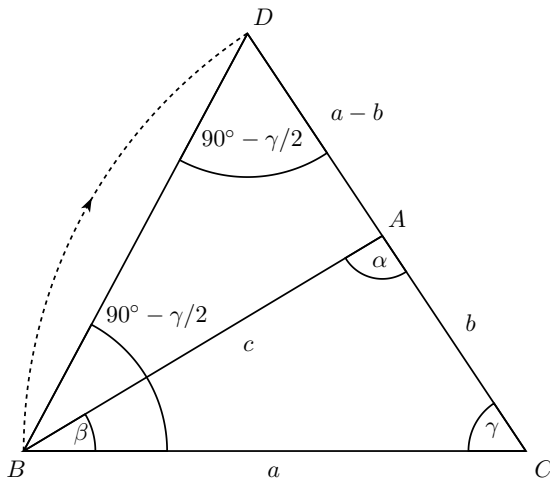
Sinová věta pro trojúhelník  $ABD$  se stranou  $BD$  délky  $a - b$  a velikostmi vnitřních úhlů

$$|\angle BAD| = \alpha - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{a} \quad |\angle ADB| = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

má následující tvar, který snadno upravíme pomocí vzorce (3.3):

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin (90^\circ + \frac{\gamma}{2})} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}, \text{ odkud } (a - b) \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = c \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Tím je Mollweidův vzorec pro rozdíl stran dokázán.



Obrázek 3.12

Dodejme, že stejně úspěšně jsme mohli otočit delší stranu  $BC$  kolem bodu  $C$  do směru kratší strany

$AC$  prodloužené za vrchol  $A$  (viz obr. 3.12). Získali bychom tím rovnoramenný trojúhelník  $BCD$  s vnitřními úhly u základny  $BD$  o velikosti

$$|\angle CBD| = |\angle BDC| = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

I nyní vede použití sinové věty pro trojúhelník  $ABD$  s délkou strany  $|AD| = a - b$  a velikostí vnitřního úhlu

$$|\angle ABD| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

rychle k výsledku:

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin (90^\circ - \frac{\gamma}{2})} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}, \text{ odkud } (a - b) \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = c \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

### 3.6 Odvození součtových vzorců

Jak uvidíme v kapitole 4, prakticky všechny další goniometrické vzorce se dají odvodit ze součtových vzorců

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \end{aligned}} \quad (3.12)$$

kteřé měly i zásadní význam při sestavování tabulek goniometrických funkcí. Nyní, v závěrečné teoretické podkapitole kapitoly o trojúhelnících, podáme dva důkazy součtových vzorců (3.12) pro případ, kdy všechny tři úhly  $\alpha, \beta, \alpha + \beta$  leží v intervalu  $(0^\circ, 180^\circ)$ . Toho využijeme ve 4. kapitole, kdy na uvedený případ převedeme důkaz součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus definované v oboru  $\mathbb{R}$ .

Před dvěma slíbenými důkazy si povšimněme, že podmínky  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$  zaručují existenci trojúhelníku s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ . Protože  $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$ ,  $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ , stačí k důkazům (3.12) ověřit, že pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku  $ABC$  platí vzorce

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos \gamma &= \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Přistoupíme nyní k prvnímu, algebraickému důkazu vzorců (3.13), při kterém využijeme vzorce z vět o průmětech stran trojúhelníku a goniometrickou jedničku. Výhodou tohoto prvního důkazu bude jeho „univerzálnost“, protože nebude nutné rozlišovat, zda zkoumaný trojúhelník s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  je ostroúhlý, pravoúhlý či tupouhlý.

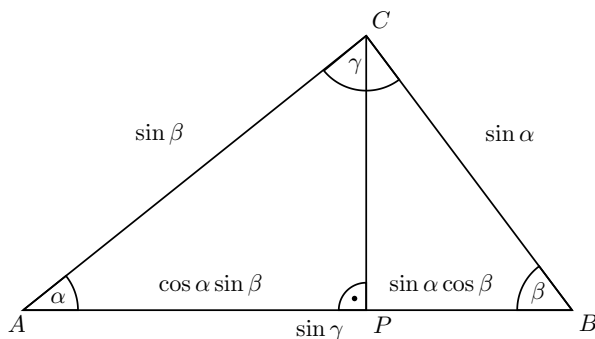
K odvození prvního ze vzorců (3.13) použijeme pouze tři vztahy  $c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$ ,  $a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha$ ,  $b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$ :

- $c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$ ,
- $c \cdot \sin \gamma = (a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \gamma$ ,
- $c \cdot \sin \gamma = (a \cdot \sin \gamma) \cdot \cos \beta + (b \cdot \sin \gamma) \cdot \cos \alpha$ ,
- $c \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + c \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha$ ,
- $\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$ .

Druhý ze vzorců (3.13) odvodíme tak, že kromě tří vztahů  $b = a \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \alpha$ ,  $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ ,  $c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$  využijeme též goniometrickou jednotku:

- $a \cdot \cos \gamma = b \cdot 1 - c \cdot \cos \alpha$ ,
- $a \cdot \cos \gamma = b \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - c \cdot \cos \alpha$ ,
- $a \cdot \cos \gamma = b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha - c \cdot \cos \alpha$ ,
- $a \cdot \cos \gamma = (b \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (c - b \cdot \cos \alpha)$ ,
- $a \cdot \cos \gamma = a \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot a \cdot \cos \beta$ ,
- $\cos \gamma = \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \beta$ .

Při druhém geometrickém důkazu vzorců (3.13) se přesvědčíme, že součtové vzorce v podobě (3.13) se dají „přečíst“ z délek úseků stran a výšek zkoumaného trojúhelníku. Takový postup je jistě názornější a didakticky poučnější, vyžaduje však zakreslení několika obrázků pro ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky. Z rozsahových důvodů se omezíme pouze na případ, kdy oba úhly  $\alpha, \beta$  jsou ostré, pro důkaz druhého vzorce (3.13) nakreslíme pouze jeden obrázek, v němž i úhel  $\gamma$  bude ostrý.



Obrázek 3.13

Podle sinové věty můžeme vybrat jednotku délky tak, že trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  bude mít strany délek  $a = \sin \alpha, b = \sin \beta, c = \sin \gamma$  (viz obr. 3.13),<sup>7</sup> a odvodíme nejprve vzorec  $\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ :

- $\triangle ACP : \cos \alpha = \frac{|AP|}{\sin \beta} \Rightarrow |AP| = \cos \alpha \sin \beta$ ,
- $\triangle BCP : \cos \beta = \frac{|BP|}{\sin \alpha} \Rightarrow |BP| = \sin \alpha \cos \beta$ ,
- $|AB| = \sin \gamma = |AP| + |BP| = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$ .

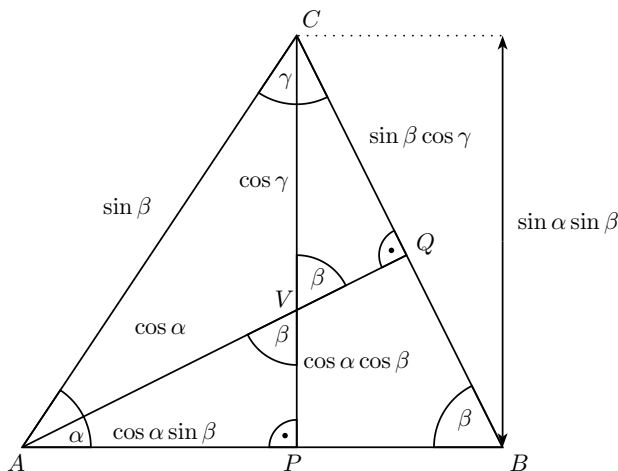
Trojúhelník  $ABC$  s délkami stran  $a = \sin \alpha, b = \sin \beta, c = \sin \gamma$  (obr. 3.14) použijeme i pro odvození druhého vzorce  $\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$ . Uvážíme k tomu ještě průsečík  $V$  výšek

<sup>7</sup>Podle rozšířené sinové věty se tehdy jedná o trojúhelník vepsaný do kružnice o průměru 1.

$CP$  a  $AQ$ :

- $\triangle ACP : \sin \alpha = \frac{|CP|}{\sin \beta} \Rightarrow |CP| = \sin \alpha \sin \beta,$
- $\triangle ACP : \cos \alpha = \frac{|AP|}{\sin \beta} \Rightarrow |AP| = \cos \alpha \sin \beta,$
- $\triangle BCP : |\angle BCP| = 90^\circ - \beta \Rightarrow \triangle CVQ : |\angle CVQ| = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta,$
- $|\angle CVQ| = \beta \Rightarrow |\angle AVP| = \beta,$
- $\triangle APV : \sin \beta = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{|AV|} \Rightarrow |AV| = \cos \alpha,$
- $\triangle APV : \cos \beta = \frac{|PV|}{\cos \alpha} \Rightarrow |PV| = \cos \alpha \cos \beta,$
- $\triangle ACQ : \cos \gamma = \frac{|CQ|}{\sin \beta} \Rightarrow |CQ| = \sin \beta \cos \gamma,$
- $\triangle CQV : \sin \beta = \frac{\sin \beta \cos \gamma}{|CV|} \Rightarrow |CV| = \cos \gamma,$
- $|CV| = |CP| - |PV| \Rightarrow \cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta.$

Poslední důkaz má ještě jeden zajímavý důsledek, tvrzení o existenci průsečíku výšek trojúhelníku.



Obrázek 3.14

Zjistili jsme totiž, že dvě výšky trojúhelníku, totiž  $AQ$  a  $CP$ , se protínají v takovém bodě  $V$ , že  $|AV| = \cos \alpha$  a  $|CV| = \cos \gamma$ . Kdybychom místo výšky  $CP$  vybrali výšku  $BR$  z vrcholu  $B$  a celý postup zopakovali, usoudili bychom, že stejný bod  $V$  výšky  $AQ$  leží i na výšce  $BR$  (a to tak, že platí  $|BV| = \cos \beta$ ).

Na závěr této podkapitoly dodejme, že oba podané trigonometrické důkazy (algebraický i geometrický) součtových vzorců (3.12) lze snadno upravit i na důkazy rozdílových vzorců

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

a to znovu pochopitelně pro případ, kdy všechny tři úhly  $\alpha, \beta, \alpha - \beta$  leží v intervalu  $(0^\circ, 180^\circ)$ . Tehdy totiž můžeme zopakovat oba postupy pro trojúhelník s trojicí vnitřních úhlů  $\alpha' = 180^\circ - \alpha, \beta' = \beta$  a  $\gamma' = \alpha - \beta$  (zřejmě  $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$ ). Dostaneme tak opět vzorce (3.13), tentokrát v podobě

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(180^\circ - \alpha) \cos \beta + \cos(180^\circ - \alpha) \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \sin(180^\circ - \alpha) \sin \beta - \cos(180^\circ - \alpha) \cos \beta,\end{aligned}$$

ze kterých již okamžitě plynou kýžené vzorce (3.14) díky rovnostem  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  a  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .

### 3.7 Příklady

■ **Příklad 3.7.1.** Pomocí sinové věty dokažte dvě tvrzení:

- v libovolném trojúhelníku  $ABC$  platí

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 1 \Rightarrow \min\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\} < 30^\circ,$$

- je-li  $V$  průsečík výšek trojúhelníku  $ABC$ , který není pravoúhlý, mají kružnice opsané trojúhelníkům  $ABV, BCV$  a  $ACV$  stejný poloměr jako kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$ .

*Řešení:*

Důkaz prvního tvrzení:

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ , a následně dokážeme, že platí  $\beta + \gamma < 30^\circ$ . Z trojúhelníkové nerovnosti  $b + c > a$  (součet délek dvou stran trojúhelníku je vždy větší než délka strany třetí)<sup>8</sup> a ze sinové věty plyne  $\sin \beta + \sin \gamma > \sin \alpha$ . Odtud a ze zadání dostáváme

$$1 \geq \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > \sin \alpha + \sin \alpha = 2 \sin \alpha.$$

Z nerovnosti  $2 \sin \alpha < 1$  vyplývá  $\sin \alpha < \frac{1}{2}$ , tedy  $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$  nebo  $\alpha \in (150^\circ; 180^\circ)$ . Ovšem z předpokladu, že  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ , plyne  $\alpha \geq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 60^\circ$ , tudíž  $\alpha > 150^\circ$ . Součet zbývajících dvou úhlů  $\beta + \gamma$  (rovný  $180^\circ - \alpha$ ) tedy musí být menší než  $30^\circ$ .

Důkaz druhého tvrzení:

Podle rozšířené sinové věty mají kružnice opsané trojúhelníkům  $ABC$  a  $ABV$  poloměry

$$r_{ABC} = \frac{|AB|}{2 \sin \gamma} \quad \text{a} \quad r_{ABV} = \frac{|AB|}{2 \sin |\angle AVB|}.$$

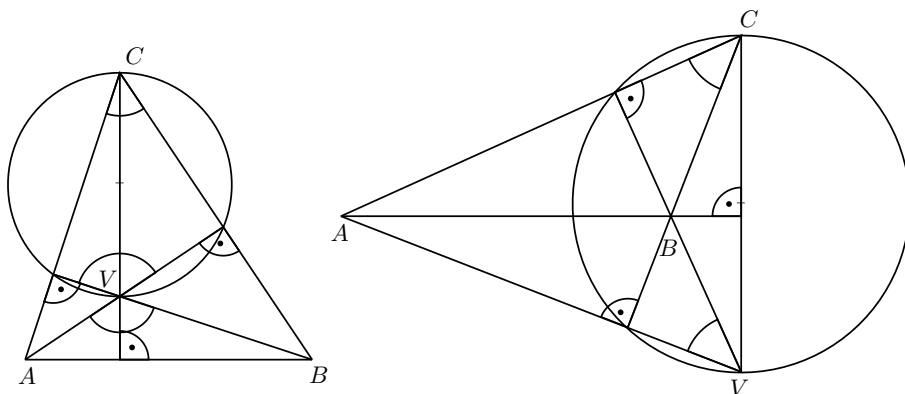
Protože platí buď  $|\angle AVB| = 180^\circ - \gamma$  (jsou-li oba úhly  $\alpha, \beta$  ostré jako na obr. 3.15 vlevo), nebo  $|\angle AVB| = \gamma$  (je-li jeden z úhlů  $\alpha, \beta$  tupý jako na obr. 3.15 vpravo), je v každém případě splněna rovnost  $\sin |\angle AVB| = \sin \gamma$ , a tedy i rovnost  $r_{ABC} = r_{ABV}$ . Pro poloměry  $r_{BCV}$  a  $r_{ACV}$  je důkaz analogický.

■ **Příklad 3.7.2.** Užitím sinové věty dokažte tzv. *Cevovu větu*<sup>9</sup>: Jsou-li uvnitř stran  $BC, CA, AB$  trojúhelníku  $ABC$  zvoleny po řadě body  $D, E, F$  (obr. 3.16), pak následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

- (1) úsečky  $AD, BE, CF$  procházejí jedním bodem,

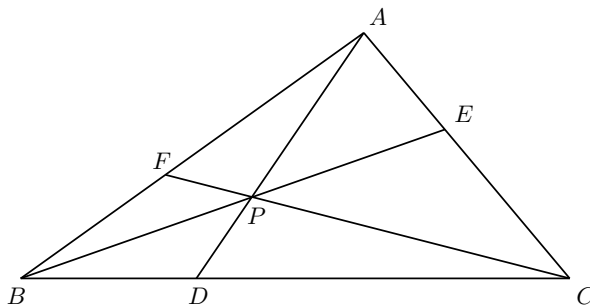
<sup>8</sup>Trojúhelníková nerovnost  $b + c > a$  formálně plyne z rovnosti  $a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$  z věty o průmětech, neboť  $\cos \gamma < 1$  a  $\cos \beta < 1$ .

<sup>9</sup>Giovanni Ceva (1647 – 1734), italský matematik.

Obrázek 3.15: Obvodové úhly v kružnici nad průměrem  $CV$ 

$$(2) \frac{\sin |\angle ABE|}{\sin |\angle CBE|} \cdot \frac{\sin |\angle BCF|}{\sin |\angle ACF|} \cdot \frac{\sin |\angle CAD|}{\sin |\angle BAD|} = 1,$$

$$(3) \frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1.$$



Obrázek 3.16

*Řešení:* Důkaz se bude skládat ze tří částí. Postupně ukážeme, že  $(1) \Rightarrow (2)$ ,  $(2) \Rightarrow (3)$  a následně  $(3) \Rightarrow (1)$ .

Předpokládejme, že platí (1) a průsečík úseček  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  označme  $P$ . Díky sinové větě v trojúhelníku  $ABP$  obdržíme rovnost

$$\frac{\sin |\angle ABE|}{\sin |\angle BAD|} = \frac{\sin |\angle ABP|}{\sin |\angle BAP|} = \frac{|AP|}{|BP|}.$$

Obdobně získáme rovnosti

$$\frac{\sin |\angle BCF|}{\sin |\angle CBE|} = \frac{|BP|}{|CP|} \quad \text{a} \quad \frac{\sin |\angle CAD|}{\sin |\angle ACF|} = \frac{|CP|}{|AP|}$$

použitím sinové věty v trojúhelnících  $BCP$  a  $ACP$ . Když všechny tři rovnosti spolu vynásobíme, dostaneme (2).

Předpokládejme, že platí (2). Sinovu větu nyní použijeme po řadě na trojúhelníky  $ABD$  a  $ACD$ :

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{\sin |\angle ADB|}{\sin |\angle BAD|} \quad \text{a} \quad \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin |\angle CAD|}{\sin |\angle ADC|}.$$

Jelikož  $|\angle ADB| + |\angle ADC| = 180^\circ$ , platí  $\sin |\angle ADB| = \sin |\angle ADC|$ . Toho využijeme při krácení, když výše uvedené rovnosti spolu vynásobíme. Získáme tak

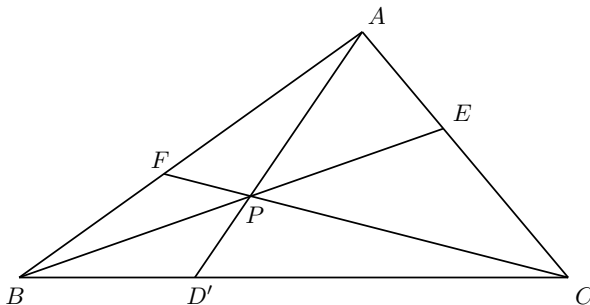
$$\frac{|CD|}{|BD|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin |\angle CAD|}{\sin |\angle BAD|}.$$

Analogicky odvodíme i rovnosti

$$\frac{|AE|}{|CE|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sin |\angle ABE|}{\sin |\angle CBE|} \quad \text{a} \quad \frac{|BF|}{|AF|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin |\angle BCF|}{\sin |\angle ACF|}.$$

Podmínku (3) obdržíme po vynásobení všech třech odvozených rovností díky předpokladu (2).

Předpokládejme, že platí (3) a že úsečky  $BE$  a  $CF$  se protínají v bodě  $P$ . Necht' polopřímka  $AP$  protne úsečku  $BC$  v bodě  $D'$  (obr. 3.17). Stačí dokázat, že  $D = D'$ . Úsečky  $AD'$ ,  $BE$  a  $CF$



Obrázek 3.17

procházejí jedním bodem  $P$ . Podle již dokázaných implikací (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3), uplatněných k trojici bodů  $E, F, D'$ , musí tedy platit

$$\frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BD'|}{|CD'|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1.$$

Porovnáním s předpokladem (3) nám vyplývá, že  $\frac{|BD'|}{|CD'|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ . Jelikož body  $D$  a  $D'$  leží na úsečce  $BC$ , jsou díky poslední rovnosti identické. Podmínka (1) je tímto dokázána.

■ **Příklad 3.7.3.** Pomocí kosinové věty odvoďte:

- rovnost  $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$  pro délky stran a úhlopříček libovolného rovnoběžníku  $ABCD$ ,
- vzorec  $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$  pro délku těžnice libovolného trojúhelníku  $ABC$  a jeho zobecnění v podobě tzv. *Stewartova vzorce*<sup>10</sup>  $|CX| = \sqrt{pa^2 + qb^2 - pqc^2}$ , kde bod  $X$  rozděluje stranu  $AB$  délky  $c$  na úseky  $|AX| = pc$  a  $|BX| = qc$  (takže  $p + q = 1$ ).

<sup>10</sup>Matthew Stewart (1717 – 1785), skotský astronom a matematik, profesor univerzity v Edinburghu.



*Řešení:*

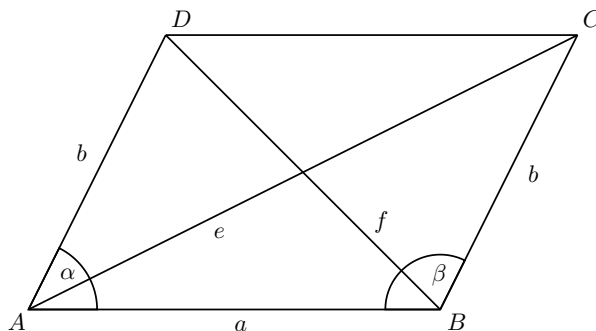
Důkaz prvního tvrzení:

Kosinovu větu použijeme hned dvakrát, a to pro trojúhelníky  $ABC$  a  $ABD$  (obr. 3.18):

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta,$$

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Jelikož  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , podle (3.2) platí  $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ . Po sečtení výše uvedených rovností proto



Obrázek 3.18

obdržíme:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2) - 2ab(\cos \alpha + \cos \beta),$$

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Důkaz druhého tvrzení:

Označme  $d = |CX|$ ,  $\varphi = |\angle AXC|$  a  $\psi = |\angle BXC|$  (obr. 3.19). Pro trojúhelníky  $ACX$  a  $BCX$  napíšeme kosinovu větu a rovnosti vynásobíme po řadě čísla  $q$  a  $p$ :

$$b^2 = d^2 + (pc)^2 - 2pcd \cos \varphi \quad / \cdot q,$$

$$a^2 = d^2 + (qc)^2 - 2qcd \cos \psi \quad / \cdot p.$$

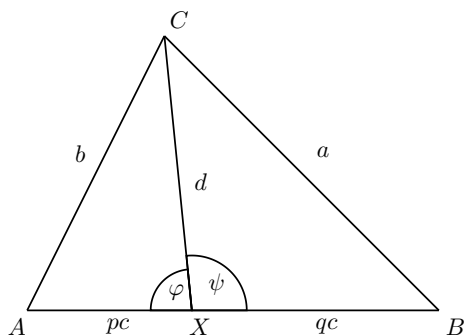
Jejich sečtením získáme

$$pa^2 + qb^2 = (p+q)d^2 + pq(p+q)c^2 - 2pqcd(\cos \varphi + \cos \psi).$$

Nyní dosadíme  $p+q=1$  a z  $\varphi + \psi = 180^\circ$  plynoucí rovnost  $\cos \varphi + \cos \psi = 0$ , čímž po malých úpravách vyjde *Stewartův vzorec*. Vzorec pro délku těžnice z něho dostaneme, když  $X$  bude střed strany  $AB$ , takže bude platit  $p=q=\frac{1}{2}$ .

■ **Příklad 3.7.4.** Pomocí vzorce  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$  pro obsah trojúhelníku  $ABC$  a s využitím kosinové věty  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  odvoďte Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku  $ABC$ :

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$



Obrázek 3.19

Řešení:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \\ S &= \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}, \\ S &= \frac{2ab}{4} \sqrt{\frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}} = \frac{1}{4} \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}, \\ S &= \frac{1}{4} \sqrt{((2ab) + (a^2 + b^2 - c^2)) \cdot ((2ab) - (a^2 + b^2 - c^2))}, \\ S &= \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) \cdot (-a^2 + 2ab - b^2 + c^2)}, \\ S &= \frac{1}{4} \sqrt{((a + b)^2 - c^2) \cdot (-(a - b)^2 + c^2)}, \\ S &= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}, \\ S &= \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}, \\ S &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}. \end{aligned}$$

■ **Příklad 3.7.5.** Ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  má obsah  $S$ . Dokažte, že platí

$$\sqrt{a^2b^2 - 4S^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4S^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4S^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Řešení: Do levé strany dokazované rovnosti postupně dosadíme za  $S$  vzorce z podkapitoly 3.3 pro

obsah trojúhelníku  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta$  a budeme upravovat:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2b^2 - 4\left(\frac{ab \sin \gamma}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4\left(\frac{bc \sin \alpha}{2}\right)^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4\left(\frac{ca \sin \beta}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2 \sin^2 \gamma} + \sqrt{b^2c^2 - b^2c^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{c^2a^2 - c^2a^2 \sin^2 \beta} = \\ &= \sqrt{a^2b^2 \cdot (1 - \sin^2 \gamma)} + \sqrt{b^2c^2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha)} + \sqrt{c^2a^2 \cdot (1 - \sin^2 \beta)} = \\ &= \sqrt{a^2b^2 \cdot \cos^2 \gamma} + \sqrt{b^2c^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \sqrt{c^2a^2 \cdot \cos^2 \beta} = \\ &= ab \cos \gamma + bc \cos \alpha + ca \cos \beta = \\ &= \frac{a}{2}b \cos \gamma + a\frac{b}{2} \cos \gamma + \frac{b}{2}c \cos \alpha + b\frac{c}{2} \cos \alpha + \frac{c}{2}a \cos \beta + c\frac{a}{2} \cos \beta = \\ &= \frac{a}{2}(b \cos \gamma + c \cos \beta) + \frac{b}{2}(c \cos \alpha + a \cos \gamma) + \frac{c}{2}(a \cos \beta + b \cos \alpha). \end{aligned}$$

Po poslední úpravě vidíme ve všech třech závorkách věty o průmětech z podkapitoly 3.1, tedy

$$\frac{a}{2}(b \cos \gamma + c \cos \beta) + \frac{b}{2}(c \cos \alpha + a \cos \gamma) + \frac{c}{2}(a \cos \beta + b \cos \alpha) = \frac{a}{2}a + \frac{b}{2}b + \frac{c}{2}c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

■ **Příklad 3.7.6.** Pro trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  a obsahem  $S$  dokažte vzorec

$$\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

*Řešení:* Ze vzorce  $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$  pro obsah trojúhelníku plyne vyjádření

$$bc \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2}bc \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2S \cotg \alpha,$$

kteří dosadíme do rovnosti  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  z kosinové věty. Dostaneme první ze tří vztahů

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cotg \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 4S \cotg \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 4S \cotg \gamma,$$

další dva se odvodí analogicky. Získané rovnosti sečteme a postupně upravíme do dokazovaného tvaru:

- $a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 4S \cotg \alpha + a^2 + c^2 - 4S \cotg \beta + a^2 + b^2 - 4S \cotg \gamma,$
- $4S \cotg \alpha + 4S \cotg \beta + 4S \cotg \gamma = a^2 + b^2 + c^2,$
- $4S (\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma) = a^2 + b^2 + c^2,$
- $\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$

■ **Příklad 3.7.7.** Užitím kosinové věty dokažte, že pro délky úhlopříček libovolného tětivového čtyřúhelníku  $ABCD$  platí vzorec<sup>11</sup>

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} \quad \text{a} \quad f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

<sup>11</sup>Jejich objev je podle [45] přisuzován indickému matematiku Mahavirovi z 9. stol. n. l.

Všimněte si, že pokud vzorce mezi sebou vynásobíme, dostaneme slavnou Ptolemaiovu větu, totiž rovnost  $ef = ab + cd$ , které jsme se věnovali v kapitole 1, kde jsme také podali její (pravděpodobně historicky původní) podobnostní důkaz.

*Řešení:* Zaměříme se na trojúhelníky  $ABC$  a  $ACD$  (obr. 3.20). Napíšeme pro ně rovnosti z kosinové věty a po řadě je vynásobíme hodnotami  $cd$  a  $ab$ :

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \quad / \cdot cd,$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta \quad / \cdot ab.$$

Nyní obě rovnosti sečteme a pomocí úprav získáme kýžený vzorec. Jelikož pro obvodové úhly  $\beta, \delta$  platí  $\beta + \delta = 180^\circ$ , použijeme během odvozování rovnost  $\cos \beta + \cos \delta = 0$ :

$$(ab + cd)e^2 = cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) - 2abcd(\cos \beta + \cos \delta),$$

$$(ab + cd)e^2 = (a^2cd + c^2ab) + (b^2cd + d^2ab),$$

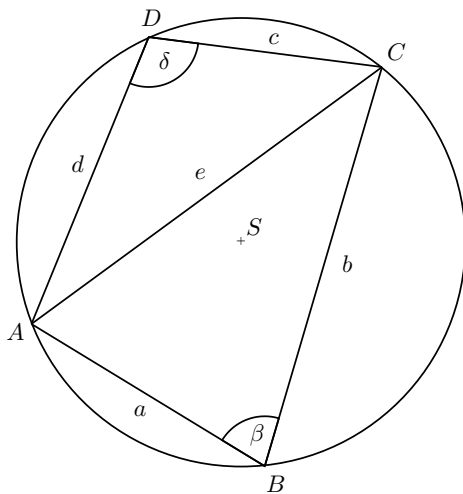
$$(ab + cd)e^2 = ac(ad + bc) + bd(bc + ad),$$

$$(ab + cd)e^2 = (ac + bd)(ad + bc),$$

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

Vzorec pro délku  $f$  se odvodí analogicky.



Obrázek 3.20

# Kapitola 4

## Goniometrické funkce v oboru $\mathbb{R}$

Goniometrické funkce se po dlouhá staletí utvářely jako prostředek trigonometrických výpočtů. Tuto jejich roli jsme podrobně posoudili v předchozích kapitolách. Nyní se začneme goniometrickým funkcím věnovat z pohledu matematické analýzy, totiž jako funkcím reálné proměnné, které nacházejí významné uplatnění v řadě dalších matematických, fyzikálních i jiných oborů.

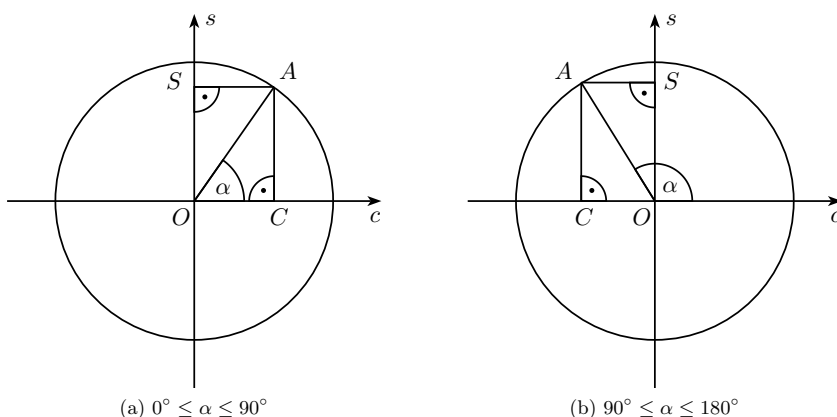
### 4.1 Funkce sinus a kosinus

#### 4.1.1 Dvě funkce orientovaného úhlu

V kapitole 3 jsme poznali, jak funkce sinus a kosinus, zavedené původně pro hodnoty úhlů z intervalu  $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ , rozšířit na interval  $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ , aby všechny goniometrické vzorce pro řešení obecného rovinného trojúhelníku měly jednotný tvar. Vidíme to na obrázku 4.1, z něhož je patrné,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= |OC| \\ \sin \alpha &= |OS|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -|OC| \\ \sin \alpha &= |OS|\end{aligned}$$



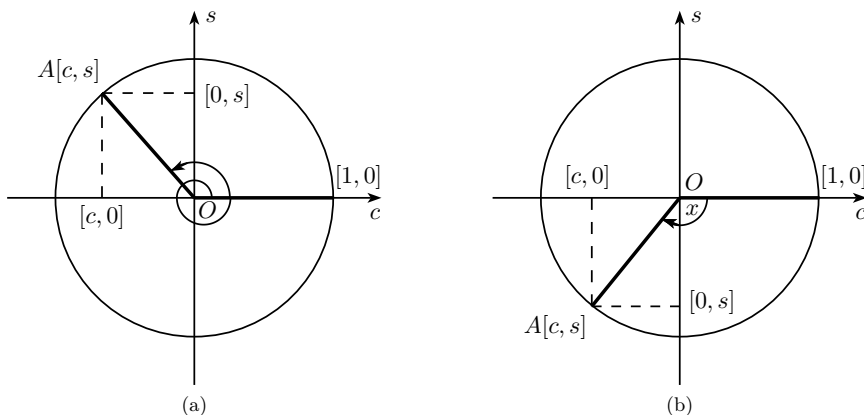
Obrázek 4.1: Hodnoty  $\sin \alpha$  a  $\cos \alpha$  pro  $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$

že hodnoty sinu a kosinu jsou kartézské souřadnice bodu  $A$  na jednotkové kružnici se středem v počátku  $O$  soustavy, tvořené dvojicí navzájem kolmých os – vodorovné „kosinové“ osy  $c$  a svislé

„sinové“ osy  $s$ . Takovou kartézskou souřadnicovou soustavu budeme značit  $Ocs$ , její kladné poloosy označíme  $c^+$  a  $s^+$ , záporné poloosy pak  $c^-$  a  $s^-$ .

Zmíněné pozorování bude ve shodě se způsobem, jakým nyní definujeme hodnoty sinu a kosinu libovolného *orientovaného úhlu*. Motivací nám bude kinematická úloha vyjádřit souřadnicemi polohu hmotného bodu pohybujícího se po kružnici.<sup>1</sup> Takový pohyb konají například konce ručiček klasických hodin s ciferníkem. Nám postačí jedna „goniometrická“ ručička  $OA$  délky 1, která se bude otáčet kolem počátku  $O$ , takže její konec  $A$  bude ukazovat na „ciferník“ v podobě jednotkové kružnice<sup>2</sup> se středem v počátku  $O$ . Úhel otočení ručičky  $OA$  budeme měřit od počáteční polohy, kdy ručička leží na kladné poloose  $c^+$  (tehdy má bod  $A$  souřadnice  $[1, 0]$ ). Velikost úhlu otočení nebudeme vyjadřovat ve stupních, nýbrž bezrozměrným číslem v obloukové míře (radiánech). Úhlu otočení ještě přiřadíme znaménko  $+$  či  $-$  podle směru otáčení ručičky  $OA$ ; přitom za kladný směr budeme považovat směr toho otočení o úhel  $\frac{1}{2}\pi$ , ve kterém poloosa  $c^+$  přejde v poloosu  $s^+$ .<sup>3</sup> Touto „orientací“ se úhlem otočení ručičky  $OA$  stane libovolné reálné číslo  $x$ . Například na obr. 4.2 je vlevo  $\frac{5}{2}\pi < x < 3\pi$ , vpravo  $-\pi < x < -\frac{1}{2}\pi$ .

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom definovali hodnoty sinu a kosinu v libovolném



Obrázek 4.2: Orientovaný úhel otočení goniometrické ručičky

čísle  $x \in \mathbb{R}$ : Je-li goniometrická ručička  $OA$  otočena popsáním způsobem o orientovaný úhel  $x$  a má-li bod  $A$  v soustavě  $Ocs$  souřadnice  $[c, s]$ , položíme

$$\cos x = c \quad \sin x = s.$$

Touto konstrukcí se sinus a kosinus stávají dvěma funkcemi s definičním oborem  $\mathbb{R}$ , přitom na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  jde o funkce, se kterými jsme pracovali v předchozích kapitolách. Popíšeme a zdůvodníme teď jejich základní vlastnosti, bezprostředně spojené se zavedeným modelem goniometrické ručičky  $OA$  v kartézské soustavě souřadnic  $Ocs$ .

Stejně jako se velká ručička u klasických hodin za šedesát minut dostane opět na stejné místo, i

<sup>1</sup>Matematicky nejpádnější motivací je ovšem chování exponenciální funkce v komplexním oboru, objevené Eulerem, jak jsme naznačili v kapitole 1. Takový přístup však přesahuje rámec elementární matematiky, do něhož je celá naše práce zasazena.

<sup>2</sup>Body ciferníku ovšem nebudou popsány škálou údajů, jako jsou hodiny či minuty, nýbrž svými souřadnicemi  $[c, s]$  v soustavě  $Ocs$ .

<sup>3</sup>Při obvyklém zakreslení soustavy  $Ocs$  jako na obr. 4.1 je tedy kladný směr otáčení opačný, než je směr otáčení hodinových ručiček.

naše goniometrická ručička  $OA$  se z dané polohy opět vrátí do stejné pozice po otočení o úhel  $2\pi$ . Při dalším putování konce ručičky po jednotkové kružnici nic nového bod  $A$  o souřadnicích  $[c, s]$  než při předchozí obrátce nečeká, a to se opakuje do nekonečna. Z toho můžeme vyvodit hned několik vlastností funkcí sinus a kosinus:

1. Perioda obou funkcí je  $2\pi$ . Platí vzorce

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \text{a} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

K získání přehledu o průběhu goniometrických funkcí sinus a kosinus stačí tedy vyšetřovat jejich chování pouze na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

2. Obě souřadnice bodu  $A$ ,  $c$ -ová i  $s$ -ová, nabývají pouze hodnot z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , a to všech, které v něm leží. Obor hodnot obou funkcí je proto

$$H(\sin) = H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle.$$

3. Největších a nejmenších hodnot nabývají souřadnice  $c$  a  $s$  bodu  $A$  na jednotkové kružnici, když ručička  $OA$  leží na poloosách  $c^+$ ,  $s^+$ ,  $c^-$  a  $s^-$ :

$x$	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

4. Souřadnice  $c$  a  $s$  bodu  $A$  nabývají v jednotlivých kvadrantech pouze kladných nebo pouze záporných hodnot. Hodnoty sinu a kosinu tedy mají v odpovídajících intervalech znaménko:

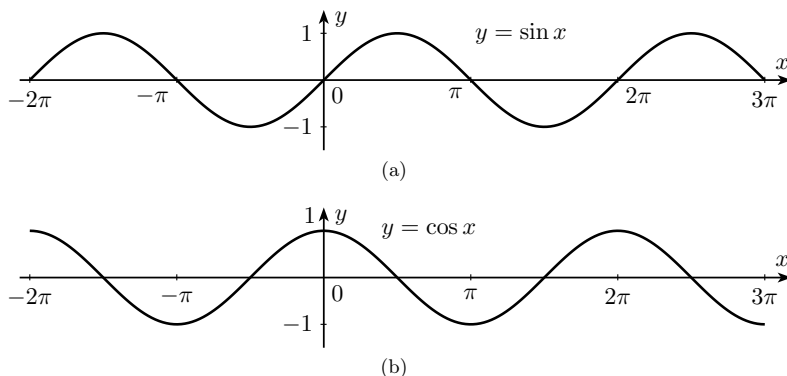
Interval	$(0, \frac{1}{2}\pi)$	$(\frac{1}{2}\pi, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+

5. Při průchodu ručičky  $OA$  jednotlivými kvadranty se hodnoty souřadnic  $c$  a  $s$  bodu  $A$  vždy buď zvětšují, nebo zmenšují. Funkce sinus a kosinus jsou tedy v příslušných intervalech rostoucí nebo klesající (např. zápis  $0 \nearrow 1$  značí funkci rostoucí od 0 do 1,  $0 \searrow -1$  funkci klesající od 0 do -1):

Interval	$(0, \frac{1}{2}\pi)$	$(\frac{1}{2}\pi, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin x$	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$
$\cos x$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$	$0 \nearrow 1$

6. Otočíme-li ručičku  $OA$  z počáteční polohy na  $c^+$  o orientovaný úhel  $x$ , bod  $A$  bude mít souřadnice  $[c, s]$ . Když místo toho otočíme ručičku  $OA$  o orientovaný úhel  $-x$ , souřadnice bodu  $A$  budou  $[c, -s]$ . Z této souměrnosti podle kosinové osy, ke které se podrobněji vrátíme v části 4.1.2, vyplývá parita obou funkcí. Funkce sinus je *lichá* a funkce kosinus je *sudá*, což zapisujeme vzorci:

$$\sin x = -\sin(-x) \quad \text{a} \quad \cos x = \cos(-x).$$



Obrázek 4.3: Grafy funkcí sinus a kosinus

Pro křivky, jež jsou grafy funkcí sinus a kosinus, užíváme názvů *sinusoida* a *kosinusoida* (obr. 4.3). Jsou to dvě geometricky shodné křivky (navzájem posunuté ve směru osy  $x$ ). Podobné křivky jsou grafy funkcí, kterým říkáme *sinusoidální* a kterým v naší práci věnujeme příklad 4.7.1.

Je zřejmé, že funkce sinus ani funkce kosinus nejsou prosté. Každá z nich nabývá libovolné své hodnoty dokonce v nekonečně mnoha bodech. Nejen na celém definičním oboru  $\mathbb{R}$ , ale ani na intervalu délky jedné periody  $2\pi$ , k nim tedy neexistují inverzní funkce. My jsme se o inverzních funkcích ke goniometrickým funkcím sinus a kosinus s názvy arkussinus ( $\arcsin$ ) a arkuskosinus ( $\arccos$ ), kterým říkáme *cyklometrické*, zmínili již v části 2.1.2; tehdy ovšem v souvislosti s hledáním velikostí úhlů v pravoúhlém trojúhelníku, jejichž goniometrické hodnoty byly dány. Tyto hodnoty byly pouze z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  a velikosti úhlů byly v rozmezí intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ .

Cyklometrické funkce  $y = \arcsin x$  a  $y = \arccos x$  zavádíme tak, že vezmeme pouze takové maximální části definičních oborů funkcí sinus a kosinus, jejichž součástí je již zmíněný interval  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ , na kterých jsou funkce prosté. U funkce sinus je to interval  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ , u funkce kosinus jiný interval  $\langle 0, \pi \rangle$ . Na nich je funkce sinus rostoucí, funkce kosinus klesající a obě tam nabývají všech hodnot  $z \in \langle -1, 1 \rangle$ . Pro inverzní funkce proto vybereme obory hodnot v příslušném intervalu

$$H(\arcsin) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \text{a} \quad H(\arccos) = \langle 0, \pi \rangle.$$

Získáme tak dvě funkce se společným definičním oborem

$$D(\arcsin) = D(\arccos) = \langle -1, 1 \rangle,$$

jejichž formální definice lze zapsat ekvivalencemi

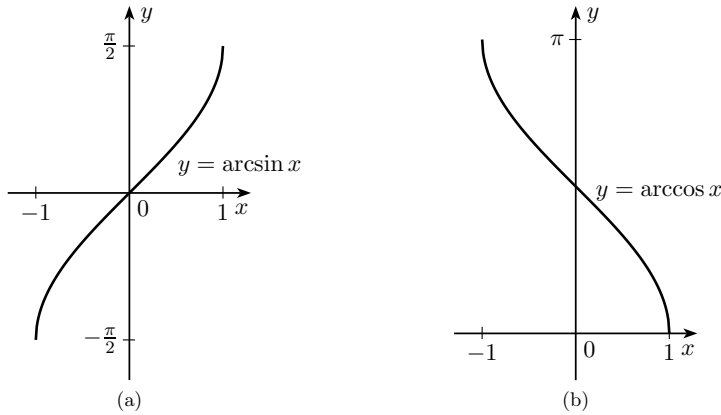
$$\begin{aligned} y = \arcsin x &\Leftrightarrow x = \sin y \wedge -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ y = \arccos x &\Leftrightarrow x = \cos y \wedge 0 \leq y \leq \pi. \end{aligned}$$

Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus vidíme na obr. 4.4. Ze zmíněné monotónnosti zúžených funkcí sinus a kosinus plyne, že zavedená funkce arkussinus je rostoucí, zatímco funkce arkuskosinus na celém definičním oboru klesá. Uveďme a dokažme základní vztahy pro cyklometrické funkce

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},}$$

platné pro každé  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .





Obrázek 4.4: Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus

- Je-li  $y = \arcsin x$ , pak  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  a  $x = \sin y$ , odkud  $-\frac{\pi}{2} \leq -y \leq \frac{\pi}{2}$  a  $-x = \sin(-y)$ , neboť funkce sinus je lichá. Poslední dva vztahy už znamenají, že  $-y = \arcsin(-x)$ .
- Je-li  $y = \arccos x$ , pak  $0 \leq y \leq \pi$  a  $x = \cos y$ , odkud  $-\pi \leq -y \leq 0$ , následně po přičtení  $\pi$  obdržíme  $0 \leq \pi - y \leq \pi$ . Nyní využijeme rovnost  $\cos(\pi - y) = -\cos y^4$ , podle které platí  $\cos(\pi - y) = -\cos y = -x$ . Odtud a z nerovnosti  $0 \leq \pi - y \leq \pi$  dostáváme  $\arccos(-x) = \pi - y$  a po dosazení  $y = \arccos x$  dokazovanou rovnost.
- Označme  $y = \arcsin x$  a ukažme, že  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y$ . Je-li  $0 \leq x \leq 1$ , je  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  a  $\sin y = x$ , odkud  $0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$  a  $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = x$  (protože sinus a kosinus jsou kofunkce z části 2.1.2) a kýžený vztah platí. Je-li  $-1 \leq x < 0$ , je  $-\frac{\pi}{2} \leq y < 0$  a  $\sin y = x$ , odkud  $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y \leq \pi$  a  $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \cos(\pi - [\frac{\pi}{2} + y]) = -\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin(-y) = \sin y = x$ , kde jsme mj. využili vlastnost kofunkce pro ostré úhly  $-y$  a  $\frac{\pi}{2} + y$  (o součtu  $\frac{\pi}{2}$ ).

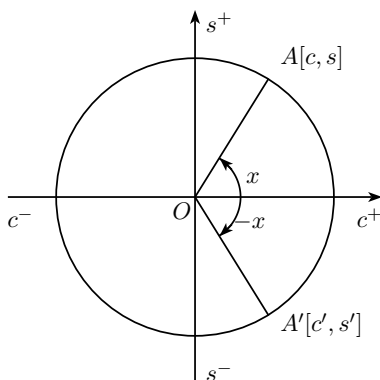
#### 4.1.2 Koloběh hodnot sinu a kosinu

Jak je patrné z obrázku 4.3, grafy funkcí sinus a kosinus jsou složeny ze shodných „půlvln“ střídavě nad a pod osou  $x$ , přičemž každá půlvlna je souměrná podle svislé přímky procházející jejím vrcholem. Tuto základní vlastnost průběhů (vlastně koloběhů) obou funkcí nyní popíšeme důležitými *převodními vzorci*. Řadíme k nim vztahy pro hodnoty  $f(\pm x \pm \pi)$  a  $f(\pm x \pm \frac{\pi}{2})$ , kde  $f = \sin$  nebo  $f = \cos$ . Odvodíme je tak, že se znovu vrátíme k modelu goniometrické ručičky a využijeme geometrických představ o jejich pohybech, kterými budou otočení o úhly  $\pi$ ,  $\frac{1}{2}\pi$  a zrcadlově překlacení podle kosinové osy.

Začneme vysvětlením toho, co jsme uvedli již v části 4.1.1, že totiž sinus je funkce lichá a kosinus funkce sudá. K tomu uvážíme dvě různá otočení ručičky  $OA$  z počáteční polohy na poloosu  $c^+$ . Jedno o orientovaný úhel  $x$  a druhé o orientovaný úhel  $-x$ . Ručičky se otočí o úhel téže velikosti, avšak v navzájem opačných směrech, takže jejich pohyby budou „zrcadlově souměrné“ (obr. 4.5). Pokud koncová poloha  $OA$  goniometrické ručičky odpovídá orientovanému úhlu  $x$  a koncová poloha  $OA'$  orientovanému úhlu  $-x$ , budou body  $A[c, s]$  a  $A'[c', s']$ , podle definice se souřadnicemi

$$c = \cos x, \quad s = \sin x, \quad c' = \cos(-x), \quad s' = \sin(-x),$$

<sup>4</sup>Tu jsme právě pro  $y \in (0, \pi)$  použili v kapitole 3 pro rozšíření kosinu z  $(0, \frac{\pi}{2})$  na  $(0, \pi)$ .



Obrázek 4.5

souměrně sdružené podle kosinové osy  $c$ , bude tedy  $c' = c$  a  $s' = -s$ . Vidíme, že pro každé  $x \in \mathbb{R}$  skutečně platí<sup>5</sup>

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{a} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Z dokázané parity plynou ihned vztahy

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \quad \text{a} \quad \cos(2\pi - x) = \cos x,$$

protože, jak víme, číslo  $2\pi$  je perioda obou funkcí sinus a kosinus. Její polovina, číslo  $\pi$ , má ve vztahu k těmto funkcím vlastnost

$$\sin(x + \pi) = -\sin x \quad \text{a} \quad \cos(x + \pi) = -\cos x,$$

pro niž se číslu  $\pi$  někdy říká *antiperioda* (sinu a kosinu). K důkazu použijeme otočení goniometrické ručičky o úhel  $\pi$  z polohy  $OA$ , která odpovídá orientovanému úhlu  $x$ , do polohy  $OA'$  (obr. 4.6). Body  $A[c, s]$  a  $A'[c', s']$ , jejichž souřadnice jsou podle definice funkcí kosinus a sinus rovny

$$c = \cos x, \quad s = \sin x, \quad c' = \cos(x + \pi), \quad s' = \sin(x + \pi),$$

budou souměrně sdružené podle středu  $O$ . To znamená, že  $c' = -c$  a  $s' = -s$ , což jsme chtěli dokázat.

Protože pro funkci  $f$  s periodou  $2\pi$  platí  $f(x - \pi) = f(x + \pi)$ , právě dokázané vzorce můžeme přepsat do tvaru

$$\sin(x - \pi) = -\sin x \quad \text{a} \quad \cos(x - \pi) = -\cos x.$$

Ve spojení s paritou funkcí (lichá – sudá) tak dostáváme další vzorec

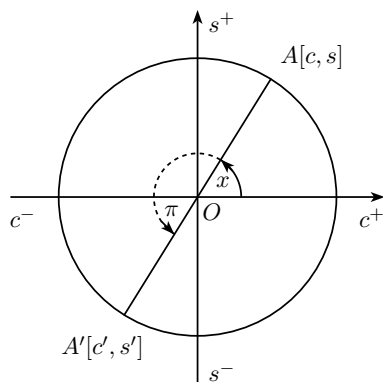
$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \text{a} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x,$$

o jejichž významu v trigonometrii jsme psali v kapitole 3.

Poslední geometrickou úvahu povedeme k odvození vztahů

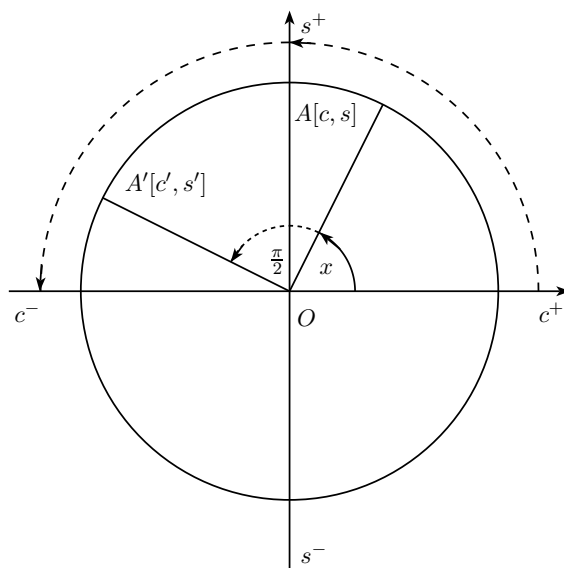
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{a} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

<sup>5</sup>Pozice ručiček souměrně sdružené podle sinové osy  $s$  by odpovídaly dvojicím orientovaných úhlů  $x$  a  $\pi - x$ , takže bychom dostali vzorce pro  $\cos(\pi - x)$  a  $\sin(\pi - x)$ . Ty však získáme později jinak.



Obrázek 4.6

Předpokládejme, že goniometrickou ručičku v poloze  $OA$ , která odpovídá orientovanému úhlu  $x$ , otočíme ještě o úhel  $+\frac{\pi}{2}$  do polohy  $OA'$  (obr. 4.7). Určíme vztahy mezi souřadnicemi bodů  $A[c, s]$



Obrázek 4.7

a  $A'[c', s']$ , které jsou podle definice funkcí kosinus a sinus rovny

$$c = \cos x, \quad s = \sin x, \quad c' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad s' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Jak je na obr. 4.7 znázorněno, při zmíněném otočení o úhel  $+\frac{\pi}{2}$  přejde poloosa  $c^+$  v poloosu  $s^+$  a poloosa  $s^+$  v poloosu  $c^-$ . Druhá souřadnice bodu  $A'$  se tedy rovná první souřadnici bodu  $A$ , tj.  $s' = c$ , zatímco první souřadnice bodu  $A'$  a druhá souřadnice bodu  $A$  jsou navzájem opačná čísla, tj.  $c' = -s$ . Důkaz vzorců je tedy hotov. Jestliže v nich zaměníme  $x$  za  $(-x)$ , pak s ohledem na

paritu funkcí dostaneme vztahy

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{a} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Jejich praktický význam oceníme při úpravách goniometrických výrazů, či při řešení goniometrických rovnic a nerovnic, kdy potřebujeme přejít od funkce sinus k funkci kosinus nebo naopak. Dodejme, že tyto dva důležité převodní vzorce<sup>6</sup> lze odvodit rovněž úvahou o souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu v soustavě *Ocs* dvou poloh ručičky, které odpovídají orientovaným úhlům  $x$  a  $\frac{\pi}{2} - x$ .

Zbývá ještě uvést převodní vzorce

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \quad \text{a} \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Plynou z předchozí dvojice vzorců, neboť díky paritě funkcí platí

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{a} \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

V závěru podkapitoly vyložíme prakticky užitečné pravidlo o tom, že pro libovolné  $x$  jsou hodnoty  $\sin x$  a  $\cos x$  (případně až na znaménka) numericky shodné s hodnotami  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  pro vhodný úhel  $\alpha$  z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Jistě se stačí omezit na hodnoty  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a pak využít toho, že každé takové  $x$  je jednoho z tvarů  $\alpha$ ,  $\pi - \alpha$ ,  $\pi + \alpha$ , resp.  $2\pi - \alpha$  podle toho, ve kterém z kvadrantů hodnota  $x$  leží (obr. 4.8). Taková „redukce“ argumentu  $x \in \mathbb{R}$  na ostrý úhel má velký význam jednak při řešení goniometrických rovnic (viz 4.4), jednak při hledání přibližných hodnot  $\sin x$  a  $\cos x$  pomocí tabulek. Nejenže hodnoty sinu a kosinu určíme z tabulek sestavených pouze pro úhly z intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ , ale navíc díky vlastnosti, kterou jsme vyjádřili termínem kofunkce, lze dokonce vystačit s tabulkami hodnot sinu a kosinu v polovičním intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ .

*Poznámka:* Převodní vzorce pro sinus a kosinus, kterými jsme se v této podkapitole zabývali, lze odvodit i poněkud odlišným způsobem, při němž je zdůrazněna určenost obou funkcí jednou půlvlnou sinusoidy, zmíněná úvodem části 4.1.2.

## 4.2 Funkce tangens a kotangens

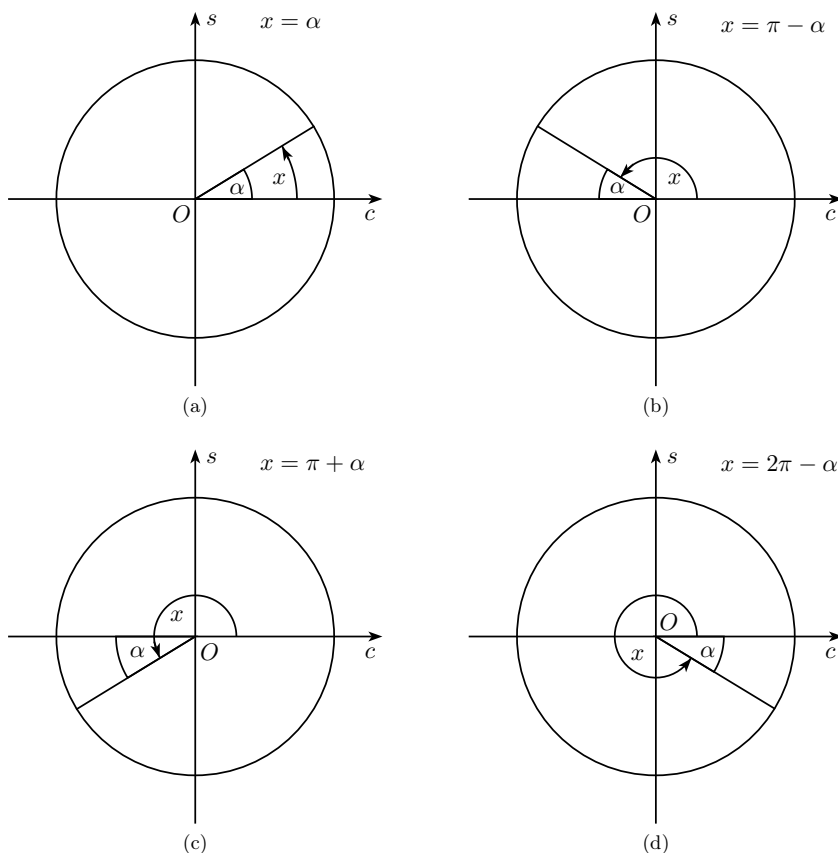
Nyní se budeme zabývat dalšími dvěma goniometrickými funkcemi. V kapitole 2 jsme se již s nimi setkali: tangens ostrého úhlu byl dán podílem délek stran v pravoúhlém trojúhelníku s tímto vnitřním úhlem, a to odvěsny protilehlé a přilehlé, hodnota kotangens byla určena převráceným podílem těchto délek. Všimnuli jsme si, že tyto funkce lze vyjádřit pomocí podílů funkcí sinus a kosinus. Tato podílová vyjádření využijeme nyní k tomu, abychom poté, co jsme rozšířili definiční obory funkcí sinus a kosinus na množinu reálných čísel, obdobného rozšíření dosáhli i pro funkce tangens a kotangens: *Funkcí tangens reálného argumentu  $x$  se nazývá funkce, která je dána předpisem*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

*funkci kotangens definujeme předpisem*

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

<sup>6</sup>Jejich snadná a bezpečná zapamatovatelnost je dána tím, že jsme sinus a kosinus původně zavedli jako dvě kofunkce na pravoúhlém trojúhelníku.



Obrázek 4.8

Přímo z definice plyne jejich vzájemný vztah

$$\boxed{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,}$$

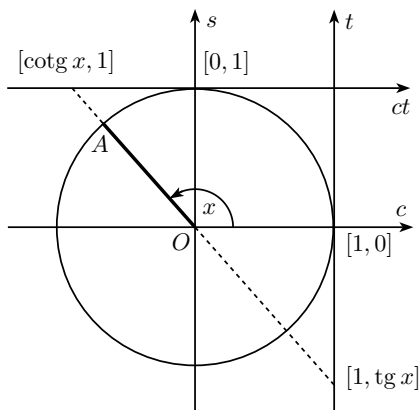
který platí pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , pro něž mají obě hodnoty  $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$  smysl.

Hodnoty tangens a kotangens můžeme v modelu s goniometrickou ručičkou odečíst jako souřadnice na dvou číselných osách  $t$  a  $ct$ , umístěných v soustavě  $Ocs$  způsobem patrným z obrázku 4.9. Odtud je jasné, že platí

$$H(\operatorname{tg}) = H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$$

a že funkce  $\operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$  mají jednostranné nevlastní limity v bodech, ve kterých nejsou definovány a které nyní upřesníme společně s dalšími důsledky základních vlastností funkcí sinus a kosinus.

1. Definiční obor funkce tangens je množina všech reálných čísel  $x$ , pro které má výraz  $\frac{\sin x}{\cos x}$  smysl, a to je právě tehdy, když  $\cos x \neq 0$ . Obdobně definiční obor funkce kotangens je množina všech reálných čísel  $x$ , pro které má výraz  $\frac{\cos x}{\sin x}$  smysl, a to je právě tehdy, když  $\sin x \neq 0$ . Protože nulové body funkcí kosinus a sinus známe (goniometrická ručička leží na ose  $s$ , resp.  $c$  neboli



Obrázek 4.9: Číselné osy pro tangens a kotangens

je rovnoběžná s osou  $t$ , resp.  $ct$ ), platí

$$D(\operatorname{tg}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad \text{a} \quad D(\operatorname{cotg}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi).$$

2. Perioda obou funkcí tangens a kotangens je  $\pi$ :

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x.$$

Plyne to ze společné antiperiody  $\pi$  funkcí sinus a kosinus:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x + \pi) = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{cotg} x.$$

3. Obě funkce tangens a kotangens jsou liché:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

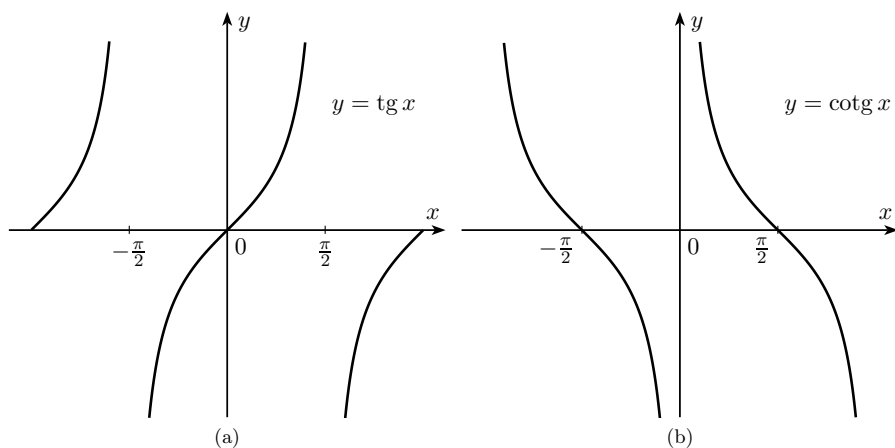
Plyne to z lichosti funkce sinus a sudosti funkce kosinus:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{cotg} x.$$

Pro křivky, jež jsou grafy funkcí tangens a kotangens, užíváme názvů *tangentoida* a *kotangentoida* (obr. 4.10).

O cyklometrických funkcích arkustangens ( $\operatorname{arctg} x$ ) a arkuskotangens ( $\operatorname{arccotg} x$ ), inverzních ke goniometrickým  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{cotg} x$ , jsme se již zmínili v části 2.1.2, ovšem tehdy jsme je uvažovali pouze na intervalu  $(0, \infty)$ . Příslušné hodnoty (úhly) ležely mezi 0 a  $\frac{\pi}{2}$ .

Funkce tangens ani funkce kotangens není na  $\mathbb{R}$  prostá, tedy při zavádění funkcí  $y = \operatorname{arctg} x$  a  $y = \operatorname{arccotg} x$  (obdobně jako u funkcí arkussinus a arkuskosinus) je potřeba se omezit pouze na takové maximální části definičních oborů funkcí tangens a kotangens, na kterých jsou tyto funkce prosté a které přitom obsahují již zmíněný interval  $(0, \frac{\pi}{2})$ . U funkce tangens je to interval  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,



Obrázek 4.10: Grafy funkcí tangens a kotangens

u funkce kotangens jiný interval  $(0, \pi)$ . Na příslušném intervalu je funkce tangens rostoucí, funkce kotangens klesající a obě tam nabývají všech hodnot z intervalu  $(-\infty, \infty)$ . Pro inverzní funkce proto vybereme obory hodnot

$$H(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{a} \quad H(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi).$$

Získáme tak dvě funkce se společným definičním oborem

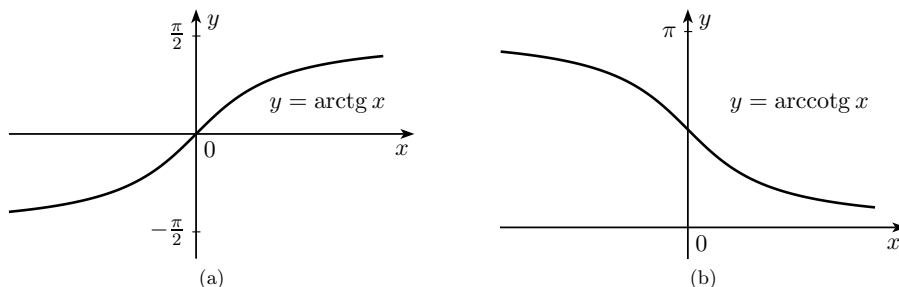
$$D(\operatorname{arctg}) = D(\operatorname{arccotg}) = (-\infty, \infty),$$

jejichž formální definice lze zapsat ekvivalencemi

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

$$y = \operatorname{arccotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y \wedge 0 < y < \pi.$$

Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens vidíme na obr. 4.11. Oba grafy mají dvě asymptoty



Obrázek 4.11: Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

rovnoběžné s osou  $x$ . Je rovněž patrné, že zavedená funkce arkustangens je rostoucí, zatímco funkce

arkuskotangens na celém svém definičním oboru klesá. Uvedeme ještě a dokážeme tři vztahy pro cyklometrické funkce

$$\boxed{\arctg(-x) = -\arctg x, \quad \operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x, \quad \arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2},}$$

platné pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

- Je-li  $y = \arctg x$ , pak  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  a  $x = \operatorname{tg} y$ , odkud  $-\frac{\pi}{2} < -y < \frac{\pi}{2}$  a  $-x = \operatorname{tg}(-y)$ , neboť funkce tangens je lichá. Poslední dva vztahy už znamenají, že  $-y = \arctg(-x)$ .
- Je-li  $y = \operatorname{arccotg} x$ , pak  $0 < y < \pi$  a  $x = \operatorname{cotg} y$ , odkud  $-\pi < -y < 0$ , následně po přičtení  $\pi$  obdržíme  $0 < \pi - y < \pi$ . Nyní využijeme rovnost<sup>7</sup>  $\operatorname{cotg}(\pi - y) = -\operatorname{cotg} y$ , podle které platí  $\operatorname{cotg}(\pi - y) = -\operatorname{cotg} y = -x$ . Odtud a z nerovnosti  $0 < \pi - y < \pi$  dostáváme  $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - y$  a po dosazení  $y = \operatorname{arccotg} x$  dokazovanou rovnost.
- Označme  $y = \arctg x$  a ukažme, že  $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - y$ . Je-li  $x \geq 0$ , je  $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$  a  $\operatorname{tg} y = x$ , odkud  $0 < \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$  a  $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) = x$  (protože tangens a kotangens jsou kofunkce z části 2.1.2) a kýžený vztah platí. Je-li  $x < 0$ , je  $-\frac{\pi}{2} < y < 0$  a  $\operatorname{tg} y = x$ , odkud  $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y < \pi$  a  $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) = \operatorname{cotg}(\pi - [\frac{\pi}{2} + y]) = -\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} + y) = -\operatorname{tg}(-y) = \operatorname{tg} y = x$ , kde jsme mj. využili vlastnost kofunkcí pro ostré úhly  $-y$  a  $\frac{\pi}{2} + y$  (o součtu  $\frac{\pi}{2}$ ).

### 4.3 Základní goniometrické vzorce

Při práci s goniometrickými funkcemi používáme celou řadu vzorců. Nejdůležitější z nich teď postupně uvedeme po skupinách a opatříme je „šňůrou“ důkazů, tvořících v textu naší práce celek podobný tomu, jaký se v současnosti vyžaduje při exaktním výkladu kterékoliv matematické teorie. Některé další goniometrické vzorce pak odvodíme v podkapitole 4.6.

Jako první zmíníme ještě v této úvodní části vztah, o kterém jsme již pojednávali v předchozích kapitolách. Tento (snad nejnámější) goniometrický vzorec

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (\text{pro každé } x \in \mathbb{R})}$$

(zvaný *goniometrická jednička*) plyne z našeho modelu z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou je goniometrická ručička  $OA$  a jehož odvěsny mají délky  $|\cos x|$  a  $|\sin x|$  (viz obr. 4.12).

Kromě goniometrické jedničky známe již jednu skupinu vzorců, kterým jsme věnovali část 4.1.2 a kterým říkáme vzorce *převodní*. My je podstatně využijeme i při klíčovém důkazu této podkapitoly, a to hned v následující části 4.3.1.

#### 4.3.1 Součtové a rozdílové vzorce

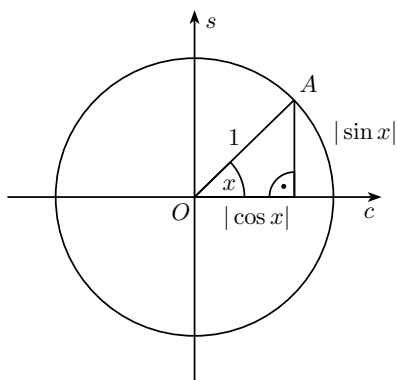
Z předchozích trigonometrických kapitol už dobře známe *součtové vzorce* pro sinus a kosinus

$$\boxed{\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,} \quad (4.1)$$

$$\boxed{\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.} \quad (4.2)$$

<sup>7</sup>Rovnost plyne z lichosti funkce kotangens a dále z její periody  $\pi$ .





Obrázek 4.12

Dokázali jsme je nejprve v situaci, kdy zastoupené úhly  $x, y, x + y$  leží v intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ , později rozšířeném na interval  $(0, \pi)$ . Naším cílem je nyní ukázat, že tyto vzorce platí pro funkce sinus a kosinus v reálném oboru bez jakéhokoliv omezení, tedy pro libovolná čísla  $x, y \in \mathbb{R}$ .

S ohledem na společnou periodu  $2\pi$  obou funkcí sinus a kosinus stačí ověřit platnost vzorců (4.1) a (4.2) za předpokladu, že čísla  $x, y$  jsou vybrána z intervalu  $(0, 2\pi)$ . Toho zřejmě dosáhneme, když dokážeme následující dvě tvrzení:

- Vzorce (4.1) a (4.2) platí pro libovolná  $x, y$  z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ .
- Platí-li vzorce (4.1) a (4.2) pro nějakou dvojici  $(x, y)$ , platí i pro dvojice  $(x + \frac{\pi}{2}, y)$  a  $(x, y + \frac{\pi}{2})$ .

První tvrzení je zřejmé, je-li některé z čísel  $x, y$  rovno nule, neboť  $\sin 0 = 0$  a  $\cos 0 = 1$ . V opačném případě, kdy obě čísla  $x, y$  leží v otevřeném intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ , leží všechna tři čísla  $x, y, x + y$  v intervalu  $(0, \pi)$  a v takové situaci vzorce (4.1) a (4.2) platí podle trigonometrických důkazů uvedených v podkapitole 3.6.

Předpokládejme tedy, že vzorce (4.1) a (4.2) platí pro danou dvojici  $(x, y)$  a pro dvojici  $(x + \frac{\pi}{2}, y)$  zapišme nejprve vzorec (4.1):

$$\underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2} + y\right)}_{\cos(x+y)} = \underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} \cos y + \underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin x} \sin y.$$

Pod hodnoty sinu a kosinu s argumenty obsahujícími sčítanec  $\frac{\pi}{2}$  jsme zapsali jejich zjednodušená vyjádření podle převodních vzorců z části 4.1.2. Vidíme, že vzorec pro sinus součtu na dvojici  $(x + \frac{\pi}{2}, y)$  je ekvivalentní se vzorcem (4.2) pro kosinus součtu na původní dvojici  $(x, y)$ . Podobně je vidět, že vzorec pro kosinus součtu na dvojici  $(x + \frac{\pi}{2}, y)$

$$\underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{2} + y\right)}_{-\sin(x+y)} = \underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin x} \cos y - \underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} \sin y$$

je ekvivalentní se vzorcem (4.1) pro sinus součtu na původní dvojici  $(x, y)$ . Protože dle předpokladu oba vzorce na dvojici  $(x, y)$  platí, platí i na dvojici  $(x + \frac{\pi}{2}, y)$ . Stejně tak se oba vzorce zdůvodní i pro dvojici  $(x, y + \frac{\pi}{2})$ . Tím je celý důkaz vzorců (4.1) a (4.2) v oboru  $\mathbb{R}$  ukončen.

Z dokázaných vzorců (4.1) a (4.2) odvodíme nyní vzorce pro  $\sin(x - y)$  a  $\cos(x - y)$ , které se

nazývají souhrnně spolu se vzorci (4.1) a (4.2) součtové, nicméně v některé literatuře je čtenář nalezne pod názvem *rozdílové vzorce* pro sinus a kosinus. Mají tvar

$$\boxed{\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,} \quad (4.3)$$

$$\boxed{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y} \quad (4.4)$$

a z (4.1) a (4.2) plynou díky paritám funkcí sinus a kosinus:

$$\sin(x - y) = \sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Aby byly součtové a rozdílové vzorce kompletní, odvodíme ještě vzorce pro  $\operatorname{tg}(x \pm y)$  a  $\operatorname{cotg}(x \pm y)$ . Kromě vzorců (4.1) a (4.2) využijeme toho, že obě funkce tangens i kotangens jsou liché:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \operatorname{tg}(x + (-y)) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(-y)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.} \quad (4.6)$$

$$\operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\cos(x + y)}{\sin(x + y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y} = \frac{\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} - \frac{\sin x \sin y}{\sin x \sin y}}{\frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \frac{\cos x \sin y}{\sin x \sin y}} = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.} \quad (4.7)$$

$$\operatorname{cotg}(x - y) = \operatorname{cotg}(x + (-y)) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg}(-y) - 1}{\operatorname{cotg}(-y) + \operatorname{cotg} x} = \frac{-\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{-\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.} \quad (4.8)$$

V závěru této části se zmíníme o prakticky důležité otázce, jak si součtové vzorce pro sinus a kosinus dobře zapamatovat, či spíše jak je v případě nutnosti rychle a bezpečně odvodit. Jak podrobněji posoudíme v šesté kapitole, bezesporu nejlepším řešením je algebraicky roznásobit součin dvou komplexních jednotek v levé straně rovnosti

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

a porovnat reálné a imaginární části obou stran. Nyní spíše jako kuriozitu uvedme, že oba součtové i oba rozdílové vzorce pro sinus a kosinus lze zapsat jedinou rovností pro násobení čtvercových matic řádu 2:

$$\begin{bmatrix} \cos(x + y) & \sin(x + y) \\ \sin(x - y) & \cos(x - y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix}.$$

## 4.3.2 Funkce dvojnásobného a polovičního argumentu

Vzorce pro funkce dvojnásobného argumentu, dříve v podkapitole 2.5 uvedené pouze pro úhel z intervalu  $(0, \frac{\pi}{4})$ , nyní díky výše odvozeným součtovým vzorcům dokážeme pro všechna reálná čísla:

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x.} \quad (4.9)$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.} \quad (4.10)$$

Když přepíšeme kvadráty ve vzorci pro  $\cos 2x$  pomocí goniometrické jedničky, obdržíme ještě jeho další dva tvary:

$$\boxed{\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{a} \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.} \quad (4.11)$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.} \quad (4.12)$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg}(x + x) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}.} \quad (4.13)$$

Odvoďme ještě vzorce, které ukazují, jak hodnoty  $\sin 2x$  a  $\cos 2x$  závisí na hodnotě  $\operatorname{tg} x$ :

$$\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\boxed{\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.} \quad (4.14)$$

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\boxed{\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.} \quad (4.15)$$

Praktický význam tyto vzorce přináší při tzv. *univerzální goniometrické substituci*

$$\boxed{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

vhodné k řešení některých goniometrických rovnic nebo k výpočtům neurčitých integrálů.

Přejdeme nyní ke vzorcům pro funkce polovičního argumentu. K jejich odvození nám pomohou vztahy (4.11), ve kterých zaměníme  $x$  za  $\frac{x}{2}$ :

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}, \quad (4.16)$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}. \quad (4.17)$$

Jak je vidět, hodnoty  $\cos \frac{x}{2}$  a  $\sin \frac{x}{2}$  nejsou hodnotou  $\cos x$  určeny jednoznačně. Hodnota  $\cos x$  se totiž nezmění, zvětšíme-li (neznámý) argument  $x$  o  $2\pi$ . Při takové změně se ovšem poloviční argument  $\frac{x}{2}$  zvětší o  $\pi$ , takže obě hodnoty  $\cos \frac{x}{2}$  a  $\sin \frac{x}{2}$  změní znaménko:

$$\begin{aligned} \sin \frac{x + 2\pi}{2} &= \sin \left( \frac{x}{2} + \pi \right) = -\sin \frac{x}{2}, \\ \cos \frac{x + 2\pi}{2} &= \cos \left( \frac{x}{2} + \pi \right) = -\cos \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Zdůrazněme, že znaménka hodnot  $\cos \frac{x}{2}$  a  $\sin \frac{x}{2}$  nelze určit ani v případě, kdy kromě hodnoty  $\cos x$  známe i znaménko ve vztahu  $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$  (vysvětlení je stejné).

Nyní odvodíme vzorce pro tangens a kotangens polovičního argumentu:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}. \quad (4.18)$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}}. \quad (4.19)$$

přítom v obou vzorcích (4.18) a (4.19) se bere stejné znaménko, které ani v tomto případě není určeno hodnotou  $\cos x$ . Nelze to ovšem tentokrát zdůvodnit možnou současnou změnou hodnot  $\cos \frac{x}{2}$  a  $\sin \frac{x}{2}$  na opačná čísla. Vysvětlení nám poskytnou jiné dva vzorce pro hodnoty  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  a  $\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ , které obdobnou nejednoznačností znamének „netrpí“:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}}. \quad (4.20)$$

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}}. \quad (4.21)$$

Vidíme, že hodnoty  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  a  $\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$  mají stejné znaménko jako hodnota  $\sin x$ , dělená v obou vzorcích kladnými výrazy  $1 + \cos x$ , resp.  $1 - \cos x$ . Dodejme, že pokud do vzorců (4.20) a (4.21) dosadíme  $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$ , dostaneme po snadné úpravě vzorce (4.18) a (4.19) s nejednoznačnými znaménky  $\pm$ .

### 4.3.3 Převody součinů na součty a naopak

V závěrečné části našeho přehledu základních goniometrických vzorců popíšeme, jak název části napovídá, významné úpravy, které při výpočtech s goniometrickými funkcemi často potřebujeme. Nejdříve uvedeme a dokážeme skupinu vzorců pro součiny dvou goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin y &= \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}, \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y &= \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

K důkazu využijeme toho, že tyto součiny se objevují v pravých stranách součtových a rozdílových vzorců (4.1) – (4.4). Dostaneme je proto z rovností

$$\begin{aligned} \cos(x - y) - \cos(x + y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 \sin x \sin y, \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y, \\ \sin(x + y) + \sin(x - y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y \end{aligned}$$

po vydělení číslem 2.

Druhou skupinu tvoří vzorce, které naopak součty a rozdíly dvou funkcí převádějí na součiny:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Odvození zahájíme tak, že prepíšeme výše uvedenou rovnost

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$$

v nových proměnných  $a, b$ . Abychom obdrželi vzorec pro součet  $\sin x + \sin y$ , položíme  $x = a + b, y = a - b$  a z této soustavy vyjádříme  $a = \frac{x+y}{2}$  a  $b = \frac{x-y}{2}$ . Pro taková  $a, b$  dostaneme již první vzorec v (4.23). Z něho hned plyne vzorec druhý, neboť funkce sinus je lichá:

$$\sin x + \sin(-y) = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Součet a rozdíl kosinů získáme obdobně:

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cdot \cos b \quad \Rightarrow \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \cdot \sin b \quad \Rightarrow \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

## 4.4 Goniometrické rovnice a nerovnice

Goniometrickou rovnicí či nerovnicí nazýváme úlohu nalézt všechna taková čísla  $x$  (velikosti úhlů), která splňují danou rovnici, resp. nerovnicí, v níž se vyskytuje neznámá  $x$  jako nezávislá proměnná v argumentu jedné nebo více goniometrických funkcí.<sup>8</sup> Příklady goniometrických rovnic jsou

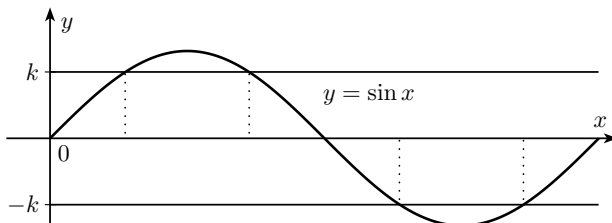
$$\cos x = x, \quad \operatorname{tg} x - 2 \sin x = 0, \quad \operatorname{cotg}(4x - 1) = -6,$$

přičemž hned první z nich je prakticky obtížně řešitelná, neboť neznámá  $x$  v ní vystupuje i mimo argument goniometrické funkce. Naproti tomu třetí rovnice patří k těm nejjednodušším a běžně řešeným, kterými náš výklad metod zahájíme.

Goniometrickou rovnicí ve tvaru

$$f(x) = c,$$

kde  $f$  je jedna z goniometrických funkcí  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$  a  $c$  je dané reálné číslo, nazýváme *základní goniometrickou rovnicí*. Jak víme, s funkcemi  $\sin$  a  $\cos$  má taková rovnice v oboru  $\mathbb{R}$  nějaké řešení (budeme říkat, že je *řešitelná*), jen když je dané  $c$  z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ ; u funkcí  $\operatorname{tg}$  a  $\operatorname{cotg}$  může být  $c \in \mathbb{R}$  libovolné. Pokud je ovšem rovnice  $f(x) = c$  řešitelná, má díky periodicitě funkce  $f$  nekonečně mnoho řešení. Stačí ji tedy řešit u funkcí  $\sin$  a  $\cos$  pouze na intervalu  $(0, 2\pi)$  a následně k řešením odtud přičíst celočíselné násobky čísla  $2\pi$ ; u funkcí  $\operatorname{tg}$  a  $\operatorname{cotg}$  přičítáme ke vždy jedinému řešení na intervalech  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  pro tangens a  $(0, \pi)$  pro kotangens celočíselné násobky čísla  $\pi$ .

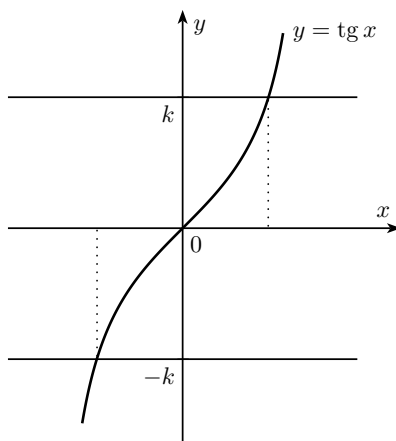


Obrázek 4.13: Rovnice  $\sin x = k$  a  $\sin x = -k$  řešené na sinusoidě

Praktický postup při řešení rovnice  $f(x) = c$ :

1. Najdeme řešení  $x_0$  rovnice  $f(x) = |c|$ , které leží v intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  (říkejme v prvním kvadrantu) pomocí tabulek či kalkulačky, neumíme-li ho určit (pro význačné hodnoty  $|c|$ ) z paměti, případně ho zapíšeme symbolicky jako  $x_0 = \arcsin(|c|)$ . Takové řešení  $x_0$  je na tomto intervalu nejvýše jedno díky monotónnosti všech goniometrických funkcí. Není-li rovnice  $f(x) = |c|$  řešitelná, nemá ani původní rovnice  $f(x) = c$  řešení.
2. Sestrojíme řešení rovnice  $f(x) = c$  pomocí hodnoty  $x_0$  nalezené v bodě 1 ve všech čtyřech kvadrantech  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  u funkcí  $\sin$ ,  $\cos$  a v prvních dvou kvadrantech u funkcí  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{cotg}$ . Ve kterých ze zmíněných čtyřech či dvou kvadrantech řešení skutečně existují, závisí na znaménku hodnoty  $c$ . K určení těchto řešení máme dvě možnosti:

<sup>8</sup>Způsob nazývat *rovnici* přímo *úlohou* jsme převzali z učebnice [13], str. 423, neboť tím podle našeho názoru zdařile vystihujeme rozdíl mezi termíny *rovnice* a *rovnost*.

Obrázek 4.14: Rovnice  $\operatorname{tg} x = k$  a  $\operatorname{tg} x = -k$  řešené na tangentoidě

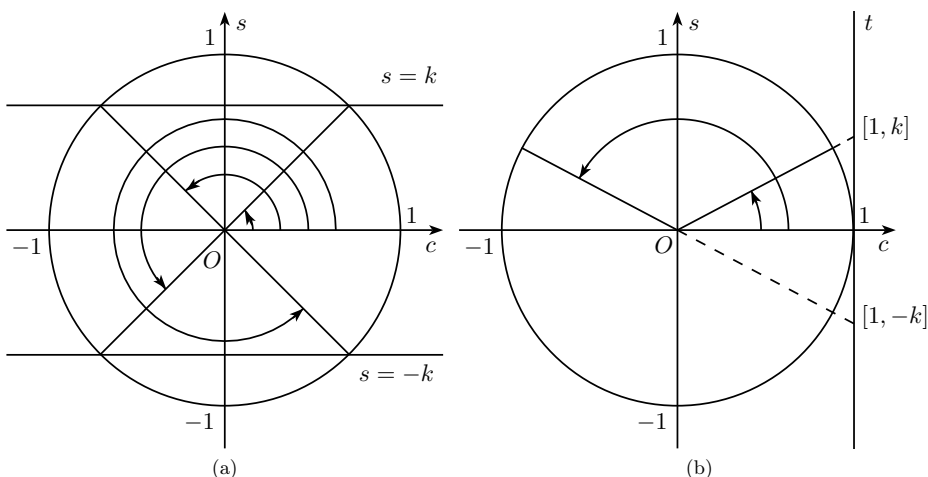
- Využít známého průběhu grafu funkce  $f$ , kterým je sinusoida, kosinusoida, tangentoida nebo kotangentoida. Na obr. 4.13 a 4.14 vidíme řešení goniometrických rovnic  $\sin x = k$ ,  $\sin x = -k$  a  $\operatorname{tg} x = k$ ,  $\operatorname{tg} x = -k$ , kde  $k > 0$ . Z obr. 4.13 jsou dobře vidět vztahy mezi hodnotami sinu v bodech  $x_0, \pi - x_0, \pi + x_0, 2\pi - x_0$ , které při určování řešení rovnic  $\sin x = \pm k$  využíváme a které jsme podrobně posuzovali v podkapitole 4.1.
- Vrátit se k modelu goniometrické ručičky v jednotkové kružnici v rovině  $Ocs$  doplněné případně o osy  $t$  a  $ct$  pro hodnoty tangens a kotangens. Na obrázku 4.15 vlevo vidíme řešení goniometrických rovnic  $\sin x = k$  a  $\sin x = -k$ , kde  $k > 0$ . V prvním případě jde o úhly z I. a II. kvadrantu a ve druhém případě jsou výsledné úhly  $x$  z kvadrantu III. a IV., jak lze vyčíst z obrázku. V pravé části obrázku jsou znázorněna řešení rovnic  $\operatorname{tg} x = k$  a  $\operatorname{tg} x = -k$ .

K základním goniometrickým rovnicím mají blízko rovnice

$$f(ax + b) = c,$$

kde  $f$  je jedna z goniometrických funkcí a  $a, b, c \in \mathbb{R}$  daná čísla,  $a \neq 0$ . Lineární substitucí  $y = ax + b$  převedeme takovou rovnici na základní rovnici  $f(y) = c$ .

■ **Příklad 4.4.1.** V oboru  $\mathbb{R}$  řešte rovnici  $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ .



Obrázek 4.15: Rovnice  $\sin x = k$ ,  $\sin x = -k$  a  $\operatorname{tg} x = k$ ,  $\operatorname{tg} x = -k$  řešeno na jednotkové kružnici

Řešení:

$$\begin{aligned}
 y = 2x + \frac{\pi}{4} &\Rightarrow \sin y = -\frac{1}{2}, \\
 \sin y = \frac{1}{2}, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle &\Rightarrow y = \frac{\pi}{6}, \\
 \sin y = -\frac{1}{2}, y \in \langle 0, 2\pi \rangle &\Rightarrow y_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, y_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}, \\
 \sin y = -\frac{1}{2}, y \in \mathbb{R} &\Rightarrow y_{1,k} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, y_{2,k} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\
 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi &\Rightarrow x_{1,k} = \frac{11\pi}{12} + k\pi, \\
 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi &\Rightarrow x_{2,k} = \frac{19\pi}{12} + k\pi.
 \end{aligned}$$

■

V dalších příkladech, kterými budeme ilustrovat metody řešení složitějších goniometrických rovnic, už vypisovat řešení konkrétních základních rovnic  $f(ax + b) = c$  (na které řešené rovnice vždy redukuje) nebudeme.

Přejdeme nyní k důležitým z hlediska praxe rovnicím

$$f(ax + b) = f(cx + d),$$

kde  $f$  je jedna z goniometrických funkcí  $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$  a  $a, b, c, d$  jsou daná reálná čísla. Kvůli periodičnosti funkce  $f$  nelze zadanou rovnici redukovat na rovnici  $ax + b = cx + d$ . Funkce tangens a kotangens jsou na základním intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , resp.  $(0, \pi)$  délky jejich společné periody  $\pi$  prosté.



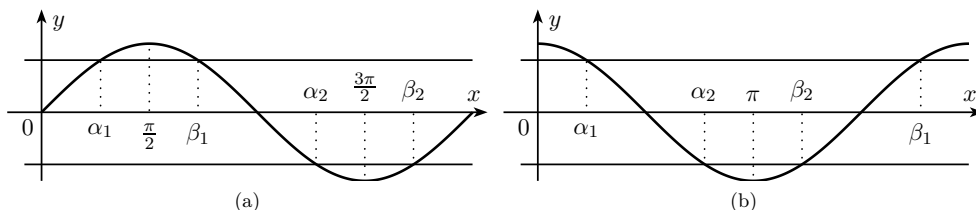
Proto lze zadané rovnice s těmito dvěma funkcemi řešit úpravami

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(ax + b) = \operatorname{tg}(cx + d) &\Rightarrow ax + b = cx + d + k\pi, \\ \operatorname{cotg}(ax + b) = \operatorname{cotg}(cx + d) &\Rightarrow ax + b = cx + d + k\pi, \end{aligned}$$

kde  $k \in \mathbb{Z}$ ; musíme však v závěru řešení zjistit, pro která z nalezených řešení  $x_k$  s parametrem  $k$  má hodnota  $\operatorname{tg}(ax_k + b)$ , resp.  $\operatorname{cotg}(ax_k + b)$  smysl. U rovnic

$$\boxed{\sin(ax + b) = \sin(cx + d), \quad \cos(ax + b) = \cos(cx + d)}$$

je situace složitější, neboť funkce sinus a kosinus se společnou periodou  $2\pi$  nejsou na intervalu délky  $2\pi$  prosté. Uvedeme nyní dva postupy, jak takové rovnice řešit. Protože tvar argumentů  $ax + b$ ,  $cx + d$  není pro tyto úvahy podstatný, pojednáme o rovnicích  $\sin U = \sin V$  a  $\cos U = \cos V$  s obecnými výrazy  $U$  a  $V$ , které nabývají hodnot z oboru  $\mathbb{R}$ .



Obrázek 4.16: Kdy pro  $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi \rangle$  platí  $\sin \alpha = \sin \beta$ , resp.  $\cos \alpha = \cos \beta$ .

- Úvaha o základním intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

Rovnost  $\sin \alpha = \sin \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $\alpha \neq \beta$ , nastane ve dvou případech (viz obr. 4.16 vlevo):

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta_1 = \pi - \alpha_1 \quad \text{a} \quad \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \beta_2 = 3\pi - \alpha_2.$$

Díky periodě funkce sinus odtud získáme závěr o řešení rovnice  $\sin U = \sin V$  v oboru  $\mathbb{R}$ :

$$\boxed{\sin U = \sin V \Leftrightarrow V = U + 2k\pi \vee V = \pi - U + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Rovnost  $\cos \alpha = \cos \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $\alpha \neq \beta$ , nastane opět ve dvou případech (viz obr. 4.16 vpravo):

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = \pi \Leftrightarrow \beta_1 = 2\pi - \alpha_1 \quad \text{a} \quad \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} = \pi \Leftrightarrow \beta_2 = 2\pi - \alpha_2.$$

Díky periodě funkce kosinus odtud získáme závěr o řešení rovnice  $\cos U = \cos V$  v oboru  $\mathbb{R}$ :

$$\boxed{\cos U = \cos V \Leftrightarrow V = U + 2k\pi \vee V = -U + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

- Úprava na součín.

Rovnice typu  $\sin U = \sin V$  a  $\cos U = \cos V$  můžeme pomocí vzorců pro rozdíly sinů a kosinů přepsat do součinnových tvarů

$$0 = \sin U - \sin V = 2 \sin \frac{U - V}{2} \cos \frac{U + V}{2},$$

$$0 = \cos U - \cos V = -2 \sin \frac{U - V}{2} \sin \frac{U + V}{2}$$

a pak řešit základní otázku, kdy se jeden nebo druhý činitel rovná nule, což jsou základní goniometrické rovnice pro nulové body funkcí sinus a kosinus. Jejich řešení dobře známe

$$\sin W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W = k\pi \quad \text{a} \quad \cos W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Na rovnice, kterými jsme se právě zabývali, můžeme jednoduchými úpravami převést i některé další podobné rovnice. Uvedme několik příkladů takových úprav:

$$\begin{aligned} \sin(ax + b) = -\sin(cx + d) &\Leftrightarrow \sin(ax + b) = \sin(-cx - d), \\ \cos(ax + b) = -\cos(cx + d) &\Leftrightarrow \cos(ax + b) = \cos(cx + d + \pi), \\ \operatorname{tg}(ax + b) = \operatorname{ctg}(cx + d) &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(ax + b) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - cx - d\right), \\ \sin(ax + b) = \cos(cx + d) &\Leftrightarrow \sin(ax + b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - cx - d\right). \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.4.2.** V oboru  $\mathbb{R}$  řešte rovnici  $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = -\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ .

*Řešení:* V prvním kroku využijeme převodního vzorce  $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$ :

$$\begin{aligned} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right), \\ 3x + \frac{\pi}{4} &= \left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{1,k} = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \\ 3x + \frac{\pi}{4} &= \pi - \left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{2,k} = \frac{11\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5}, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

Metodu substituce jsme dosud uplatňovali pouze tak, že za novou neznámou jsme volili *argument* goniometrické funkce, která v řešené rovnici vystupovala. Metodicky významnější je možnost volit za neznámou přímo dotyčnou *hodnotu* goniometrické funkce, která v rovnici vystupuje. Tak často ze složité rovnice pomocí jedné ze substitucí

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \text{obecněji } y = f(ax + b)$$

získáme rovnici, většinou algebraickou, s novou neznámou  $y$  a pak určíme všechny její reálné kořeny  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . (V praktických situacích půjde obvykle o kvadratickou rovnici, která má vždy

nejvýše dva reálné kořeny.) Po návratu k původní neznámé vyřešíme, nám již známou metodou, goniometrické rovnice tvaru

$$f(ax + b) = y_1, f(ax + b) = y_2, \dots, f(ax + b) = y_n.$$

Tak například rovnice  $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$  po substituci  $y = \cos x$  přejde v kvadratickou rovnici  $2y^2 - 7y + 3 = 0$  s kořeny  $y_1 = 3$  a  $y_2 = \frac{1}{2}$ ; zbývá vyřešit rovnici  $\cos x = \frac{1}{2}$  (druhá rovnice  $\cos x = 3$  žádné řešení nemá).

U některých goniometrických rovnic je potřeba před samotným zavedením substituce přepsat jednu goniometrickou funkci, popř. její druhou mocninu, pomocí jiné goniometrické funkce. V tomto kroku využíváme vztahy:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x, & \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x, & \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1. \end{aligned}$$

Konkrétně rovnici  $7 \cos x + 2 \sin^2 x - 5 = 0$  přepíšeme takto:

$$7 \cos x + 2(1 - \cos^2 x) - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0.$$

Uvedme nejčastější případy goniometrických rovnic převáděných na algebraické rovnice.

- $F(\sin x, \cos^2 x) = 0$  a  $F(\sin x, \cos 2x) = 0$  řešíme substitucí  $y = \sin x$ .
- $F(\cos x, \sin^2 x) = 0$  a  $F(\cos x, \cos 2x) = 0$  řešíme substitucí  $y = \cos x$ .
- $F(\sin x \pm \cos x, \sin 2x) = 0$  řešíme substitucí  $y = \sin x \pm \cos x$ , přitom využíváme rovnosti  $y^2 = 1 \pm \sin 2x$ .
- Substitucí  $y = \operatorname{tg} x$  řešíme rovnice  $F(\cos x, \sin x) = 0$  speciálního typu, u nichž je funkce  $F(c, s)$  v proměnných  $c, s$  *homogenní*. Znamená to, že existuje (nejčastěji celé nezáporné) číslo  $n$ , při kterém rovnost

$$F(tc, ts) = t^n \cdot F(c, s)$$

platí pro libovolná čísla  $t, c, s$ , kdy mají obě strany rovnosti smysl. Po dosazení  $\sin x = y \cdot \cos x$ , kde  $y = \operatorname{tg} x$ , totiž volbou  $t = \cos x$  v naší podmínce dostaneme

$$F(\cos x, \sin x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^n x \cdot F(1, y) = 0.$$

V případě  $\cos x \neq 0$  tak přecházíme k řešení rovnice  $F(1, y) = 0$  s neznámou  $y$ . Významným příkladem homogenních rovnic jsou rovnice

$$a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x = 0$$

s konstantními koeficienty  $a, b, c$ , k nimž se někdy dostaneme po úpravě rovnic obsahujících  $\cos 2x$  nebo  $\sin 2x$ . Za zmínku stojí, že na uvedenou homogenní rovnici lze převést i rovnici

$$a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x = d$$

s další konstantou  $d \neq 0$ , kterou lze díky goniometrické jedničce přepsat do tvaru

$$(a - d) \cos^2 x + b \cos x \sin x + (c - d) \sin^2 x = 0.$$

V předchozím výčtu chybí rovnice obecného tvaru  $F(\cos x, \sin x) = 0$ , na který lze snadno převést i rovnice typu  $F(\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x) = 0$ . Takové rovnice (zejména ty, u kterých je funkce  $F$  lineární v obou proměnných) se objevují v praktických úlohách, předchozí substituce však k jejich řešení zpravidla nevedou. Spíše jen *teoretický* význam pro řešení rovnic  $F(\cos x, \sin x) = 0$  má tzv. *univerzální* substituce

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2y}{1-y^2}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1-y^2}{2y},$$

neboť vede v nové neznámé  $y$  na algebraické rovnice vysokých stupňů. Výhodnějším postupem někdy bývá zavést dvě nové neznámé  $\boxed{c = \cos x, s = \sin x}$  a místo jedné původní rovnice  $F(\cos x, \sin x) = 0$  řešit soustavu rovnic o dvou neznámých

$$\boxed{F(c, s) = 0, \quad c^2 + s^2 = 1.}$$

Takový postup je schůdný zvláště tehdy, když z první rovnice lze neznámou  $c$  vyjádřit pomocí  $s$ , nebo naopak  $s$  pomocí  $c$ . Po dosazení takového vyjádření do druhé rovnice pak řešíme rovnici pro zbylou neznámou  $s$ , resp.  $c$ .

Jak jsme již naznačili, významným příkladem rovnic  $F(\cos x, \sin x) = 0$  je rovnice

$$\boxed{a \cos x + b \sin x = c,}$$

kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , která bývá často nazývána *lineární rovnicí mezi kosinem a sinem* a které se teď budeme věnovat podrobněji. Předně si povšimneme, že pokud je jedno z čísel  $a, b, c$  rovno nule, získáváme základní goniometrickou rovnici (není-li ovšem  $a = b = 0$ ), kterou již umíme řešit:

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow \sin x = \frac{c}{b}, & b = 0 &\Rightarrow \cos x = \frac{c}{a}, \\ c = 0 &\Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0) & \vee &\operatorname{cotg} x = -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

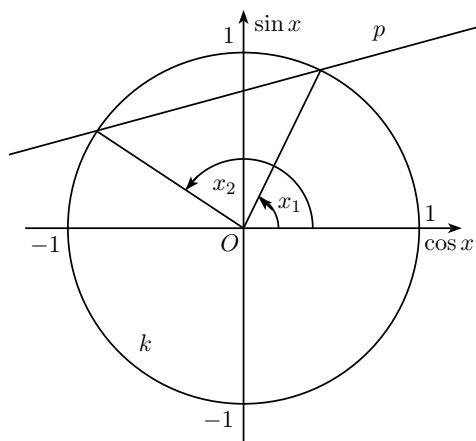
V dalším výkladu proto budeme předpokládat, že  $a, b, c \neq 0$ . Metody řešení lineární rovnice mezi kosinem a sinem jsou dvě – (výše obecně popsaná) *algebraická* metoda a metoda *goniometrická*. V tomto pořadí je nyní i posoudíme. Ještě předtím však poznamenejme, že k řešení zkoumané rovnice lze úspěšně uplatnit i třetí postup: dříve zmíněná univerzální substituce  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  nás od rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$  zřejmě přivede ke kvadratické rovnici

$$a(1-y^2) + 2by = c(1+y^2).$$

1. U algebraické metody přecházíme k soustavě dvou rovnic o dvou neznámých  $\sin x$  a  $\cos x$ , které už teď nebudeme přeznačovat jako  $s$  a  $c$ :

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= c, \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1. \end{aligned}$$

Každé řešení  $[\sin x, \cos x]$  této soustavy určuje nekonečně mnoho řešení původní rovnice díky periodě  $2\pi$  obou funkcí sinus a kosinus, přičemž na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  existuje jediný úhel  $x$ , který danému řešení odpovídá. Analyticky-geometrickou interpretací algebraické metody je

Obrázek 4.17: Rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$  řešená na jednotkové kružnici

hledání průniku přímky  $p : a \cos x + b \sin x - c = 0$  a jednotkové kružnice  $k : \cos^2 x + \sin^2 x = 1$  (obr. 4.17). Kritériem existence řešení rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$  je tedy podmínka, aby daný průnik byl neprázdný, což zapíšeme pomocí vzdálenosti počátku  $O = [0, 0]$  od přímky  $p$ :

$$p \cap k \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad |Op| \leq 1.$$

Z analytické geometrie vzpomeňme vzorec  $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  pro vzdálenost bodu  $[x_0, y_0]$  od přímky  $ax + by + c = 0$ , do kterého v naší podmínce  $|Op| < 1$  dosadíme:

$$|Op| = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tak jsme odvodili, že rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$  je řešitelná, právě když její koeficienty  $a, b, c$  splňují podmínku  $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ . Je-li poslední nerovnost ostrá, má zkoumaná rovnice v intervalu  $(0, 2\pi)$  dvě různá řešení, jak je tomu v situaci na obr. 4.17.

2. Myšlenkou goniometrické metody je úprava levé strany rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$  na tvar  $K \cdot \sin(x + \varphi)$ , kde  $K > 0$  a  $\varphi \in (0, 2\pi)$  jsou vhodná čísla.<sup>9</sup> Touto úpravou získáváme základní goniometrickou rovnici pro funkci sinus ve tvaru

$$K \cdot \sin(x + \varphi) = c \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \varphi) = \frac{c}{K}.$$

Ukažme proto, jak kýžené vyjádření levé strany původní rovnice prakticky najít. Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  má platit

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= K \cdot \sin(x + \varphi), \\ a \cos x + b \sin x &= K \cdot (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi), \\ \underline{a} \cos x + \underline{b} \sin x &= \underline{K \sin \varphi} \cos x + \underline{K \cos \varphi} \sin x. \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Levá strana rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$  je tak v proměnné  $x$  *sinusoidální* funkcí. Tomuto druhu funkcí se budeme věnovat v příkladu 4.7.1.

Čísla  $K$  a  $\varphi$  tudíž hledáme z podmínek

$$K \sin \varphi = a, \quad K \cos \varphi = b.$$

Umocněním obou rovností a jejich následným sečtením určíme neznámé kladné číslo  $K$ :

$$K^2 \sin^2 \varphi + K^2 \cos^2 \varphi = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad K^2 \cdot 1 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pro druhou neznámou  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$  tak dostaneme soustavu rovnic

$$\sin \varphi = \frac{a}{K} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{K} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Její řešitelnost je zaručena tím, že součet druhých mocnin pravých stran obou rovnic je (díky určené hodnotě  $K$ ) rovna 1. Prakticky lze číslo  $\varphi$  určit například tak, že nejprve v oboru  $\langle 0, 2\pi \rangle$  vyřešíme rovnici

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$$

a pak podle znamének čísel  $a, b$  vybereme řešení  $\varphi$  ze „správného“ kvadrantu.

■ **Příklad 4.4.3.** Oběma metodami vyřešte v oboru  $\mathbb{R}$  rovnici  $6 \cos x - 8 \sin x = 5$ .

*Řešení:*

1. Algebraická metoda:

$$\begin{aligned} c = \cos x, \quad s = \sin x \quad &\Rightarrow \quad 6c - 8s = 5 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{6c - 5}{8}, \\ c^2 + s^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad c^2 + \left(\frac{6c - 5}{8}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 64c^2 + (6c - 5)^2 = 64 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 100c^2 - 60c - 39 = 0, \\ D = (-60)^2 - 4 \cdot 100 \cdot (-39) = 400 \cdot 48 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{D} = 80\sqrt{3}, \\ c_1 = \frac{60 + 80\sqrt{3}}{200} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}, \quad s_1 = \frac{6c_1 - 5}{8} = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10}, \\ c_2 = \frac{60 - 80\sqrt{3}}{200} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}, \quad s_2 = \frac{6c_2 - 5}{8} = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}. \end{aligned}$$

Dvojici kladných čísel  $(c_1, s_1)$  odpovídá řešení  $x$  z prvního kvadrantu, takže

$$x_{1,k} = \arcsin \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dvojici záporných čísel  $(c_2, s_2)$  odpovídá řešení  $x$  ze třetího kvadrantu, takže

$$x_{2,k} = \pi + \arcsin \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Goniometrická metoda:

Zadanou rovnici vydělíme číslem  $K = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ :

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \cos x - \frac{4}{5} \sin x &= \frac{1}{2}, \\ \sin(x + \varphi) &= \frac{1}{2}, \text{ kde } \cos \varphi = -\frac{4}{5} \text{ a } \sin \varphi = \frac{3}{5}, \\ \arcsin \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{6}, \varphi = \pi - \arcsin \frac{3}{5}, \\ x_{1,k} + \pi - \arcsin \frac{3}{5} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_{2,k} + \pi - \arcsin \frac{3}{5} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \\ x_{1,k} &= -\frac{5\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ x_{2,k} &= -\frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Přesvědčeme se, že oba postupy řešení vedly ke stejnému výsledku, že tedy platí rovnosti

$$\begin{aligned}\arcsin \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10} &= -\frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5}, \\ \pi + \arcsin \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10} &= -\frac{5\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi.\end{aligned}$$

Protože  $\frac{\pi}{6} < \arcsin \frac{3}{5} < \frac{\pi}{2}$ , je první rovnost rovností dvou úhlů z prvního kvadrantu, takže platí, pokud

$$\frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10} = \sin \left( -\frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5} \right).$$

Užitím součtového vzorce dostáváme

$$\sin \left( -\frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5} \right) = \sin \left( \arcsin \frac{3}{5} \right) \cos \frac{\pi}{6} - \cos \left( \arcsin \frac{3}{5} \right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10}.$$

Druhá rovnost

$$\pi + \arcsin \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10} = \frac{7\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5}$$

je rovností dvou úhlů ze třetího kvadrantu, neboť  $0 < \arcsin \frac{3}{5} < \frac{\pi}{3}$ . Zmenšeme je oba o hodnotu  $\pi$  a pak porovnejme hodnoty jejich sinů:

$$\sin \left( \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{3}{5} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \left( \arcsin \frac{3}{5} \right) + \cos \frac{\pi}{6} \sin \left( \arcsin \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}.$$

Tím je rovnost obou množin řešení ověřena. ■

Vraťme se k obecnému výkladu o metodách řešení goniometrických rovnic. Žádný další jejich typ už obecně zapisovat nebudeme. Místo toho poznamenejme, že mnohé goniometrické rovnice řešíme tak, že využíváme *algebraické a goniometrické úpravy*, abychom je převedli na *součinový tvar*

$$F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \dots \cdot F_n(x) = 0,$$

kde každý činitel je tvaru  $F_i(x) = f_i(a_i x + b_i) - c_i$ , v němž  $f_i$  značí některou goniometrickou funkci a koeficienty  $a_i, b_i, c_i$  jsou daná reálná čísla (často je  $c_i = 0$ ).<sup>10</sup> Protože součin několika činitelů je roven nule, právě když je aspoň jeden činitel nulový, všechna řešení rovnice  $F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \dots \cdot F_n(x) = 0$  dostaneme, když vyřešíme každou z jednotlivých základních rovnic

$$F_i(x) = f_i(a_i x + b_i) - c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a množiny jejich řešení nakonec *sjednotíme*.<sup>11</sup> Tato závěrečná fáze je tedy rutinní záležitost, rozhodujícím krokem celého průběhu řešení je dovést výchozí goniometrickou rovnici vhodnými úpravami do součinného tvaru, o kterém jsme právě pojednali.

■ **Příklad 4.4.4.** Každou z jednotlivých rovnic

$$\text{a) } 3 \sin \left( x + \frac{2\pi}{7} \right) = 2 \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7} \right),$$

$$\text{b) } \sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0,$$

$$\text{c) } \cos x \cdot \cos 2x = \cos 4x \cdot \cos 5x$$

převedte na součinný tvar.

*Řešení:* a)

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7} &\Rightarrow x = 2y - \frac{16\pi}{7} \Rightarrow x + \frac{2\pi}{7} = 2y - 2\pi, \\ 3 \sin(2y - 2\pi) &= 2 \sin y \Leftrightarrow 3 \sin 2y = 2 \sin y, \\ 0 = 3 \sin 2y - 2 \sin y &= 3 \cdot 2 \sin y \cos y - 2 \sin y = 6 \sin y \left( \cos y - \frac{1}{3} \right), \\ \sin \left( \frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7} \right) \cdot \left[ \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7} \right) - \frac{1}{3} \right] &= 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{\sin x} + \sin 3x + \underline{\sin 5x} &= 0 \quad (\text{součet sinů převedeme na součín}), \\ 2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} + \sin 3x &= 0, \\ 2 \underline{\sin 3x} \cos 2x + \underline{\sin 3x} &= 0 \quad (\text{vytkneme společný činitel}), \\ \sin 3x \cdot (2 \cos 2x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \cos 2x &= \cos 4x \cdot \cos 5x \quad (\text{součiny kosinů převedeme na součty}), \\ \frac{\cos 3x + \cos x}{2} &= \frac{1}{2}(\cos 9x + \cos x), \\ 0 &= \cos 9x - \cos 3x \quad (\text{rozdíl kosinů převedeme na součín}), \\ 0 &= -2 \sin 6x \cdot \sin 3x. \end{aligned}$$

<sup>10</sup>V součinném tvaru tedy např. není rovnice  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{3}$  (na pravé straně není nula), kterou ovšem vyřešíme převedem na základní rovnici  $\sin 2x = \frac{2}{3}$ .

<sup>11</sup>Tyto množiny často nejsou disjunktní. Abychom jejich sjednocení zapsali „bez opakování“, vypíšeme nejprve a porovnáme všechna řešení na některém intervalu délky rovné společné periodě obou stran původní rovnice.



Náš přehled metod řešení goniometrických rovnic završíme poznámkou, že u některých rovnic lze výhodně využít poznatku o ohraničeném oboru hodnot  $\langle -1, 1 \rangle$  funkcí sinus a kosinus. Tak například rovnice

$$\sin P + \cos Q + 2 = 0, \quad \sin R \cdot \cos S = -1 \quad \text{a} \quad 3 \sin T - 4 = \cos^3 U$$

(tvar výrazů  $P, Q, R, S, T, U$  není důležitý) mohou být splněny jediné tak, že platí

$$\sin P = \cos Q = -1, \quad \{\sin R, \cos S\} = \{-1, 1\} \quad \text{a} \quad \sin T = 1 \wedge \cos U = -1.$$

Pro libovolná čísla  $s, c \in \langle -1, 1 \rangle$  totiž platí

$$s + c + 2 \geq 0, \quad s \cdot c \geq -1 \quad \text{a} \quad 3s - 4 \leq -1 \leq c^3,$$

přítom rovnosti nastanou jen ve výše uvedených případech. ■

V kratší druhé části této podkapitoly pojednáme stručně o řešení goniometrických nerovnic. Setkáváme se s nimi například při stanovování definičních oborů složených funkcí. Tak funkce zadané předpisy

$$y_1 = \log(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x), \quad y_2 = \sqrt{\sin x + \cos x}$$

mají definiční obory tvořené všemi řešeními nerovnic

$$\operatorname{tg} x < \sqrt{3}, \quad \text{resp.} \quad \sin x + \cos x \geq 0.$$

První z nich patří mezi *základní goniometrické nerovnice*, které jsou obecně tvarů

$$f(x) \leq c, \quad f(x) < c, \quad f(x) \geq c, \quad f(x) > c,$$

kde  $f$  je jedna z goniometrických funkcí  $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$  a  $c$  je dané reálné číslo. Jejich řešení má úzkou souvislost s příslušnou goniometrickou rovnicí  $f(x) = c$ . Je-li tato rovnice řešitelná, jsou její jednotlivá řešení krajními body intervalů, ze kterých je složen obor pravdivosti původní nerovnice.<sup>12</sup> O které intervaly se konkrétně jedná, můžeme zjistit z grafu goniometrické funkce  $f$  nebo z její určenosti goniometrickou ručičkou na jednotkové kružnici. Obě metody nyní stručně okomentujeme.

- *Řešení goniometrických nerovnic na grafech*

Touto metodou můžeme řešit nejen základní goniometrické nerovnice (viz např. obr. 4.18), ale i nerovnice typu<sup>13</sup>

$$f(ax + b) \leq c \quad \text{a} \quad f(ax + b) \leq g(cx + d),$$

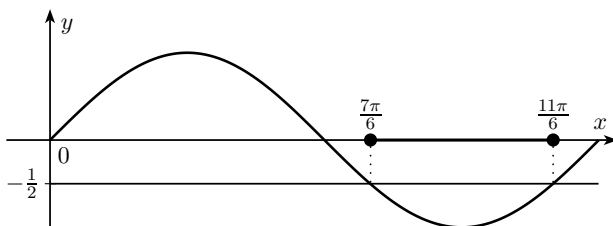
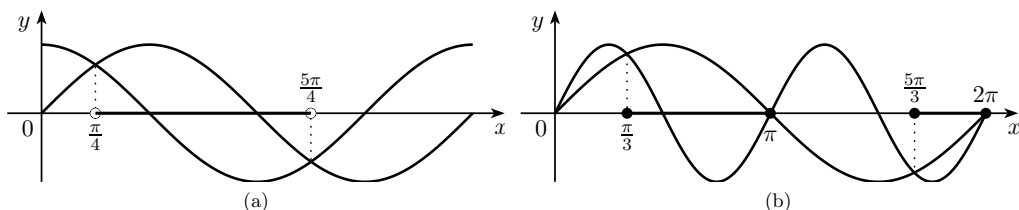
kde  $f$  a  $g$  jsou (ne nutně různé) goniometrické funkce (viz např. obr. 4.19). Obecně lze konstatovat, že řešení nerovnice  $F(x) \leq G(x)$  je výhodné „odečítat“ graficky, kdykoliv máme grafy funkcí  $F$  a  $G$  k dispozici.

- *Řešení goniometrických nerovnic na jednotkové kružnici*

V rovině s kartézskou soustavou souřadnic  $Ocs$  (doplněnou případně o osy  $t$  a  $ct$  pro funkce

<sup>12</sup>Není-li příslušná rovnice řešitelná, je situace jednodušší: nerovnice  $\sin x \geq 2$  nemá řešení, nerovnice  $\cos x > -2$  má za řešení každé  $x \in \mathbb{R}$ .

<sup>13</sup>Pro stručnost budeme od tohoto místa zapisovat *typy* nerovností jen se znakem  $\leq$ , i když na jeho místě může být i kterýkoliv ze znaků  $\geq, <$  nebo  $>$ .


 Obrázek 4.18: Nerovnice  $\sin x \leq -\frac{1}{2}$  v oboru  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ 

 Obrázek 4.19: Nerovnice  $\sin x > \cos x$  a  $\sin 2x \leq \sin x$  v oboru  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ 

tangens a kotangens) můžeme řešit základní goniometrické nerovnice způsobem, který objasníme podle obr. 4.20 na příkladech  $\sin x \leq -\frac{1}{2}$  a  $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{2}$ . V prvním z nich hledáme ty body na jednotkové kružnici  $k$ , které leží ve vyznačené polovině  $p$  o rovnici  $s \leq -\frac{1}{2}$ . Výslednou množinou je znázorněný oblouk, jehož krajní body odpovídají dvěma vyznačeným úhlům  $x_1, x_2$  – řešením příslušné rovnice  $\sin x = -\frac{1}{2}$ . Ta jsou pak krajními body uzavřeného intervalu  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , jenž je hledaným oborem pravdivosti zadané nerovnice v oboru  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

U druhého příkladu, nerovnice  $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{2}$ , hledáme ty body na jednotkové kružnici  $k$ , jejichž (prodloužená) spojnice<sup>14</sup> s počátkem  $O$  protne tangentsou  $t$  v bodě vyznačené polopřímky  $t \geq -\frac{1}{2}$ . Výsledná množina je tvořena dvojicí oblouků, takže množina řešení zadané nerovnice v oboru  $\langle 0, 2\pi \rangle$  je sjednocením příslušných intervalů  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ ,  $\langle x_1, \frac{3\pi}{2} \rangle$  a  $\langle x_2, 2\pi \rangle$ , kde  $x_2 = x_1 + \pi$  – v souladu s tím, že funkce tangens má periodu  $\pi$ .

■ **Příklad 4.4.5.** Řešte goniometrickou nerovnici  $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$ .

*Řešení:* Zavedeme substituci  $y = 2x + \frac{\pi}{3}$  a vyřešíme příslušnou goniometrickou rovnici:

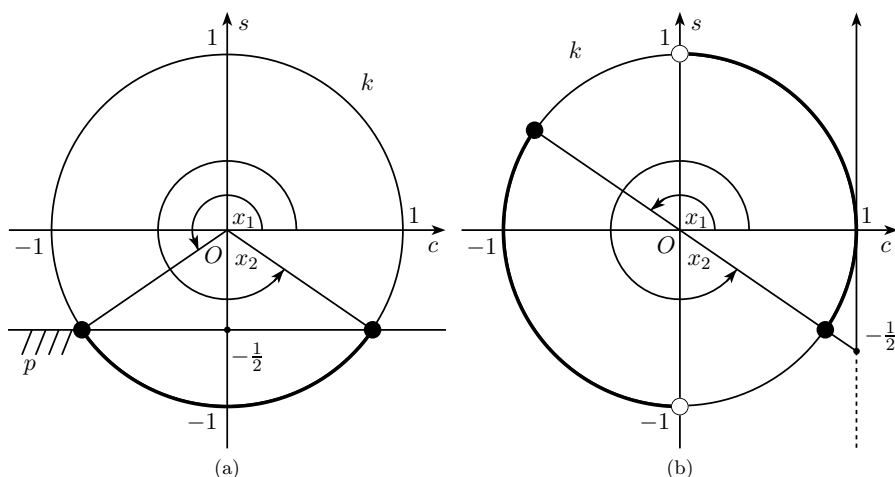
$$\sin y = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad y_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Z grafu nebo z jednotkové kružnice nerovnici vyřešíme a vrátíme se zpátky k neznámé  $x$ :

$$\begin{aligned} \sin y \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Odpověď: } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle.$$

<sup>14</sup>Připomínáme, že při odečtu hodnot  $\operatorname{tg} x$  na ose  $t$  je nutné (v 2. a 4. kvadrantu) goniometrickou ručičku  $OA$  prodloužit nikoliv za bod  $A$ , ale za bod  $O$ .


 Obrázek 4.20: Nerovnice  $\sin x \leq -\frac{1}{2}$  a  $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{2}$  v oboru  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ 

Věnujme se nyní souhrnně početním metodám řešení složitějších goniometrických nerovnic. Všeobecně lze konstatovat, že pro ně můžeme využít stejné postupy jako pro příslušné goniometrické rovnice, které jsme podrobně popsali dříve. Tak pro jednotlivé typy goniometrických nerovnic

$$F(\sin x, \cos 2x) \leq 0, \quad F(\cos x, \cos 2x) \leq 0, \quad F(\sin x \pm \cos x, \sin 2x) \leq 0$$

zavádíme po řadě substituce  $y = \sin x, y = \cos x, y = \sin x \pm \cos x$ , podobně jako pro obecnou nerovnici  $F(\sin x, \cos x) \leq 0$  můžeme uvažovat o univerzální substituci  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Každou takovou substitucí  $y = f(x)$  přecházíme k algebraické nerovnici  $P(y) \leq 0$ , jejíž množina řešení je – obecně vzato – sjednocením několika omezených či neomezených intervalů. Pro každý z nich pak uskutečneme návrat od nové neznámé  $y = f(x)$  k původní neznámé  $x$ . Je-li např.  $\langle c, d \rangle$  jeden takový interval, zmíněný návrat spočívá v řešení *soustavy* goniometrických nerovnic  $c \leq f(x) \leq d$ . K řešení soustav přecházíme i v případech, kdy se nám výchozí goniometrickou nerovnicí podaří upravit na součinný tvar  $F_1(x) \cdot F_2(x) \leq 0$ ; výsledný obor pravdivosti je sjednocením množin řešení dvou soustav

$$F_1(x) \leq 0 \wedge F_2(x) \geq 0 \quad \text{a} \quad F_1(x) \geq 0 \wedge F_2(x) \leq 0,$$

neboť o znaménku hodnoty součinu rozhodují znaménka činitelů. (Podobné soustavy bychom mohli vypsát i pro nerovnice v součinném tvaru složeném z více činitelů.)

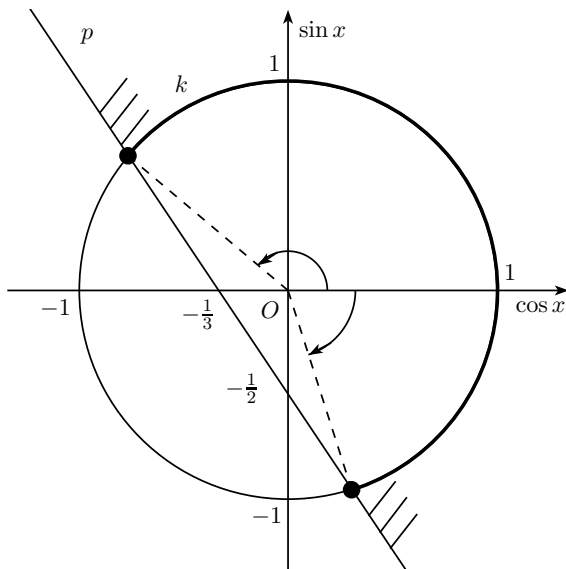
Poslední poznámku věnujme lineárním nerovnicím typu

$$a \cos x + b \sin x \leq c.$$

Při jejich řešení algebraickou metodou dostáváme pro jednu neznámou  $c = \cos x$  nebo  $s = \sin x$  kvadratickou nerovnici, kterou pak řešíme v oboru  $\langle -1, 1 \rangle$ . Tento postup (stejně jako u rovnic) můžeme interpretovat (a zároveň i kontrolovat) graficky způsobem z obr. 4.21, kdy hledáme průnik jednotkové kružnice  $k$  s polorovinou  $p$ , která odpovídá příslušné lineární nerovnici. Druhá goniometrická metoda řešení lineární nerovnice mezi sinem a kosinem spočívá ve dříve popsané úpravě

$$a \cos x + b \sin x \leq c \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \varphi) \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

s vhodnou hodnotou  $\varphi$ .



Obrázek 4.21: Řešení nerovnice  $3 \cos x + 2 \sin x \geq -1$

■ **Příklad 4.4.6.** V oboru  $\langle 0, 2\pi \rangle$  řešte nerovnice

a)  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$

b)  $1 + (1 + \cos x) \cos 2x < \cos 3x + 2 \cos^3 x.$

Řešení: a)

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 0,$$

$$2 \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \wedge \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) < 0, \\ 2) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \wedge \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) > 0. \end{array}$$

1)

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \wedge \quad \pi + 2l\pi < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} < 2\pi + 2l\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{4k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} \quad \wedge \quad \frac{13\pi}{6} + 4l\pi < x < \frac{25\pi}{6} + 4l\pi, \text{ kde } k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$x \in \langle 0, 2\pi \rangle \Rightarrow x \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right) \wedge x \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle \Rightarrow x \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle.$$

2)

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \wedge \quad 0 + 2l\pi < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} < \pi + 2l\pi,$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{6} + 4l\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 4l\pi, \text{ kde } k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$x \in \langle 0, 2\pi \rangle \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \wedge x \in \left(\frac{\pi}{6}, 2\pi\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

$$\text{Odpověď: } x \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

b)

$$1 + (1 + \cos x) \cos 2x < \cos 3x + 2 \cos^3 x,$$

$$1 + (1 + \cos x) \cos 2x < \cos(2x + x) + 2 \cos^3 x,$$

$$1 + \cos 2x + \cos x \cos 2x < \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 2 \cos^3 x,$$

$$1 + \cos 2x + \sin 2x \sin x - 2 \cos^3 x < 0,$$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos x - 2 \cos^3 x < 0,$$

$$2 \cos x (\cos x + \sin^2 x - \cos^2 x) < 0,$$

$$2 \cos x (\cos x + (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x) < 0,$$

$$2 \cos x (\cos x + 1 - 2 \cos^2 x) < 0.$$

Pro  $y = \cos x$  tak máme nerovnici

$$y(1 + y - 2y^2) < 0 \quad \text{neboli} \quad y(1 - y)(1 + 2y) < 0$$

s nulovými body  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ , která má v oboru  $\mathbb{R}$  řešení  $y \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (1, \infty)$ . S ohledem na substituci  $y = \cos x$  druhý interval vyloučíme a dostáváme  $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$ . Řešením původní nerovnice v intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  je proto  $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$ .

## 4.5 Goniometrické soustavy rovnic

V předchozí podkapitole jsme se seznámili s rozličnými metodami řešení goniometrických rovnic. Každá z nich byla úlohou na nalezení všech vyhovujících hodnot *jedné neznámé*  $x \in \mathbb{R}$ . Neřešili jsme většinou jednotlivé rovnice, nýbrž jsme popisovali metody řešení celých skupin typově blízkých rovnic.

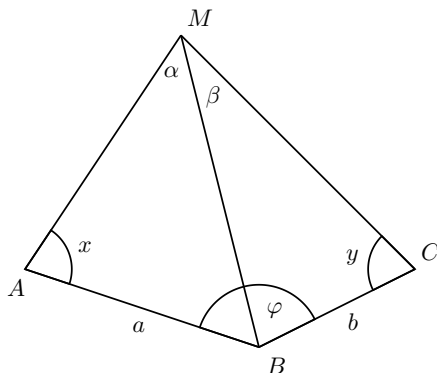
Řešení geometrických úloh nás však často staví do situace, kdy hledáme více neznámých úhlů svázaných různými podmínkami, které dokážeme vyjádřit určitou soustavou rovnic. Je-li mezi nimi aspoň jedna goniometrická rovnice (tedy rovnice s neznámými v argumentu goniometrických funkcí), mluvíme o *goniometrické soustavě rovnic*. Vytvořit metodiku řešení nějakých širších skupin takových soustav je prakticky nemožné, proto se při našem výkladu budeme zabývat poměrně konkrétními soustavami, které přesto jistý rys obecnosti postrádat nebudou. Půjde totiž vesměs o příklady soustav popisujících konkrétní geometrické situace s jedním nebo více vstupními údaji, které se pak stávají *parametry* dotýčných rovnic v obvyklém významu tohoto termínu školské matematiky. Řešení takových soustav pak samozřejmě vyžadují diskusi o existenci, tvaru a počtu řešení.

Goniometrické soustavy rovnic, které budeme formou příkladů řešit, jsme většinou převzali z knihy [26].<sup>15</sup> Z rozsahových důvodů nebudeme prokazovat, že tyto soustavy skutečně mají svůj „geometrický původ“. První z výjimek učiníme v případě Snellovy soustavy z úvodního příkladu 4.5.1. Popíšeme již nyní důležitou úlohu z matematické geodézie, která nás přivede právě ke Snellově soustavě.

*Na mapě, na které už jsou zakresleny známé geodetické body  $A, B$  a  $C$ , máme vyznačit nový geodetický bod  $M$ , z něhož jsou úsečky  $AB$  a  $BC$  vidět pod úhly  $\alpha$ , resp.  $\beta$ , jež byly prakticky změřeny.*

V daném trojúhelníku  $ABC$  označíme  $a = |AB|$ ,  $b = |BC|$  a  $\varphi = |\angle ABC|$ . Polohu bodu  $M$

<sup>15</sup>Na odlišný původ příkladů upozorníme poznámkami pod čarou.



Obrázek 4.22

určíme výpočtem dvojice úhlů  $x = |\angle BAM|, y = |\angle BCM|$  výpočtem z naměřených úhlů  $\alpha = |\angle AMB|$  a  $\beta = |\angle BMC|$ . K tomu sestavíme soustavu dvou rovnic s neznámými  $x$  a  $y$ . První z nich

$$x + y = 2\pi - (\alpha + \beta + \varphi)$$

okamžitě plyne ze součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku  $ABCM$ . Druhou goniometrickou rovnicí odvodíme ze sinové věty zapsané pro trojúhelníky  $ABM$  a  $BCM$ :

$$\frac{\sin x}{\sin \alpha} = \frac{|BM|}{a} \quad \wedge \quad \frac{\sin y}{\sin \beta} = \frac{|BM|}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

Tak jsme zadanou geodetickou úlohu převedli na řešení soustavy rovnic s neznámými  $x, y$ , která je tvaru

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}, \quad x + y = 2\pi - (\alpha + \beta + \varphi).$$

Bude to první ze skupiny prakticky významných goniometrických soustav, které budeme řešit a které jsou všechny typu

$$f(x) * f(y) = a, \quad x \pm y = b$$

s neznámými  $x, y \in \mathbb{R}$ , danou goniometrickou funkcí  $f$ , danou aritmetickou operací  $*$  a parametry  $a, b \in \mathbb{R}$ . Z rozsahových důvodů nebudeme zapisovat řešení těchto i dalších soustav až do konce, nýbrž se spokojíme zpravidla s odvozením některé základní goniometrické rovnice o jedné neznámé, se kterou už je dokončení celého řešení rutinní záležitostí.

■ **Příklad 4.5.1.** Řešte soustavu rovnic

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad x + y = b.$$

*Řešení:* Vyjádření  $x = b - y$  z druhé rovnice dosadíme do první rovnice, kterou pak upravíme pomocí součtového vzorce pro sinus:

$$a = \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(b - y)}{\sin y} = \frac{\sin b \cos y - \cos b \sin y}{\sin y} = \sin b \cdot \cotg y - \cos b.$$

Dostáváme tak základní rovnici s neznámou  $y$  pro funkci kotangens

$$\sin b \cdot \cotg y = a + \cos b.$$

Diskuse o jejím řešení (podle toho, zda číslo  $\sin b$  je rovno nule či nikoliv, a zda v případě  $\sin b = 0$  je rovno nule i číslo  $a + \cos b$ ) je snadná. Každému nalezenému řešení  $y$  pak odpovídá jediné  $x = b - y$ . Dodejme ještě, že podobným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\frac{\cos x}{\cos y} = a, \quad x \pm y = b.}$$

■ **Příklad 4.5.2.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x + \sin y = a, \quad x + y = b.}$$

*Řešení:* Do první rovnice upravené podle vzorce pro součet sinů dosadíme za součet  $x + y$  hodnotu  $b$  z druhé rovnice:

$$a = \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

To je základní rovnice s neznámou  $u = \frac{x-y}{2}$  pro funkci kosinus. Existence jejích řešení zřejmým způsobem závisí na hodnotách  $a, \sin \frac{b}{2}$ . Ke každé vyhovující hodnotě  $u$  pak určíme příslušná  $x, y$  ze soustavy lineárních rovnic

$$x + y = b, \quad \frac{x-y}{2} = u.$$

Dodejme, že stejným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\sin x \pm \sin y = a, \quad x \pm y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\cos x \pm \cos y = a, \quad x \pm y = b.}$$

■ **Příklad 4.5.3.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x \cdot \sin y = a, \quad x + y = b.}$$

*Řešení:* Dvojnásobek levé strany první rovnice vyjádříme jako rozdíl kosinů a za součet  $x + y$  dosadíme hodnotu  $b$  z druhé rovnice:

$$2a = 2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) = \cos(x-y) - \cos b.$$

To je základní rovnice s neznámou  $u = x - y$  pro funkci kosinus (která má řešení, právě když  $|2a + \cos b| \leq 1$ ). Ke každé vyhovující hodnotě  $u$  pak určíme příslušná  $x, y$  ze soustavy lineárních rovnic

$$x + y = b, \quad x - y = u.$$

Podobným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\sin x \sin y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\cos x \cos y = a, \quad x \pm y = b.}$$

■

Dříve než přejdeme k soustavám daného typu pro funkce tangens a kotangens, poznamenejme, že postupy řešení prvních tří příkladů lze použít i pro obdobné soustavy, u nichž je parametru  $a$  roven jeden z výrazů

$$\sin x \pm \cos y, \quad \sin x \cos y, \quad \frac{\sin x}{\cos y},$$

neboť stačí využít převodní vzorec  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y$ , přitom substituce  $y' = \frac{\pi}{2} - y$  změní rovnici  $x \pm y = b$  na rovnici téhož typu  $x \mp y' = b \mp \frac{\pi}{2}$ .

■ **Příklad 4.5.4.** Řešte soustavu rovnic<sup>16</sup>

$$\boxed{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.}$$

*Řešení:* Předpokládejme nejprve, že hodnota  $\operatorname{tg} b$  existuje. Potom z daných rovnic odvodíme vztah

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

ze kterého (v případě, že  $a \cdot \operatorname{tg} b \neq 0$ ) vyjádříme hodnotu  $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$  zlomkem

$$p = 1 - \frac{a}{\operatorname{tg} b}.$$

Známe tedy jak součet, tak i součin hodnot  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{tg} y$ , takže je můžeme určit jako kořeny  $t_{1,2}$  kvadratické rovnice

$$t^2 - at + p = 0.$$

(Diskusi o existenci kořenů stejně jako rozbor případu  $a \cdot \operatorname{tg} b = 0$  vynecháme.) Nakonec ve vyjádřeních

$$x = \operatorname{arctg} t_1 + k\pi, \quad y = \operatorname{arctg} t_2 + l\pi$$

(nezapomeňme, že kořeny  $t_1$  a  $t_2$  musíme dosadit v obou pořadích) určíme závislost parametrů  $k, l \in \mathbb{Z}$  tak, aby byla splněna původní rovnice  $x + y = b$  (a nikoliv jen její důsledek  $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x + y)$ ), ze kterého náš postup vycházel).

V případě, kdy hodnota  $\operatorname{tg} b$  neexistuje, vede rovnice  $x + y = b$  k hodnotě  $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$ . Další postup s kvadratickou rovnicí je stejný jako v prvním případě.

Dodejme, že podobným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = a, \quad x \pm y = b}$$

(v obou rovnicích druhé soustavy se berou stejná znaménka). ■

Výklad jednotlivých příkladů goniometrických soustav nyní oživíme ukázkou zajímavé konstrukční úlohy, jejíž řešení snadno převedeme na soustavy rovnic s funkcí tangens z předchozího příkladu 4.5.4.

*Na dané tečně ke kružnici o středu  $S$  sestrojte úsečku dané délky  $d$ , jež je ze středu  $S$  vidět pod daným úhlem  $\omega$ .*

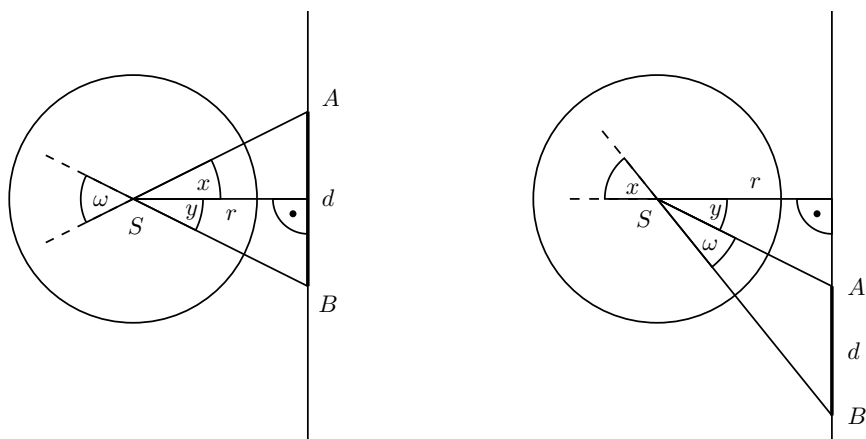
Označme  $r$  poloměr dané kružnice a  $x, y$  neznámé úhly, které podle obrázků obou možných situací určují polohy krajních bodů  $A, B$  hledané úsečky. Je patrné, že  $x, y$  splňují soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{d}{r}, \quad x + y = \omega} \quad \text{resp.} \quad \boxed{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{d}{r}, \quad x - y = \omega.}$$

První soustava pro situaci z levého obrázku je přímo v zadání příkladu 4.5.4, druhá soustava odpovídající pravému obrázku je zmíněna v závěru jeho řešení.

<sup>16</sup>V knize [26] je tato soustava pouze okrajově zmíněna, aniž by byla uvedena související geometrická úloha, kterou popíšeme vzápětí poté, co soustavu vyřešíme.





Obrázek 4.23

■ **Příklad 4.5.5.** Řešte soustavu rovnic<sup>17</sup>

$$\boxed{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.}$$

*Řešení:* Předpokládejme nejprve, že hodnota  $\operatorname{tg} b$  existuje, a zaveďme pomocné neznámé  $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$  a  $s = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ . Z druhé rovnice soustavy plyne

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{s}{1 - p}, \text{ odkud } s = (1 - p)\operatorname{tg} b.$$

Ze soustavy lineárních rovnic

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (1 - p)\operatorname{tg} b, \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a$$

nacházíme

$$\operatorname{tg} x = \frac{(1 - p)\operatorname{tg} b + a}{2}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{(1 - p)\operatorname{tg} b - a}{2}.$$

Po dosazení do vztahu  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = p$  získáme kvadratickou rovnici

$$(1 - p)^2 \operatorname{tg}^2 b - a^2 = 4p$$

k určení hodnoty  $p$  (v případě  $\operatorname{tg} b = 0$  jde o rovnici lineární). Ke každé vyhovující hodnotě  $p$  vypočteme podle uvedených vzorců hodnoty  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{tg} y$ . Zbytek řešení je stejný jako u první části řešení příkladu 4.5.4 – musíme zajistit, aby byla splněna nejen rovnice  $\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg} b$ , ale i původní rovnice  $x + y = b$ .

V případě, kdy hodnota  $\operatorname{tg} b$  neexistuje, vede rovnice  $x + y = b$  k hodnotě  $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$ , takže hodnoty  $u = \operatorname{tg} x$ ,  $v = \operatorname{tg} y$  lze v tomto případě určit z jednoduché soustavy rovnic

$$u - v = a, \quad u \cdot v = 1.$$

Zbytek (řešení základních rovnic  $\operatorname{tg} x = u$ ,  $\operatorname{tg} y = v$  a zajištění podmínky  $x + y = b$ ) je nasnadě. Dodejme, že popsaným postupem lze řešit i soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = a, \quad x \mp y = b.}$$

<sup>17</sup>Uvedeme vlastní (odlišný od knihy [26]) postup řešení.

■ **Příklad 4.5.6.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.}$$

*Řešení:* V případě, kdy hodnota  $\operatorname{tg} b$  existuje, z druhé rovnice soustavy plyne

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - a},$$

takže musí být  $a \neq 1$ , jinak soustava nemá řešení. Ze vztahů

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (1 - a)\operatorname{tg} b \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = a$$

vidíme, že čísla  $t_1 = \operatorname{tg} x$  a  $t_2 = \operatorname{tg} y$  jsou kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - (1 - a)\operatorname{tg} b + a = 0.$$

Po jejich určení zbývá vyřešit dvě základní rovnice  $\operatorname{tg} x = t_1$  a  $\operatorname{tg} y = t_2$  a zajistit splnění rovnice  $x + y = b$ , když zaručeně platí  $\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg} b$ .

V případě, kdy hodnota  $\operatorname{tg} b$  neexistuje, z rovnice  $x + y = b$  plyne  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$ , takže daná soustava má řešení, jen když  $a = 1$ , a jsou to všechny dvojice  $(x, y)$  určené rovnicí  $x + y = b$ . Podobný postup lze uplatnit i k řešení soustav

$$\boxed{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} y = a, \quad x \pm y = b,}$$

přítom od součinu  $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} y$  lze pomocí substituce  $y' = \frac{\pi}{2} - y$  přejít k součinu  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y'$ . (Soustavu rovnic se zadaným součinem  $\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y$  jsme ani nezapsali, neboť tento součin je převrácenou hodnotou součinu  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ .) ■

Ve všech předchozích příkladech jsme řešili soustavy dvou rovnic, z nichž jedna byla *goniometrická* a druhá *lineární*. Nyní přejdeme k soustavám, v nichž obě rovnice budou *goniometrické*. I jejich výběr je dán praktickým významem při řešení geometrických úloh (které však uvádět nebudeme).

■ **Příklad 4.5.7.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x \sin y = a, \quad \cos x \cos y = b.}$$

*Řešení:* Ze součtového vzorce pro funkci kosinus vyplývá, že zadaná soustava je ekvivalentní se soustavou základních goniometrických rovnic

$$\cos(x + y) = b - a, \quad \cos(x - y) = b + a.$$

Takové rovnice jsou řešitelné, právě když platí  $|b - a| \leq 1$  a zároveň  $|b + a| \leq 1$ . Po určení hodnot  $u = x + y, v = x - y$  (nezapomeňme na dva nezávislé celočíselné násobky periody  $2\pi$ ) se vrátíme k původním neznámým

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v).$$

Podobným postupem založeným na součtovém vzorci pro funkci sinus lze řešit soustavu

$$\boxed{\sin x \cos y = a, \quad \cos x \sin y = b.}$$

■ **Příklad 4.5.8.** Řešte soustavu rovnic

$$\sin x \cos y = a, \quad \cos x \cos y = b.$$

*Řešení:* Předpokládejme nejprve, že  $b \neq 0$ . Pak nutně platí i  $\cos x \neq 0$  a  $\cos y \neq 0$ , takže po vydělení první rovnice soustavy její druhou rovnicí dostaneme základní goniometrickou rovnici

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}.$$

Po určení vyhovujících čísel  $x$  a dosazení příslušných hodnot  $\cos x$ , které jsou zřejmě tvaru

$$\cos x = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \neq 0,$$

do druhé rovnice původní soustavy dostaneme základní rovnici

$$\cos y = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

k určení druhé neznámé  $y$ . Zároveň vidíme, že v případě  $b \neq 0$  má zadaná soustava řešení, právě když  $a^2 + b^2 \leq 1$ .

V případě  $b = 0$  je druhá rovnice soustavy splněna, právě když  $\cos x = 0$  nebo  $\cos y = 0$ . Je-li  $\cos x = 0$ , určíme odtud neznámou  $x$  a po dosazení hodnoty  $\sin x = \pm 1$  do první rovnice dostaneme rovnici  $\cos y = \pm a$  k určení hodnoty  $y$ . Je-li naopak  $\cos y = 0$ , musí být  $a = 0$ , jinak první rovnici soustavy nelze splnit, v kladném případě ( $a = 0$ ) je pak hodnota  $x$  libovolná.

Podobným způsobem můžeme řešit i soustavu rovnic

$$\sin x \cos y = a, \quad \sin x \sin y = b.$$

■ **Příklad 4.5.9.** Řešte soustavu rovnic

$$\sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b.$$

*Řešení:* Po známém převodu součtů na součiny dostaneme soustavu rovnic

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2}, \quad \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2},$$

která po substituci  $u = \frac{1}{2}(x+y)$ ,  $v = \frac{1}{2}(x-y)$  přejde v soustavu řešenou v příkladě 4.5.8.

Uvedený postup lze využít i pro řešení soustav

$$\sin x \pm \sin y = a, \quad \cos x \pm \cos y = b$$

s ostatními třemi variantami znamének v obou rovnicích.

■ **Příklad 4.5.10.** Řešte soustavu rovnic

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = b.$$

*Řešení:* Substitucí  $u = \operatorname{tg} x$ ,  $v = \operatorname{tg} y$  dostaneme algebraickou soustavu rovnic

$$u + v = a, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = b,$$

kteřou v případě  $b \neq 0$  snadno vyřešíme na základě implikace

$$b = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{a}{uv} \Rightarrow uv = \frac{a}{b}$$

(je-li  $b = 0$ , musí být i  $a = 0$ , jinak soustava nemá řešení). Odtud totiž plyne, že neznámé  $u, v$  tvoří dvojici kořenů  $t_{1,2}$  kvadratické rovnice

$$t^2 - at + \frac{a}{b} = 0.$$

Po jejich výpočtu (podmínku existence vypisovat nebudeme) pak zbývá vyřešit dvojici základních rovnic  $\operatorname{tg} x = t_1, \operatorname{tg} y = t_2$  (s ohledem na symetrii jsme zapsali pouze jednu z obou soustav). ■

Závěrečnou trojici příkladů budou tvořit soustavy se společnou geometrickou motivací, kterou je úloha určit vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  všech těchto trojúhelníků, pro něž jsou hodnoty  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$  s danou goniometrickou funkcí  $f$  v daném postupném poměru  $p : q : r$ . Tato podmínka

$$f(\alpha) : f(\beta) : f(\gamma) = p : q : r$$

s danými parametry  $p, q, r \in \mathbb{R}$  vlastně představuje dvojici rovnic pro tři neznámé  $\alpha, \beta, \gamma$ ; potřebnou třetí rovnici je základní vztah  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . V zadání příkladů nebudeme uvádět podmínku, že parametry  $p, q, r$  jsou různé od nuly. Je-li totiž například  $p = 0$ , vede základní rovnice  $f(\alpha) = 0$  přímo k určení hodnoty  $\alpha$ ; pro zbylé neznámé  $\beta, \gamma$  pak dostáváme soustavu, kterou jsme se už zabývali dříve.

Pro funkci  $f(x) = \sin x$  má popsaná úloha zřejmou souvislost se sinovou větou pro obecný trojúhelník. Uvedeme ji jako první v pořadí, závěr řešení nás díky zmíněné souvislosti patrně nepřekvapí.

■ **Příklad 4.5.11.** Řešte soustavu rovnic<sup>18</sup>

$$\sin x : \sin y : \sin z = p : q : r, \quad x + y + z = \pi.$$

*Řešení:* První rovnice soustavy bude splněna, právě když pro vhodné reálné číslo  $t \neq 0$  bude platit

$$\sin x = pt, \quad \sin y = qt, \quad \sin z = rt. \quad (4.24)$$

Z druhé rovnice soustavy odvodíme tři analogické důsledky, první z nich takto:

$$\sin x = \sin(\pi - y - z) = \sin(y + z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z = rt \cos y + qt \cos z.$$

Po dosazení do rovnosti  $\sin x = pt$  a zkrácení číslem  $t$  dostaneme první ze tří rovností

$$p = r \cos y + q \cos z, \quad q = r \cos x + p \cos z, \quad r = q \cos x + p \cos y, \quad (4.25)$$

zbylé dvě rovnosti se odvodí analogicky. Získali jsme soustavu tří lineárních rovnic pro neznámé  $\cos x, \cos y, \cos z$ , která má, jak se snadno ověří, jediné řešení

$$\cos x = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}, \quad \cos y = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr}, \quad \cos z = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq}. \quad (4.26)$$

<sup>18</sup>[34], úloha 63, str. 44. V řešení na str. 202-203 jsou pouze odvozeny základní rovnice pro  $\cos x, \cos y, \cos z$ . Náš výklad doplníme o další úvahy, neboť uvedený postup řešení je založen na důsledkových úpravách takového druhu, že je principiálně nelze „obrátit“.

To jsou základní goniometrické rovnice k určení neznámých  $x, y, z$  (které ne náhodou připomínají rovnosti z kosinové věty). Splňují všechny trojice  $x, y, z$  vyhovující těmto třem základním rovnicím zadanou podmínku pro poměr  $\sin x : \sin y : \sin z$ ? Všimněme si, že z rovnice pro  $\cos x$  plyne

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}\right)^2} = \frac{\sqrt{c}}{2|qr|},$$

kde  $c = \sqrt{2(pq + pr + qr) - (p^2 + q^2 + r^2)}$ , podobně se stejnou konstantou  $c$  platí

$$|\sin y| = \frac{\sqrt{c}}{2|pr|} \quad \text{a} \quad |\sin z| = \frac{\sqrt{c}}{2|pq|}.$$

Musí tedy být  $c > 0$ , tehdy z odvozených vyjádření dostáváme

$$|\sin x| : |\sin y| : |\sin z| = \frac{\sqrt{c}}{2|qr|} : \frac{\sqrt{c}}{2|pr|} : \frac{\sqrt{c}}{2|pq|} = |p| : |q| : |r|.$$

Odtud určíme pro hodnoty  $\sin x, \sin y, \sin z$ , jejichž absolutní hodnoty již známe, správné kombinace znamének, aby byla splněna první rovnice ze zadání příkladu. Pak podle dvojic hodnot kosinu a sinu neznámých  $x, y, z$  najdeme číslo  $x_0, y_0, z_0 \in (0, 2\pi)$  tak, že bude platit

$$x = x_0 + 2k\pi, \quad y = y_0 + 2l\pi, \quad z = z_0 + 2m\pi \quad (4.27)$$

pro vhodná  $k, l, m \in \mathbb{Z}$ . Je však vždy možné zajistit vhodnou vazbou mezi čísly  $k, l, m$ , aby byla splněna i druhá zadaná rovnice  $x + y + z = \pi$ ? Ani tato otázka ještě není triviální, a proto kladnou odpověď na ni zdůvodníme. Víme, že hodnoty  $x, y, z$  tvaru (4.27) s parametry  $k = l = m = 0$  splňují soustavu rovnic (4.25) a že pro ně platí i rovnosti (4.24) s vhodným  $t \neq 0$ . Odtud dostáváme

$$\sin x = pt = (r \cos y + q \cos z)t = rt \cos y + qt \cos z = \sin z \cos y + \sin y \cos z = \sin(y + z).$$

Analogicky se odvodí i další dvě z rovností

$$\sin x = \sin(y + z), \quad \sin y = \sin(x + z), \quad \sin z = \sin(x + y).$$

Podle známého průběhu funkce sinus to už znamená, že součet  $x + y + z$  je pro vhodné  $n \in \mathbb{N}$  tvaru (využijme toho, že  $k = l = m = 0$ )

$$x_0 + y_0 + z_0 = \pi + 2n\pi, \quad (4.28)$$

neboť v opačném případě by musela být celá všechna tři čísla

$$\frac{x_0 - y_0 - z_0}{2\pi}, \quad \frac{y_0 - x_0 - z_0}{2\pi}, \quad \frac{z_0 - x_0 - y_0}{2\pi},$$

takže by bylo celé i například číslo

$$\frac{x_0 - y_0 - z_0}{2\pi} - \frac{z_0 - x_0 - y_0}{2\pi} = \frac{x}{\pi},$$

což odporuje tomu, že  $\sin x_0 \neq 0$ . Proto je výběr trojic  $k, l, m$  v (4.27) vždy možný a je dán jediným omezením

$$k + l + m = -n,$$

kde  $n$  je celé číslo z (4.28), jehož existenci jsme právě zdůvodnili.

Dodejme na úplný závěr, že zadaná soustava rovnic má řešení pro právě ty trojice nenulových parametrů  $p, q$  a  $r$ , pro které jsou absolutní hodnoty všech tří zlomků v (4.26) menší než 1. Z našich následných úvah však plyne, že tuto poměrně málo přehlednou podmínku lze jednodušeji vyjádřit pomocí zavedené konstanty  $c$  ve tvaru  $c > 0$  neboli

$$2(pq + pr + qr) > p^2 + q^2 + r^2.$$

V případě kladných čísel  $p, q, r$  jsme tak netradiční cestou odvodili známou podmínku ekvivalentní s trojúhelníkovými nerovnostmi<sup>19</sup>

$$|q - r| < p < q + r.$$

■ **Příklad 4.5.12.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = p : q : r, \quad x + y + z = \pi.}$$

*Řešení:* Označme  $t$  nenulový koeficient, při kterém má platit

$$\operatorname{tg} x = pt, \quad \operatorname{tg} y = qt, \quad \operatorname{tg} z = rt. \quad (4.29)$$

Z druhé rovnice soustavy plyne

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(\pi - x - y) = -\operatorname{tg}(x + y) = -\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

takže musí být  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 1$  a po vynásobení krajních členů předchozího odvození a snadné úpravě dostaneme symetrický vztah<sup>20</sup>

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z. \quad (4.30)$$

Obráceným postupem z (4.30) dostaneme  $\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}(x + y) = 0$ , což znamená, že  $x + y + z = n\pi$  pro vhodné  $n \in \mathbb{Z}$ . Proto místo původní soustavy můžeme řešit soustavu rovnic (4.29) a (4.30); poté pak bude možné přičíst k číslům  $x, y, z$  z vyhovujících trojic takové násobky periody  $\pi$ , aby byla splněna i původní rovnice  $x + y + z = \pi$ .

Dosazením z (4.29) do (4.30) dostaneme po vydělení číslem  $t$  rovnici

$$p + q + r = pqr t^2 \quad \text{neboli} \quad t^2 = \frac{p + q + r}{pqr}$$

(připomínáme obecný předpoklad  $pqr \neq 0$ ). Vyhovující  $t \neq 0$  proto existuje, právě když je  $p + q + r$  nenulové číslo téhož znaménka jako  $pqr$ . Po dosazení každého z obou kořenů

$$t_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p + q + r}{pqr}}$$

do (4.29) dostaneme vždy trojici základních rovnic s funkcí tangens k určení hodnot  $x, y, z$ . Protože obor hodnot  $\operatorname{tg} x$  je celé  $\mathbb{R}$ , žádné další podmínky existence řešení kromě

$$pqr \cdot (p + q + r) > 0$$

zadaná soustava rovnic nemá.

---

<sup>19</sup>[12], str. 111.

<sup>20</sup>O jeho zobecnění pojednáme v příkladu 4.6.4.

■ **Příklad 4.5.13.** Řešte soustavu rovnic<sup>21</sup>

$$\cos x : \cos y : \cos z = p : q : r, \quad x + y + z = \pi.$$

*Řešení:* První rovnice soustavy bude splněna, právě když pro vhodné  $t \neq 0$  bude platit

$$\cos x = pt, \quad \cos y = qt, \quad \cos z = rt. \quad (4.31)$$

K určení neznámé hodnoty  $t$  budeme muset nahradit druhou rovnicí soustavy rovnicí pro hodnoty  $\cos x, \cos y, \cos z$ , podobně jako jsme v řešení předchozího příkladu nahradili stejnou rovnicí  $x + y + z = \pi$  rovnicí pro hodnoty  $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y, \operatorname{tg} z$ . Tentokrát bude takovou náhradnicí poněkud složitější rovnice

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z = 1, \quad (4.32)$$

kteřá je (jak víme z podkapitoly 3.4) zaručeně splněna v případě, kdy  $x, y, z$  jsou vnitřní úhly libovolného trojúhelníku. V úvodní části podkapitoly 5.1 ukážeme, že rovnost (4.32) platí i v obecnější situaci, kdy je splněna podmínka  $\cos z = -\cos(x + y)$ . Příslušné odvození však není možné přímo obrátit, a tak není jasné, zda je podmínka  $\cos z = -\cos(x + y)$  ke splnění (4.32) nejen postačující, nýbrž i nutná. Rozhodneme o tom tak, že položíme  $c = \cos z$  a přepíšeme rovnost (4.32) jako kvadratickou rovnici

$$c^2 + 2 \cos x \cos y \cdot c + \cos^2 x + \cos^2 y - 1 = 0,$$

jejíž jeden kořen je, jak víme,  $c_1 = -\cos(x + y)$ . Druhý kořen  $c_2$  proto snadno určíme z Vietova vzorce pro součet kořenů

$$c_1 + c_2 = -2 \cos x \cos y.$$

Po dosazení  $c_1$  a snadné úpravě dostaneme

$$c_2 = -2 \cos x \cos y - c_1 = -2 \cos x \cos y + \cos(x + y) = -\cos(x - y).$$

Vidíme tedy, že rovnice (4.32) je splněna v právě dvou případech

$$\cos z = -\cos(x + y), \quad \text{resp.} \quad \cos z = -\cos(x - y).$$

Podle známého průběhu funkce kosinus tyto dvě možnosti znamenají právě to, že existuje číslo  $n \in \mathbb{N}$  s vlastností, že při vhodném výběru znamének platí

$$\pm x \pm y \pm z = \pi + 2n\pi. \quad (4.33)$$

Našli jsme tak všechna řešení rovnice (4.32). Protože v ní vystupují pouze hodnoty funkce kosinus, která je sudá, může u vyhovujících čísel  $x, y, z$  změnit podle (4.33) znaménka a pak k nim přičíst vhodné násobky periody  $2\pi$  tak, aby byla splněna rovnost  $x + y + z = \pi$  požadovaná zadáním příkladu. Ukázali jsme, že takové trojice  $x, y, z$  tedy existují pro každou trojici kosinů splňujících rovnici (4.32). Proto se dále budeme zabývat již jen řešením soustavy rovnic (4.31) a (4.32) pro neznámé hodnoty  $\cos x, \cos y, \cos z$ , tedy pro neznámou  $t$  z jejich vyjádření (4.31).

Dosazením  $z$  (4.31) do (4.32) dostaneme kubickou rovnici

$$2pqr t^3 + (p^2 + q^2 + r^2)t^2 - 1 = 0.$$

<sup>21</sup>Náročnější postup řešení je pravděpodobnou příčinou toho, proč jsme tuto zajímavou soustavu v literatuře nenašli. Využijeme při něm i *komplexní čísla*, o kterých pojednáme v podkapitole 6.2.

S ohledem na obor hodnot  $\langle -1, 1 \rangle$  funkce kosinus nás budou po vyřešení získané rovnice zajímat právě ty její kořeny, které splňují podmínku

$$\max\{|pt|, |qt|, |rt|\} \leq 1. \quad (4.34)$$

Pro lepší přehlednost postupu řešení učiníme úmluvu, že zadaná nenulová čísla  $p, q, r$  z postupného poměru  $p : q : r$  jsou „normována“ tak, že platí

$$pqr = 1. \quad (4.35)$$

Kromě toho zavedeme nový parametr  $s$  předpisem

$$s = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{3}, \quad (4.36)$$

abychom řešenou kubickou rovnicí mohli přepsat do výhodného tvaru

$$t^3 + \frac{3s}{2}t^2 - \frac{1}{2} = 0. \quad (4.37)$$

Podle (4.35) a (4.36) splňuje parametr  $s$  díky nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel  $p^2, q^2, r^2$  odhad

$$s = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{3} \geq \sqrt[3]{p^2 q^2 r^2} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Rovnici (4.37) bude účelné vyřešit v případech  $s = 1$ , resp.  $s > 1$  odděleně. V prvním z nich platí  $|p| = |q| = |r| = 1$  a mnohočlen v (4.37) má snadno objavitelný rozklad

$$t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} = (t+1)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Vyhovují tedy hodnoty  $t = -1$  a  $t = \frac{1}{2}$ , takže v případě  $p, q, r \in \{-1, 1\}$  za podmínky  $pqr = 1$  jsou všechna řešení původní soustavy určena základními rovnicemi

$$(\cos x, \cos y, \cos z) = (-p, -q, -r), \quad \text{resp.} \quad (\cos x, \cos y, \cos z) = \left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{r}{2}\right)$$

(podmínky (4.34) jsou zřejmě splněny).

Zabýváme se až do konce řešení případem  $s > 1$ . Pověsimně si především, že mnohočlen

$$F(t) = t^3 + \frac{3s}{2}t^2 - \frac{1}{2} \quad (4.38)$$

má v jistých čtyřech významných bodech hodnoty

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{3s}{2}\right) &= \frac{-27s^3}{8} + \frac{27s^3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0, & F(-s) &= -s^3 + \frac{3s^3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{s^3 - 1}{2} > 0, \\ F(0) &= -\frac{1}{2} < 0, & F\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{s^3}{8} + \frac{3s^3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{s^3 - 1}{2} > 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Proto na každém ze tří otevřených intervalů  $\left(-\frac{3s}{2}, -s\right)$ ,  $(-s, 0)$  a  $\left(0, \frac{s}{2}\right)$  bude mít kubická rovnice (4.37) jeden reálný kořen. Vypočteme je nyní užitím Cardanovy metody. Nejprve tedy zavedeme substituci

$$t = u - \frac{s}{2}, \quad (4.40)$$



abychom pro novou neznámou  $u$  dostali kubickou rovnici s nulovým koeficientem u členu  $u^2$ :

$$\begin{aligned}\left(u - \frac{s}{2}\right)^3 + \frac{3s}{2}\left(u - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} &= 0, \\ u^3 - \frac{3s^2}{4} \cdot u + \frac{s^3}{4} - \frac{1}{2} &= 0.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Nyní uplatníme hlavní obrat Cardanovy metody: řešení poslední rovnice budeme hledat ve tvaru  $u = u_1 + u_2$ , kde  $u_1$  a  $u_2$  je dvojice čísel, jež bude řešením vhodné soustavy rovnic, kterou za okamžik sestavíme. (Jak se ukáže, čísla  $u_1, u_2$  nebudou *reálná*, nýbrž *imaginární* – přesněji *komplexně sdružená*.) Dosadíme-li vyjádření

$$u = u_1 + u_2, \quad u^3 = u_1^3 + u_2^3 + 3u_1u_2(u_1 + u_2)$$

do rovnice (4.41), dostaneme po snadné úpravě rovnici

$$u_1^3 + u_2^3 + 3(u_1 + u_2)\left(u_1u_2 - \frac{s^2}{4}\right) + \frac{s^3}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$

Ta bude splněna, budou-li čísla  $u_1, u_2$  řešením soustavy rovnic

$$u_1u_2 = \frac{s^2}{4}, \quad u_1^3 + u_2^3 = \frac{1}{2} - \frac{s^3}{4}.\tag{4.42}$$

Čísla  $u_1^3$  a  $u_2^3$  tak mají předepsaný nejen součet, ale i součin – ten se rovná třetí mocnině hodnoty  $\frac{s^2}{4}$ . Proto je určíme jako kořeny  $v_{1,2}$  nové kvadratické rovnice

$$v^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{s^3}{4}\right)v + \left(\frac{s^2}{4}\right)^3 = 0.$$

Její diskriminant  $D$  má hodnotu

$$D = \left(\frac{1}{2} - \frac{s^3}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{s^6}{4^3} = \frac{s^6}{4^2} - \frac{s^3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{s^6}{4^2} = \frac{1 - s^3}{4},$$

což je záporné číslo, neboť  $s > 1$ . Kořeny  $v_{1,2}$  jsou proto komplexně sdružená čísla

$$v_{1,2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{s^3}{4}\right) \pm \frac{i}{2} \cdot \sqrt{s^3 - 1}}{2} = \frac{1}{2^3} \cdot (2 - s^3 \pm 2i\sqrt{s^3 - 1}).$$

K určení čísel  $u_1, u_2$  z rovností  $u_1^3 = v_1$  a  $u_2^3 = v_2$  budeme muset vypočítat třetí odmocniny z čísel  $v_1, v_2$  (a pak vybrat tyto nejednoznačné hodnoty tak, aby byla splněna první rovnice z (4.42), kterou jsme v dalším postupu umocnili na třetí). Nejprve proto najdeme goniometrický tvar komplexních čísel  $v_{1,2}$ . Pro jejich absolutní hodnotu platí

$$|v_{1,2}| = \frac{1}{2^3} \cdot \left|2 - s^3 \pm 2i\sqrt{s^3 - 1}\right| = \frac{1}{2^3} \sqrt{(2 - s^3)^2 + 4(s^3 - 1)} = \frac{\sqrt{s^6}}{2^3} = \left(\frac{s}{2}\right)^3.$$

Zavedeme-li proto úhel  $\omega \in (0, \pi)$  rovností

$$\cos \omega = \frac{2 - s^3}{s^3} = \frac{2}{s^3} - 1\tag{4.43}$$

(poslední výraz má hodnotu v intervalu  $(-1, 1)$ , neboť  $s > 1$ ), bude platit

$$v_{1,2} = \left(\frac{s}{2}\right)^3 (\cos \omega \pm i \sin \omega),$$

takže soustavu rovnic (4.42) splňují tři dvojice komplexně sdružených čísel

$$u_{1,2} = \frac{s}{2} \cdot \left( \cos \frac{\omega + 2k\pi}{3} \pm i \sin \frac{\omega + 2k\pi}{3} \right),$$

kde  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Kubická rovnice (4.41) má tedy tři reálné kořeny

$$u = u_1 + u_2 = s \cdot \cos \frac{\omega + 2k\pi}{3}, \quad \text{kde } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Po dosazení do (4.40) tak dostaneme tři kořeny původní rovnice (4.37). Označíme je

$$t_1 = \frac{s}{2} \left( 2 \cos \frac{\omega}{3} - 1 \right), \quad t_2 = \frac{s}{2} \left( 2 \cos \frac{\omega + 2\pi}{3} - 1 \right), \quad t_3 = \frac{s}{2} \left( 2 \cos \frac{\omega + 4\pi}{3} - 1 \right). \quad (4.44)$$

Celý výpočet pro případ  $s > 1$  je u konce. Hodnoty  $\cos x, \cos y, \cos z$  každého řešení soustavy ze zadání příkladu jsou dány rovnostmi (4.31), do nichž dosadíme za  $t$  libovolné z čísel  $t_1, t_2, t_3$  ze vztahů (4.44), jež splňuje omezení (4.34).

Ukažme ještě, že diskusi o splnění podmínek (4.34) lze podat přehledně i v obecném případě  $s > 1$ , bez ohledu na poměrně složitá vyjádření (4.44) přesných hodnot  $t_1, t_2, t_3$ . Všimněme si, že z nerovností  $0 < \omega < \pi$  plyne

$$\frac{1}{2} < \cos \frac{\omega}{3} < 1, \quad -1 < \cos \frac{\omega + 2\pi}{3} < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \cos \frac{\omega + 4\pi}{3} < \frac{1}{2},$$

takže pro kořeny z (4.44) dostáváme odhady

$$0 < t_1 < \frac{s}{2}, \quad -\frac{3}{2}s < t_2 < -s, \quad -s < t_3 < 0,$$

jež odpovídají intervalům, které jsme dříve stanovili na základě nerovností (4.39). Odtud je jasné, že kořen  $t_2$  musíme z řešení naší úlohy vždy vyloučit, neboť z předpokladu  $s > 1$  zřejmě plyne

$$|t_2| > 1 \quad \text{a} \quad \max\{|p|, |q|, |r|\} > 1$$

(připomínáme definici (4.36) parametru  $s$ ), a proto podmínka (4.34) pro  $t = t_2$  neplatí. Ve zbylé části naší diskuse ukážeme, že pro každé  $s > 1$  je podmínka (4.34) splněna jak pro  $t = t_1$ , tak pro  $t = t_3$ , že tedy oba kořeny  $t_1$  a  $t_3$  vždy generují řešení naší úlohy.

Parametry  $p, q, r$  bude nyní výhodné uspořádat tak, aby platilo  $|p| \geq |q| \geq |r| > 0$ . Pak totiž splnění podmínky (4.34) pro kladné  $t = t_1$ , resp. záporné  $t = t_3$  lze vyjádřit jedinou nerovností

$$t_1 \leq \frac{1}{|p|}, \quad \text{resp.} \quad t_3 \geq -\frac{1}{|p|}. \quad (4.45)$$

Vzpomeneme-li si, že  $t_1 \in (0, \frac{s}{2})$  a  $t_3 \in (-s, 0)$  jsou kořeny mnohočlenu  $F$  z (4.38), který má v krajních bodech uvedených intervalů hodnoty (4.39), dojdeme k závěru, že nerovnosti (4.45) budou splněny, právě když bude platit

$$F\left(\frac{1}{|p|}\right) \geq 0, \quad \text{resp.} \quad F\left(-\frac{1}{|p|}\right) \geq 0.$$

Ověřit poslední dvě nerovnosti je snadné:

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{1}{|p|}\right) &= \frac{1}{|p|^3} + \frac{3s}{2} \frac{1}{|p|^2} - \frac{1}{2} = \frac{2 + 3s|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \frac{2 + (p^2 + q^2 + r^2)|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \\
 &= \frac{2 + (q^2 + r^2)|p|}{2|p|^3} > 0, \\
 F\left(-\frac{1}{|p|}\right) &= -\frac{1}{|p|^3} + \frac{3s}{2} \frac{1}{|p|^2} - \frac{1}{2} = \frac{-2 + 3s|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \frac{-2|pqr| + (p^2 + q^2 + r^2)|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \\
 &= \frac{q^2 + r^2 - 2|qr|}{2|p|^2} = \frac{(|q| - |r|)^2}{2|p|^2} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Shrňme v úplném závěru výsledek diskuse případu  $s > 1$ : zatímco kořen  $t_2$  žádná řešení původní goniometrické soustavy negeneruje, každý z kořenů  $t_1, t_3$  taková řešení přináší.

Ilustrujme nyní numericky výše uvedené řešení výpočtem pro konkrétní hodnoty  $p = 4, q = 2, r = 1$ . Pro lepší přehlednost uvedeme tuto numerickou ukázkou jako samostatný příklad.

■ **Příklad 4.5.14.** Řešte soustavu rovnic  $\cos x : \cos y : \cos z = 4 : 2 : 1$ ,  $x + y + z = \pi$ .

*Řešení:* Zadané hodnoty  $p = 4, q = 2, r = 1$  nespĺňují podmínku  $pqr = 1$  potřebnou k postupu výpočtu podle předchozího řešení, proto je zaměníme úměrnými hodnotami

$$p' = \frac{p}{\sqrt[3]{pqr}} = 2, \quad q' = \frac{q}{\sqrt[3]{pqr}} = 1, \quad r' = \frac{r}{\sqrt[3]{pqr}} = \frac{1}{2}.$$

Další kroky postupu byly detailně popsány v 4.5.13, proto je nyní uvedeme bez komentáře.

- $\cos x = 2 \cdot t, \cos y = 1 \cdot t, \cos z = \frac{1}{2} \cdot t$  pro vhodné  $t \in \mathbb{R}$ ,
- $s = \frac{2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} = \frac{7}{4}$ ,
- $t^3 + \frac{21}{8}t^2 - \frac{1}{2} = 0$ ,
- $t = u - \frac{7}{8} \Rightarrow u^3 - 3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot u + 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0$ ,
- $u = u_1 + u_2$ , kde  $u_1 u_2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2, u_1^3 + u_2^3 = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3$ ,
- $v_{1,2} = u_{1,2}^3$ , kde  $v^2 - \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3\right)v + \left(\frac{7}{8}\right)^6 = 0$ ,
- $v_{1,2} = -\frac{215}{512} \pm i \cdot \frac{\sqrt{279}}{32}, |v_{1,2}| = \frac{343}{512} = \left(\frac{7}{8}\right)^3$ ,
- $\cos \omega = -\frac{215}{343}$  pro  $\omega = 128,8160543\dots^\circ$ ,
- $u_{1,2} = \frac{7}{8} \cdot \left(\cos \frac{\omega + 2k \cdot 180^\circ}{3} \pm i \sin \frac{\omega + 2k \cdot 180^\circ}{3}\right)$ ,
- $u = u_1 + u_2 = \frac{7}{4} \cdot \cos \frac{\omega + 2k \cdot 180^\circ}{3}$ ,

- $t_1 = \frac{7}{4} \cdot \cos \frac{\omega}{3} - \frac{7}{8} = 0,406\,145\,469\dots,$
- $t_2 = \frac{7}{4} \cdot \cos \frac{\omega + 360^\circ}{3} - \frac{7}{8} = -2,547\,984\,821\dots,$
- $t_3 = \frac{7}{4} \cdot \cos \frac{\omega + 720^\circ}{3} - \frac{7}{8} = -0,483\,160\,648\dots,$

- $(\cos x, \cos y, \cos z) = \left( 2t_1, t_1, \frac{1}{2}t_1 \right),$

$$\arccos 2t_1 = 35,679\,630\,01\dots^\circ, \arccos t_1 = 66,037\,071\,94\dots^\circ, \arccos \frac{1}{2}t_1 = 78,283\,298\,03\dots^\circ,$$

1. skupina řešení:

$$(x, y, z) \doteq (35,7^\circ + l \cdot 360^\circ, 66,0^\circ + m \cdot 360^\circ, 78,3^\circ + n \cdot 360^\circ),$$

$$\text{kde } l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 0,$$

2. skupina řešení:

$$(x, y, z) \doteq (-35,7^\circ + l \cdot 360^\circ, -66,0^\circ + m \cdot 360^\circ, -78,3^\circ + n \cdot 360^\circ),$$

$$\text{kde } l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 1,$$

- $(\cos x, \cos y, \cos z) = \left( 2t_2, t_2, \frac{1}{2}t_2 \right),$

$$2t_2 \doteq -2,548 \notin H(\cos),$$

- $(\cos x, \cos y, \cos z) = \left( 2t_3, t_3, \frac{1}{2}t_3 \right),$

$$\arccos 2t_3 = 165,087\,797\,8\dots^\circ, \arccos t_3 = 118,892\,033\,2\dots^\circ, \arccos \frac{1}{2}t_3 = 103,979\,831\,1\dots^\circ,$$

3. skupina řešení:

$$(x, y, z) \doteq (165,1^\circ + l \cdot 360^\circ, 118,9^\circ + m \cdot 360^\circ, -104,0^\circ + n \cdot 360^\circ),$$

$$\text{kde } l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 0,$$

4. skupina řešení:

$$(x, y, z) \doteq (-165,1^\circ + l \cdot 360^\circ, -118,9^\circ + m \cdot 360^\circ, 104,0^\circ + n \cdot 360^\circ),$$

$$\text{kde } l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 1.$$

## 4.6 Goniometrické identity a rovnosti

V předchozích podkapitolách jsme po zavedení goniometrických funkcí v oboru  $\mathbb{R}$  uvedli a dokázali základní vzorce, které tyto funkce splňují a které by měl aktivně ovládat každý, kdo chce s goniometrickými funkcemi úspěšně pracovat při jejich nejrůznějších aplikacích.<sup>22</sup> V matematické literatuře najdeme ovšem značné množství dalších rovností pro goniometrické funkce s různě sestavenými argumenty zahrnujícími reálné proměnné, ve kterých tyto rovnosti zpravidla platí identicky, vždy když mají sestavené výrazy smysl. Říkejme jim proto *goniometrické identity*. Mnohé z nich byly v minulosti patrně odvozeny při řešení konkrétních problémů, ať už praktického či teoretického původu, a všechny potvrzují bohatost celé teorie goniometrických funkcí. Na hledání takových, mnohdy nečekaných a překvapivých souvislostí se zaměříme v příkladech závěrečné části 4.7 celé kapitoly. V této podkapitole 4.6 uvedeme formou řešených příkladů nejprve některé další významné

---

<sup>22</sup>V dále řešených příkladech budeme proto tyto základní vzorce uplatňovat bez odkazů, zejména při postupných úpravách výrazů.

goniometrické vzorce a identity s poměrně jednoduchými zápisy a zajímavou formou. Poté v dalších příkladech dokážeme řadu *číselných rovností*, které splňují hodnoty goniometrických funkcí v některých daných význačných úhlech. Tyto rovnosti jsou o to působivější, že zmíněné hodnoty jsou zpravidla iracionální čísla, která neumíme „rozumným“ způsobem vyjádřit, takže exaktní ověření takových rovností není možné provést prostým dosazením dotyčných hodnot (numerické výpočty s kalkulačkou nebo počítačem jistotu přesných rovností ovšem poskytnout nemohou). Goniometrické identity a rovnosti mezi *reálnými* výrazy, resp. čísly, které lze snadněji odvodit využitím algebry *komplexních* čísel, uvedeme až v části 6.2 poslední kapitoly.

■ **Příklad 4.6.1.** Dokažte vzorce pro funkce trojnásobného argumentu

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x, & \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \operatorname{tg} 3x &= \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}, & \operatorname{cotg} 3x &= \frac{\operatorname{cotg}^3 x - 3 \operatorname{cotg} x}{3 \operatorname{cotg}^2 x - 1}. \end{aligned}$$

První dva vzorce přitom platí pro každé  $x \in \mathbb{R}$ , třetí a čtvrtý za podmínky, kdy má smysl zlomek v jejich pravé straně.

*Řešení:*

- $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x =$   
 $= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x = 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x =$   
 $= 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$
- $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$   
 $= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x =$   
 $= 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$
- $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$
- $\operatorname{cotg} 3x = \operatorname{cotg}(2x + x) = \frac{\operatorname{cotg} 2x \operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cotg} 2x + \operatorname{cotg} x} = \frac{\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} \cdot \operatorname{cotg} x - 1}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} + \operatorname{cotg} x} = \frac{\frac{\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} x}{2 \operatorname{cotg} x}}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1 + 2 \operatorname{cotg}^2 x}{2 \operatorname{cotg} x}} =$   
 $= \frac{\operatorname{cotg}^3 x - 3 \operatorname{cotg} x}{3 \operatorname{cotg}^2 x - 1}.$

■ **Příklad 4.6.2.** Dokažte vzorce pro součiny hodnot tangens a kotangens

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}, \\ \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y &= \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} y &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y}, \end{aligned}$$

které platí pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$ , pro něž má příslušný zlomek v pravé straně vzorce smysl.

*Řešení:*

- $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y.$
- $\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}} = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}.$
- $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - y \right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - y \right)}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi}{2} - y \right)} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y}.$

■ **Příklad 4.6.3.** Dokažte vzorce pro součty hodnot tangens a kotangens

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, \\ \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y &= \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y &= \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}, \end{aligned}$$

kteří platí pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$ , pro něž mají oba sčítanci v příslušné levé straně vzorce smysl. (Zaměníme-li  $y$  za  $-y$ , dostaneme obdobné vzorce pro rozdíly hodnot tangens a kotangens.)

*Řešení:*

- $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}.$
- $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin y \cos x + \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \sin y}.$
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin x \sin y + \cos x \cos y}{\cos x \sin y} = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}.$

■ **Příklad 4.6.4.** Dokažte, že pro libovolná  $x, y, z \in \mathbb{R}$  platí

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}$$

za předpokladu, že  $\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \neq 0$ .<sup>23</sup>

*Řešení:* Podmínka  $\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \neq 0$  zaručuje, že všechny tři hodnoty  $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y, \operatorname{tg} z$  mají smysl. Pro jejich součet úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(x+y) \cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z} = \\ &= \frac{\sin(x+y) \cos z + \cos(x+y) \sin z - \cos(x+y) \sin z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z} = \\ &= \frac{\sin(x+y+z) + \sin z \cdot (\cos x \cos y - \cos(x+y))}{\cos x \cos y \cos z} = \\ &= \frac{\sin(x+y+z) + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z} = \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z} + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z. \end{aligned}$$

*Poznámka:* Identita z předchozího příkladu má důsledek týkající se zajímavé rovnosti

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z,$$

že totiž taková rovnost platí, právě když  $\sin(x+y+z) = 0$ ; splňují ji tedy například vnitřní úhly  $x, y, z$  libovolného nepravoúhlého trojúhelníku (neboť  $x+y+z = \pi$ ).

<sup>23</sup>[34], str. 20.

■ **Příklad 4.6.5.** Dokažte, že pro libovolná  $x, y \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= \cos^2 y - \cos^2 x = \sin^2 x - \sin^2 y, \\ \cos(x+y)\cos(x-y) &= \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.\end{aligned}$$

*Řešení:* Dokazovat budeme pouze identity z prvního řádku, neboť identity z druhého řádku z nich zřejmě plynou, když  $x$  zaměníme za  $\frac{\pi}{2} - x$ . Druhá rovnost v prvním řádku plyne z porovnání dvou goniometrických jedniček

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 y + \sin^2 y,$$

důkaz první rovnosti provedeme takto:

$$\begin{aligned}\cos^2 y - \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2y}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2} = \\ &= \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2} = \sin(x+y)\sin(x-y).\end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.6.** Pro libovolná  $x, y \in \mathbb{R}$  dokažte rovnosti:<sup>24</sup>

$$\begin{aligned}(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 &= 4 \cos^2 \frac{x-y}{2}, \\ (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 &= 4 \sin^2 \frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

*Řešení:*

- $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2 \sin x \sin y + \sin^2 y =$   
 $= 2 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 + 2 \cos(x-y) =$   
 $= 4 \cdot \frac{1 + \cos(x-y)}{2} = 4 \cos^2 \frac{x-y}{2}.$
- $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = \cos^2 x - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y =$   
 $= 2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 - 2 \cos(x-y) =$   
 $= 4 \cdot \frac{1 - \cos(x-y)}{2} = 4 \sin^2 \frac{x-y}{2}.$

■ **Příklad 4.6.7.** Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  označme

$$a = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad b = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

Vyjádřete  $b$  pomocí  $a$ .<sup>25</sup>

*Řešení:* Umocníme-li rovnost  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$  jednou na druhou, podruhé na třetí:

$$\begin{aligned}1^2 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x, \\ 1^3 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x,\end{aligned}$$

dostaneme po úpravě soustavu dvou rovnic

$$1 = a + 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad 1 = b + 3 \sin^2 x \cos^2 x \cdot \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1.$$

Odtud sčítací metodou vyloučíme  $\sin^2 x \cos^2 x$ , čímž získáme kýžené vyjádření:

$$1 = 3a - 2b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3a - 1}{2}.$$

<sup>24</sup>[34], str. 10.

<sup>25</sup>[29], str. 90–91.

■ **Příklad 4.6.8.** Dokažte, že hodnota výrazu

$$V(x) = \cos^2 x + \cos^2(a+x) - 2 \cos a \cos x \cos(a+x)$$

s parametrem  $a \in \mathbb{R}$  nezávisí na hodnotě proměnné  $x \in \mathbb{R}$ .<sup>26</sup>

*Řešení:* Protože  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ , volbou  $x = \frac{\pi}{2} - a$  dostaneme

$$V\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin^2 a.$$

Proto je naší úlohou dokázat identitu

$$\cos^2 x + \cos^2(a+x) - 2 \cos a \cos x \cos(a+x) = \sin^2 a.$$

Její levou stranu užitím vzorce  $2 \cos a \cos x = \cos(a+x) + \cos(a-x)$  upravíme takto:

$$\begin{aligned} & \cos^2 x + \cos^2(a+x) - (\cos^2(a+x) + \cos(a+x)\cos(a-x)) = \\ & = \cos^2 x - (\cos a \cos x - \sin a \sin x) \cdot (\cos a \cos x + \sin a \sin x) = \\ & = \cos^2 x - \cos^2 a \cos^2 x + \sin^2 a \sin^2 x = \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 a) + \sin^2 a \sin^2 x = \\ & = \cos^2 x \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) \sin^2 a = \sin^2 a. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.9.** Součet

$$S = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$

upravte na součin.<sup>27</sup>

*Řešení:* Využijeme důsledků vzorce pro součet dvou sinů

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) = 2 \sin \frac{x-z}{2} \cos \frac{x+z-2y}{2}$$

a vzorce pro sinus dvojnásobného argumentu

$$\sin(z-x) = 2 \sin \frac{z-x}{2} \cos \frac{z-x}{2}.$$

Pro zkoumaný součet  $S$  tak dostaneme:

$$\begin{aligned} S &= \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x) = 2 \sin \frac{x-z}{2} \left( \cos \frac{x+z-2y}{2} - \cos \frac{z-x}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{x-z}{2} \left( -2 \sin \frac{z-y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right) = -4 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{y-z}{2} \sin \frac{z-x}{2}. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.10.** Rozložte na součin výrazy

$$\begin{aligned} C &= \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z), \\ S &= \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) \end{aligned}$$

s libovolnými proměnnými  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .<sup>28</sup>

*Řešení:* Před vlastním odvozením si povšimněme jednoduchých situací, kdy jsou zkoumané výrazy

---

<sup>26</sup>[34], str. 11.

<sup>27</sup>[29], str. 94.

<sup>28</sup>[34], str. 20.



rovny nule. Rovnost  $C = 0$  zřejmě nastane, je-li jeden ze součtů  $x + y, x + z, y + z$  roven číslu  $\pi$  (plyne to ze vzorce  $\cos(\pi - t) = -\cos t$ ); bude-li jeden z těchto součtů roven nule, bude zase platit  $S = 0$  (neboť  $\sin(-t) = -\sin t$ ). Tato poznámka „ospravedlňuje“ volbu znaků  $\pm$  u posledního členu v definici výrazů  $C$  a  $S$ , aby byl možný jejich rozklad na součín.

$$\begin{aligned}
 \bullet C &= (\cos x + \cos y) + (\cos z + \cos(x + y + z)) = \\
 &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \cos \frac{x+y+2z}{2} \cos \frac{-x-y}{2} = \\
 &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \left( \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y+2z}{2} \right) = \\
 &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \left( 2 \cos \frac{x+z}{2} \cos \frac{-y-z}{2} \right) = 4 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{z+x}{2}. \\
 \bullet S &= (\sin x + \sin y) + (\sin z - \sin(x + y + z)) = \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \cos \frac{x+y+2z}{2} \sin \frac{-x-y}{2} = \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y+2z}{2} = \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \left( \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y+2z}{2} \right) = \\
 &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \left( -2 \sin \frac{x+z}{2} \sin \frac{-y-z}{2} \right) = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y+z}{2} \sin \frac{z+x}{2}.
 \end{aligned}$$

■

V několika dalších příkladech využijeme techniku tzv. *teleskopického sčítání*. Spočívá v tom, že sčítance zkoumaného součtu  $S$  upravíme do tvaru vhodných rozdílů, abychom získali vyjádření, které nyní poněkud neformálně zapíšeme jako

$$S = (a - b) + (b - c) + (c - d) + \dots + (y - z).$$

Odtud pak po zrušení dvojic navzájem opačných členů dostaneme výsledek ve tvaru  $S = a - z$ . Podobně probíhá i krácení dvojic shodných činitelů při teleskopickém násobení

$$P = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \dots \frac{y}{z} = \frac{a}{z},$$

které také později několikrát uplatníme. Před vlastními příklady uveďme tři jednoduché výsledky teleskopického sčítání, totiž goniometrické identity

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y \cos z} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z \cos x} &= 0, \\
 \sin x \sin(y-z) + \sin y \sin(z-x) + \sin z \sin(x-y) &= 0, \\
 \cos x \sin(y-z) + \cos y \sin(z-x) + \cos z \sin(x-y) &= 0.
 \end{aligned}$$

Sčítance na každé z levých stran lze zřejmě zapsat jako tři analogické rozdíly, které pro první sčítanec

mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} &= \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y, \\ \sin x \sin(y-z) &= \frac{\cos(x-y+z) - \cos(x+y-z)}{2}, \\ \cos x \sin(y-z) &= \frac{\sin(x+y-z) - \sin(x-y+z)}{2},\end{aligned}$$

takže po jejich sečtení vyjde ve všech třech případech skutečně nula.

■ **Příklad 4.6.11.** Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  dokažte vzorce

$$\begin{aligned}S_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \\ C_n &= \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

za předpokladu, že platí  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ .<sup>29</sup>

*Řešení:* Budeme upravovat výrazy  $\sin \frac{x}{2} \cdot S_n$  a  $\sin \frac{x}{2} \cdot C_n$ :

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} \cdot S_n &= \sin \frac{x}{2} \sin x + \sin \frac{x}{2} \sin 2x + \cdots + \sin \frac{x}{2} \sin nx = \\ &= \frac{\cos(\frac{x}{2} - x) - \cos(\frac{x}{2} + x)}{2} + \frac{\cos(\frac{x}{2} - 2x) - \cos(\frac{x}{2} + 2x)}{2} + \cdots + \frac{\cos(\frac{x}{2} - nx) - \cos(\frac{x}{2} + nx)}{2} = \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}}{2} + \frac{\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2}}{2} + \cdots + \frac{\cos \frac{(2n-1)x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2}.\end{aligned}$$

Po teleskopickém sečtení dostaneme

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} \cdot S_n &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( -2 \sin \frac{\frac{x}{2} + \frac{(2n+1)x}{2}}{2} \sin \frac{\frac{x}{2} - \frac{(2n+1)x}{2}}{2} \right) = \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} \cdot C_n &= \sin \frac{x}{2} \cos x + \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \cdots + \sin \frac{x}{2} \cos nx = \\ &= \frac{\sin(\frac{x}{2} + x) + \sin(\frac{x}{2} - x)}{2} + \frac{\sin(\frac{x}{2} + 2x) + \sin(\frac{x}{2} - 2x)}{2} + \cdots + \frac{\sin(\frac{x}{2} + nx) + \sin(\frac{x}{2} - nx)}{2} = \\ &= \frac{\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2} + \frac{\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2}}{2} + \frac{\sin \frac{7x}{2} - \sin \frac{5x}{2}}{2} + \cdots + \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{(2n-1)x}{2}}{2}.\end{aligned}$$

Podobně po úpravě a teleskopickém sečtení druhého výrazu dostaneme

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} \cdot C_n &= \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \cos \frac{\frac{(2n+1)x+x}{2}}{2} \sin \frac{\frac{(2n+1)x-x}{2}}{2} \right) = \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}.\end{aligned}$$

<sup>29</sup>V případě, kdy  $\sin \frac{x}{2} = 0$  neboli  $x = 2k\pi$  pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ , zřejmě platí  $S_n = 0$  a  $C_n = n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .

*Poznámka:* Vzorce z předchozího příkladu se často uvádějí v obecnější podobě

$$\begin{aligned}\sin a + \sin(a+x) + \dots + \sin(a+nx) &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \left(a + \frac{nx}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}, \\ \cos a + \cos(a+x) + \dots + \cos(a+nx) &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \left(a + \frac{nx}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

s libovolným parametrem  $a \in \mathbb{R}$ . My je můžeme získat z dokázaných vzorců pro  $a = 0$  díky zřejmým rovnostem

$$\begin{aligned}\sin a + \sin(a+x) + \dots + \sin(a+nx) &= \sin a \cdot (1 + C_n) + \cos a \cdot S_n, \\ \cos a + \cos(a+x) + \dots + \cos(a+nx) &= \cos a \cdot (1 + C_n) - \sin a \cdot S_n,\end{aligned}$$

do nichž stačí dosadit za  $S_n$  a  $C_n$ .

■ **Příklad 4.6.12.** Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  dokažte rovnost

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\cos^n x} = \cotg x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

za předpokladu, že platí  $\sin 2x \neq 0$ .<sup>30</sup>

*Řešení:* Úvodem si všimněme, že podmínka  $\sin 2x \neq 0$  znamená, že obě hodnoty  $\sin x, \cos x$  jsou nenulové. Ze součtového vzorce pro kosinus plyne

$$\sin kx \sin x = \cos kx \cos x - \cos(k+1)x,$$

kde  $k \in \mathbb{N}$  je libovolné. Když vydělíme obě strany rovnosti výrazem  $\sin x \cos^k x$ , obdržíme

$$\frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos kx}{\sin x \cos^{k-1} x} - \frac{\cos(k+1)x}{\sin x \cos^k x}.$$

Nyní již teleskopickým sečtením odvodíme zadanou rovnost:

$$\begin{aligned}& \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\cos^n x} = \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x \cos^2 x} + \dots + \frac{\cos nx}{\sin x \cos^{n-1} x} - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x} = \\ &= \cotg x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}.\end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.13.** Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  dokažte rovnost

$$\frac{1}{\cos x - \cos 3x} + \frac{1}{\cos x - \cos 5x} + \dots + \frac{1}{\cos x - \cos(2n+1)x} = \frac{\cotg x - \cotg(n+1)x}{2 \sin x}$$

za předpokladu, že  $\frac{x}{\pi}$  není celé číslo.<sup>31</sup>

*Řešení:* Budeme upravovat levou stranu rovnosti, a to tak, že jmenovatele zlomků nejdříve prepíšeme

<sup>30</sup>[31], str. 28.

<sup>31</sup>[31], str. 28.

podle vzorce pro rozdíl kosinů a následně každého sčítance vynásobíme zlomkem  $\frac{\sin x}{\sin x}$  rovným 1:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \sin 2x \sin x} + \frac{1}{2 \sin 3x \sin 2x} + \cdots + \frac{1}{2 \sin(n+1)x \sin nx} = \\ &= \frac{1}{2 \sin 2x \sin x} \cdot \frac{\sin(2x-x)}{\sin(2x-x)} + \frac{1}{2 \sin 3x \sin 2x} \cdot \frac{\sin(3x-2x)}{\sin(3x-2x)} + \cdots + \\ & \quad + \frac{1}{2 \sin(n+1)x \sin nx} \cdot \frac{\sin((n+1)x-nx)}{\sin((n+1)x-nx)} = \\ &= \frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{2 \sin 2x \sin x \sin x} + \frac{\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x}{2 \sin 3x \sin 2x \sin x} + \cdots + \\ & \quad + \frac{\sin(n+1)x \cos nx - \cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin(n+1)x \sin nx \sin x} = \\ &= \frac{\cotg x - \cotg 2x + \cotg 2x - \cotg 3x + \cdots + \cotg nx - \cotg(n+1)x}{2 \sin x} = \frac{\cotg x - \cotg(n+1)x}{2 \sin x}. \end{aligned}$$

Podmínka  $\frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$  neboli  $x \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) zaručuje, že všechny uvažované zlomky mají nenulové jmenovatele a náš výpočet tak je korektní.

■ **Příklad 4.6.14.** Dokažte, že pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  platí rovnost

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cotg x - \cotg 2^n x$$

za předpokladu, že všechny sčítance na levé straně mají smysl.<sup>32</sup>

*Řešení:* Jednotlivé sčítance nejdříve upravíme na vhodné rozdíly:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2x} &= \frac{2 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1)}{\sin 2x} = \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} - \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin 2x} = \cotg x - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \\ &= \cotg x - \cotg 2x, \\ \frac{1}{\sin 4x} &= \frac{2 \cos^2 2x - (2 \cos^2 2x - 1)}{\sin 4x} = \frac{2 \cos^2 2x}{2 \sin 2x \cos 2x} - \frac{2 \cos^2 2x - 1}{\sin 4x} = \cotg 2x - \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \\ &= \cotg 2x - \cotg 4x, \\ \frac{1}{\sin 8x} &= \cdots = \cotg 4x - \cotg 8x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nyní již teleskopickým sečtením dostaneme:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \\ &= \cotg x - \cotg 2x + \cotg 2x - \cotg 4x + \cdots + \cotg 2^{n-1}x - \cotg 2^n x = \cotg x - \cotg 2^n x. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.15.** Dokažte, že pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  platí rovnost

$$\left(1 - 2 \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 - 2 \cos \frac{x}{4}\right) \cdots \left(1 - 2 \cos \frac{x}{2^n}\right) = (-1)^n \cdot \frac{1 + 2 \cos \frac{x}{2^n}}{1 + 2 \cos \frac{x}{2}}$$

za předpokladu, že žádný činitel na levé straně není roven číslu 2.<sup>33</sup>

*Řešení:* Každý z činitelů  $1 - 2 \cos a$  upravíme na podíl rozšířením číslem  $1 + 2 \cos a$ :

$$1 - 2 \cos a = \frac{1 - 4 \cos^2 a}{1 + 2 \cos a} = \frac{1 - 2(1 + \cos 2a)}{1 + 2 \cos a} = -\frac{1 + 2 \cos 2a}{1 + 2 \cos a}.$$

<sup>32</sup>[31], str. 28.

<sup>33</sup>[31], str. 29.

Takové rozšíření je korektní úprava, pokud  $1 + 2 \cos a \neq 0$  neboli  $1 - 2 \cos a \neq 2$ . Díky předpokladu uvedenému v zadání úlohy můžeme tuto úpravu využít pro každý činitel:

$$\left(-\frac{1+2\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}}\right)\left(-\frac{1+2\cos\frac{x}{2}}{1+2\cos\frac{x}{4}}\right)\cdots\left(-\frac{1+2\cos\frac{x}{2^{n-2}}}{1+2\cos\frac{x}{2^{n-1}}}\right)\left(-\frac{1+2\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{1+2\cos\frac{x}{2^n}}\right)=(-1)^n\cdot\frac{1+2\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2^n}}.$$

■

V následujících třinácti příkladech dokážeme rozmanité číselné rovnosti, které splňují hodnoty goniometrických funkcí v některých daných význačných úhlech. Výjimkou bude první příklad o číselné rovnosti, kterou naopak splňují čtyři úhly s význačnými hodnotami tangens.

■ **Příklad 4.6.16.** Dokažte rovnost<sup>34</sup>

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

*Řešení:* Protože  $\operatorname{tg} 0 = 0$  a  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$  a funkce tangens je na  $(0, \frac{\pi}{2})$  rostoucí, každé z čísel

$$a = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \quad b = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}, \quad c = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}, \quad d = \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$$

leží v intervalu  $(0, \frac{\pi}{4})$ , takže platí

$$0 < a + b + c + d < 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Proto stačí dokázat rovnost  $\operatorname{tg}(a + b + c + d) = 1$ . Podle součtového vzorce pro tangens postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a + b) &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{4}{7}, & \operatorname{tg}(c + d) &= \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3}{11}, \\ \operatorname{tg}[(a + b) + (c + d)] &= \frac{\frac{4}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{11}} = 1. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.17.** Dokažte rovnost<sup>35</sup>

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}.$$

*Řešení:* Dokazovanou rovnost vynásobíme nenulovým číslem  $\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7}$ :

$$\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \left( \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} \right).$$

Jelikož  $\frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi$ , platí  $\sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7}$ . Máme tudíž dokázat rovnost

$$\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \left( \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right).$$

Výraz na pravé straně upravíme s využitím vzorce pro součet sinů a následně vzorce pro sinus dvojnásobného argumentu, až dostaneme výraz na levé straně:

$$\sin \frac{\pi}{7} \left( \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7} \cdot 2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7}.$$

<sup>34</sup>[34], str. 32.

<sup>35</sup>[29], str. 22.

■ **Příklad 4.6.18.** Dokažte rovnost<sup>36</sup>

$$(\operatorname{tg} 67^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 68^\circ - 1) = 2.$$

*Řešení:* Levou stranu rovnosti nejdříve přepíšeme pomocí funkcí sinus a kosinus, následně v úpravách využijeme vztah  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - 45^\circ)$  a konečně od sinů přejdeme ke kosinům:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} 67^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 68^\circ - 1) &= \left( \frac{\sin 67^\circ}{\cos 67^\circ} - 1 \right) \cdot \left( \frac{\sin 68^\circ}{\cos 68^\circ} - 1 \right) = \\ &= \left( \frac{\sin 67^\circ - \cos 67^\circ}{\cos 67^\circ} \right) \cdot \left( \frac{\sin 68^\circ - \cos 68^\circ}{\cos 68^\circ} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin 22^\circ}{\cos 67^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2} \sin 23^\circ}{\cos 68^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos 68^\circ}{\cos 67^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2} \cos 67^\circ}{\cos 68^\circ} = 2. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.19.** Dokažte rovnost<sup>37</sup>

$$(2 \cos 18^\circ - 1) \cdot (2 \cos 54^\circ - 1) = \operatorname{tg} 9^\circ.$$

*Řešení:* Díky vzorci  $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ , který použijeme pro  $x = 9^\circ$  a pro  $x = 27^\circ$ , přepíšeme dokazovanou rovnost do tvaru

$$(4 \cos^2 9^\circ - 3) \cdot (4 \cos^2 27^\circ - 3) = \operatorname{tg} 9^\circ$$

a následně při úpravách levé strany rovnosti využijeme vzorec  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  z příkladu 4.6.1 ve tvaru  $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 4 \cos^2 x - 3$ , opět s hodnotami  $x = 9^\circ$  a  $x = 27^\circ$ :

$$(4 \cos^2 9^\circ - 3) \cdot (4 \cos^2 27^\circ - 3) = \frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ} \cdot \frac{\cos 81^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} = \operatorname{tg} 9^\circ.$$

■ **Příklad 4.6.20.** Dokažte rovnost<sup>38</sup>

$$\left( \frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{7} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{3\pi}{7} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{9\pi}{7} \right) = -\frac{1}{8}.$$

*Řešení:* Vyjdeme ze vzorce  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  dokázaného v příkladu 4.6.1, který po vydělení výrazem  $-\cos x$  (za podmínky  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ) ještě dále upravíme do tvaru:

$$-\frac{\cos 3x}{\cos x} = 3 - 4 \cos^2 x = 1 - 2(2 \cos^2 x - 1) = 1 - 2 \cos 2x.$$

Jeho trojím užitím pro přípustné hodnoty  $x = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}$  dostaneme

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{7} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{3\pi}{7} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{9\pi}{7} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^3 \left( 1 - 2 \cos \frac{\pi}{7} \right) \cdot \left( 1 - 2 \cos \frac{3\pi}{7} \right) \cdot \left( 1 - 2 \cos \frac{9\pi}{7} \right) = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{\cos \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} \cdot \frac{\cos \frac{9\pi}{14}}{\cos \frac{3\pi}{14}} \cdot \frac{\cos \frac{27\pi}{14}}{\cos \frac{9\pi}{14}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\cos \frac{27\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

<sup>36</sup>[29], str. 87.

<sup>37</sup>[29], str. 95.

<sup>38</sup>[30], str. 244.

■ **Příklad 4.6.21.** Dokažte rovnost<sup>39</sup>

$$\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ.$$

*Řešení:* V důkazu použijeme vzorce pro tangens součtu a rozdílu dvou úhlů a identitu pro tangens trojnásobného argumentu, dokázanou v příkladu 4.6.1:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ &= 1 \cdot \operatorname{tg} (30^\circ + 5^\circ) \cdot \operatorname{tg} (30^\circ - 5^\circ) \cdot \operatorname{tg} (3 \cdot 5^\circ) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{3\operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg}^3 5^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{3\operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg}^3 5^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\ &= \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ}{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \operatorname{tg} 5^\circ. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.22.** Dokažte rovnost<sup>40</sup>

$$27 \sin^3 9^\circ + 9 \sin^3 27^\circ + 3 \sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = 20 \sin 9^\circ.$$

*Řešení:* Použijeme vzorec pro sinus trojnásobného argumentu  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  z příkladu 4.6.1, který přepíšeme do tvaru  $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$ :

$$\begin{aligned} &27 \sin^3 9^\circ + 9 \sin^3 27^\circ + 3 \sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = \\ &= 27 \cdot \frac{3 \sin 9^\circ - \sin 27^\circ}{4} + 9 \cdot \frac{3 \sin 27^\circ - \sin 81^\circ}{4} + 3 \cdot \frac{3 \sin 81^\circ - \sin 243^\circ}{4} + \frac{3 \sin 243^\circ - \sin 729^\circ}{4} = \\ &= \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 729^\circ}{4} = \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 9^\circ}{4} = 20 \sin 9^\circ. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.23.** Dokažte rovnost<sup>41</sup>

$$\frac{1}{\cotg 9^\circ - 3 \operatorname{tg} 9^\circ} + \frac{3}{\cotg 27^\circ - 3 \operatorname{tg} 27^\circ} + \frac{9}{\cotg 81^\circ - 3 \operatorname{tg} 81^\circ} + \frac{27}{\cotg 243^\circ - 3 \operatorname{tg} 243^\circ} = 10 \operatorname{tg} 9^\circ.$$

*Řešení:* Použijeme vzorec pro tangens trojnásobného argumentu  $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$  z příkladu 4.6.1, který nejdříve vynásobíme třemi a ještě upravíme na rozdíl:

$$3 \cdot \operatorname{tg} 3x = 3 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg}^3 x - 9 \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{tg}^2 x - 1} = \operatorname{tg} x - \frac{8 \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

Odtud dostaneme identitu

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{8},$$

<sup>39</sup>[40], str. 8.

<sup>40</sup>[30], str. 243.

<sup>41</sup>[30], str. 243.

kteřou využijeme na rozhodujícím místě následujících úprav levé strany dokazované rovnosti:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cotg 9^\circ - 3 \operatorname{tg} 9^\circ} + \frac{3}{\cotg 27^\circ - 3 \operatorname{tg} 27^\circ} + \frac{9}{\cotg 81^\circ - 3 \operatorname{tg} 81^\circ} + \frac{27}{\cotg 243^\circ - 3 \operatorname{tg} 243^\circ} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} 9^\circ} - 3 \operatorname{tg} 9^\circ} + \frac{3}{\frac{1}{\operatorname{tg} 27^\circ} - 3 \operatorname{tg} 27^\circ} + \frac{9}{\frac{1}{\operatorname{tg} 81^\circ} - 3 \operatorname{tg} 81^\circ} + \frac{27}{\frac{1}{\operatorname{tg} 243^\circ} - 3 \operatorname{tg} 243^\circ} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 9^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 9^\circ} + \frac{3 \operatorname{tg} 27^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 27^\circ} + \frac{9 \operatorname{tg} 81^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 81^\circ} + \frac{27 \operatorname{tg} 243^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 243^\circ} = \\ &= \frac{3 \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 9^\circ}{8} + 3 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ}{8} + 9 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} 243^\circ - \operatorname{tg} 81^\circ}{8} + 27 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} 729^\circ - \operatorname{tg} 243^\circ}{8} = \\ &= \frac{81 \operatorname{tg} 729^\circ - \operatorname{tg} 9^\circ}{8} = \frac{81 \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 9^\circ}{8} = 10 \operatorname{tg} 9^\circ. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.24.** Dokažte rovnost<sup>42</sup>

$$\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \cdots \left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right) = 1.$$

*Řešení:* V řešení využijeme vzorec pro rozdíl dvou kosinů  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ , rovnost  $2 \sin 30^\circ = 1$  a identitu  $\sin x = \cos(90^\circ - x)$  pro hodnoty  $x = 31^\circ, 32^\circ, \dots, 89^\circ$ :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \cdots \left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right) = \\ &= \frac{\cos 1^\circ - \cos 61^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\cos 2^\circ - \cos 62^\circ}{\cos 2^\circ} \cdots \frac{\cos 59^\circ - \cos 119^\circ}{\cos 59^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 31^\circ \sin 30^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{2 \sin 32^\circ \sin 30^\circ}{\cos 2^\circ} \cdots \frac{2 \sin 89^\circ \sin 30^\circ}{\cos 59^\circ} = \\ &= \frac{\cos(90^\circ - 31^\circ)}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\cos(90^\circ - 32^\circ)}{\cos 2^\circ} \cdots \frac{\cos(90^\circ - 89^\circ)}{\cos 59^\circ} = \frac{\cos 59^\circ \cos 58^\circ \cdots \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cdots \cos 59^\circ} = 1. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.25.** Dokažte rovnost<sup>43</sup>

$$(\operatorname{tg} 89^\circ - 1)(\operatorname{tg} 88^\circ - 1) \cdots (\operatorname{tg} 46^\circ - 1) = 2^{22}.$$

*Řešení:* Po úpravě každého činitele na jeden zlomek použijeme pro rozdíly v čitatelích zřejmou identitu  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - 45^\circ)$  a pak od hodnot kosinu přejdeme k hodnotám sinu:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{tg} 89^\circ - 1)(\operatorname{tg} 88^\circ - 1) \cdots (\operatorname{tg} 46^\circ - 1) = \\ &= \frac{\sin 89^\circ - \cos 89^\circ}{\cos 89^\circ} \cdot \frac{\sin 88^\circ - \cos 88^\circ}{\cos 88^\circ} \cdots \frac{\sin 46^\circ - \cos 46^\circ}{\cos 46^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin(89^\circ - 45^\circ)}{\cos 89^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2} \sin(88^\circ - 45^\circ)}{\cos 88^\circ} \cdots \frac{\sqrt{2} \sin(46^\circ - 45^\circ)}{\cos 46^\circ} = \\ &= (\sqrt{2})^{44} \cdot \frac{\sin 44^\circ \sin 43^\circ \cdots \sin 1^\circ}{\cos 89^\circ \cos 88^\circ \cdots \cos 46^\circ} = 2^{22} \cdot \frac{\sin 44^\circ \sin 43^\circ \cdots \sin 1^\circ}{\sin(90^\circ - 89^\circ) \sin(90^\circ - 88^\circ) \cdots \sin(90^\circ - 46^\circ)} = 2^{22}. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.26.** Dokažte rovnost<sup>44</sup>

$$(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 1^\circ)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 29^\circ) = 2^{29}.$$

<sup>42</sup>[30], str. 244.

<sup>43</sup>[30], str. 244.

<sup>44</sup>[30], str. 244.



*Řešení:* Při úpravě levé strany nejprve čísla  $\sqrt{3}$  nahradíme  $\operatorname{tg} 60^\circ$ , pak použijeme vzorec pro sinus součtu, rovnost  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  a nakonec hodnoty sinu zaměníme hodnotami kosinu:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 1^\circ)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 29^\circ) = \\ & = (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ)(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ) = \\ & = \left( \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \right) \left( \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \right) \cdots \left( \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \frac{\sin 29^\circ}{\cos 29^\circ} \right) = \\ & = \frac{\sin(60^\circ + 1^\circ)}{\cos 60^\circ \cos 1^\circ} \cdot \frac{\sin(60^\circ + 2^\circ)}{\cos 60^\circ \cos 2^\circ} \cdots \frac{\sin(60^\circ + 29^\circ)}{\cos 60^\circ \cos 29^\circ} = 2 \cdot \frac{\sin 61^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 62^\circ}{\cos 2^\circ} \cdots 2 \cdot \frac{\sin 89^\circ}{\cos 29^\circ} = \\ & = 2^{29} \cdot \frac{\cos 29^\circ \cos 28^\circ \cdots \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cdots \cos 29^\circ} = 2^{29}. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.27.** Dokažte rovnost<sup>45</sup>

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin 1^\circ}.$$

*Řešení:* Po vynásobení obou stran dokazované rovnosti nenulovým číslem  $\sin 1^\circ$  přejdeme k úkolu dokázat, že součet

$$S = \frac{\sin 1^\circ}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \cdots + \frac{\sin 1^\circ}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ}$$

má hodnotu rovnou 1. K úpravě každého zlomku použijeme identitu

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\sin x \sin y} = \frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} - \frac{\cos x \sin y}{\sin x \sin y} = \operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x$$

a v získaném součtu změňme pořadí členů

$$\begin{aligned} S & = (\operatorname{cotg} 45^\circ - \operatorname{cotg} 46^\circ) + (\operatorname{cotg} 47^\circ - \operatorname{cotg} 48^\circ) + \cdots + (\operatorname{cotg} 133^\circ - \operatorname{cotg} 134^\circ) = \\ & = \operatorname{cotg} 45^\circ - (\operatorname{cotg} 46^\circ + \operatorname{cotg} 134^\circ) + (\operatorname{cotg} 47^\circ + \operatorname{cotg} 133^\circ) - \cdots \\ & \quad - (\operatorname{cotg} 88^\circ + \operatorname{cotg} 92^\circ) + (\operatorname{cotg} 89^\circ + \operatorname{cotg} 91^\circ) - \operatorname{cotg} 90^\circ. \end{aligned}$$

Protože každá ze závorek je podle identity  $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}(\pi - x) = 0$  rovná nule, celý součet má hodnotu  $S = \operatorname{cotg} 45^\circ - \operatorname{cotg} 90^\circ = 1 - 0 = 1$  a důkaz je hotov.

■ **Příklad 4.6.28.** Dokažte rovnosti<sup>46</sup>

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ, \quad (4.46)$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}, \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} + \frac{1}{\sin 50^\circ} = \frac{1}{\sin 70^\circ} + 6. \quad (4.48)$$

*Řešení:* Je vhodné si uvědomit, že platí  $\sin(3 \cdot 10^\circ) = \sin(3 \cdot 50^\circ) = -\sin(3 \cdot 70^\circ) = \frac{1}{2}$ . Využijeme vzorec pro sinus trojnásobného argumentu  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  (příklad 4.6.1) ve tvaru  $\sin^3 x - \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x = 0$ . Pro hodnotu  $\sin 3x = \frac{1}{2}$  tak podle první věty řešení dostáváme, že reálná čísla  $\sin 10^\circ, \sin 50^\circ, -\sin 70^\circ$  jsou kořeny kubické rovnice

$$t^3 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

<sup>45</sup>[30], str. 243.

<sup>46</sup>[40], str. 11–12.

Podle Viětových vztahů pro kořeny kubické rovnice platí

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0, \quad (4.49)$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ - \sin 50^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ \sin 10^\circ = -\frac{3}{4}, \quad (4.50)$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}. \quad (4.51)$$

Ze vztahů (4.49) a (4.51) ihned plynou rovnosti (4.46) a (4.47). Vztah (4.50) upravíme na ekvivalentní tvar

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} + \frac{1}{\sin 50^\circ} = \frac{1}{\sin 70^\circ} + \frac{3}{4 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}$$

a dosadíme sem z (4.51), čímž získáme i třetí dokazovanou rovnost (4.48).

## 4.7 Příklady

Poznatky o goniometrických funkcích v oboru reálných čísel, kterými jsme se podrobně v této kapitole zabývali, nyní uplatníme při řešení rozmanitých příkladů, které ilustrují metody, jakými s těmito funkcemi pracujeme. Vybrané příklady nejsou rutinní a vyžadují od řešitelů často nemalé úsilí při hledání způsobu, jakým danou situaci „uchopit“, zejména jak se pustit do úprav sestavených výrazů pomocí vhodně zvolených goniometrických vzorců, když zpočátku není příliš vidět ke kžženému cíli.

Úvodní příklad se liší od všech následujících tím, že má formu výkladu o důležitých funkcích, které nacházejí uplatnění jak v mnoha vědních i technických oborech, tak třeba i v současné sociologii, biologii a lékařství, všude tam, kde popisujeme periodické procesy, jako jsou nejružnější vlnové jevy (např. světlo, zvuk či pohyb mořské hladiny), ekonomické, klimatologické a biologicko-populační cykly, biorytmy v tělech organismů apod.

■ **Příklad 4.7.1.** Každou periodickou závislost mezi dvěma skalárními veličinami  $y$  a  $x$ , kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$y = A \sin(Bx + C) + D, \quad (4.52)$$

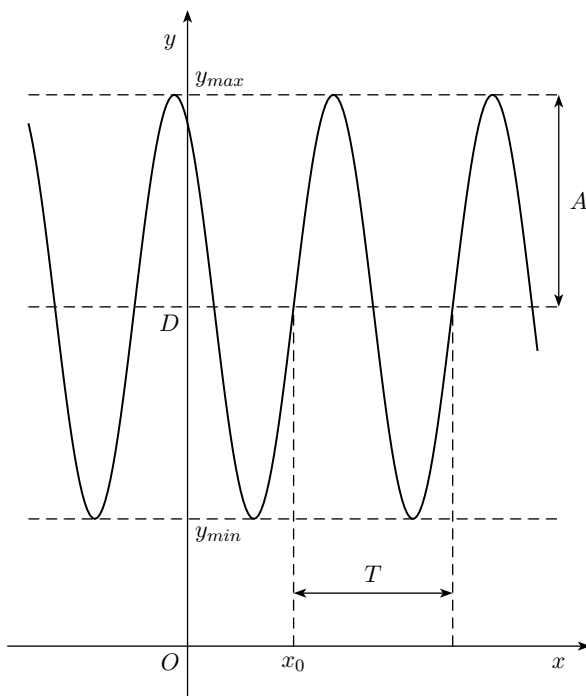
kde  $A > 0$ ,  $B > 0$  a  $C, D$  jsou reálná čísla, nazýváme *sinusoidální* funkcí  $y = f(x)$ . Parametr  $B$  určuje nejmenší periodu<sup>47</sup>  $T$  takové funkce  $f$ , jež je zřejmě dána vzorcem  $T = \frac{2\pi}{B}$ . Značí-li  $y_{\min}$  a  $y_{\max}$  nejmenší, resp. největší hodnotu dané funkce  $f$  na intervalu délky  $T$ , pak z rovností  $y_{\min} = -A + D$  a  $y_{\max} = A + D$  vyplývá, že parametry  $A, D$  zvané po řadě *amplituda* a *střední hodnota* funkce  $f$  jsou určeny vzorcí

$$A = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \quad \text{a} \quad D = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}.$$

Zbývající parametr  $C$  ve vyjádření (4.52) je určen až na aditivní konstantu  $2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Upřesníme ho, když úpravou argumentu  $\sin u$  přepíšeme formuli (4.52) do tvaru

$$y = A \sin \frac{2\pi(x - x_0)}{T} + D \quad (4.53)$$

a pro nový parametr  $x_0$  zvaný *fázový posun* funkce  $f$  stanovíme podmínku  $0 \leq x_0 < T$ . Výhoda zápisu (4.53) spočívá v tom, že v něm zastoupené parametry  $T, A, D, x_0$  jsou dobře patrné na grafu takové sinusoidální funkce  $f$ , kterým je tzv. sinusoidální křivka (obr. 4.24). Dostaneme ji ze (základní) sinusoidy  $y = \sin x$  roztážením či smrštěním ve směru os  $x$  a  $y$  s koeficienty  $\frac{2\pi}{T}$ , resp.  $A$



Obrázek 4.24: Sinusoidální funkce  $y = A \sin \frac{2\pi(x-x_0)}{T} + D$

a následnými posunutími ve směru os  $x$  a  $y$  o hodnoty  $x_0$ , resp.  $D$ .

Zdůrazněme, že sinusoidální funkce mohou být zadány předpisy, které se tvarově od vzorců (4.52) či (4.53) odlišují, přesto však popisují stejnou závislost, což obvykle ověříme užitím vhodných goniometrických identit. Čtyři příklady takových úprav sinusoidálních funkcí na „kanonický“ tvar (4.52) teď uvedeme:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
 y_2 &= \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}, \\
 y_3 &= \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}, \\
 y_4 &= \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.
 \end{aligned}$$

Pokud chceme získat kanonický tvar pro sinusoidální funkce zadané předpisem (4.52), ve kterém

<sup>47</sup>Dále už namísto „nejmenší perioda“ budeme stručně psát „perioda“.

jsou jeden či oba parametry  $A, B$  záporné, postupujeme např. takto:

$$\begin{aligned} y_5 &= -2 \sin \left( 3x - \frac{3\pi}{5} \right) = 2 \sin \left( 3x + \frac{3\pi}{5} - \pi \right) = 2 \sin \left( 3x - \frac{2\pi}{5} \right), \\ y_6 &= 2 \sin \left( -3x + \frac{3\pi}{5} \right) = 2 \sin \left( \pi - \left( -3x + \frac{3\pi}{5} \right) \right) = 2 \sin \left( 3x + \frac{2\pi}{5} \right), \\ y_7 &= -2 \sin \left( -3x - \frac{3\pi}{5} \right) = 2 \sin \left( 3x + \frac{3\pi}{5} \right). \end{aligned}$$

Ještě jedno vyjádření zkoumaných funkcí je významné: ukažme, že každou sinusoidální funkci  $y = f(x)$  s periodou  $T > 0$  a střední hodnotou  $D$  lze zapsat ve tvaru

$$y = a \cos \frac{2\pi x}{T} + b \sin \frac{2\pi x}{T} + D, \quad (4.54)$$

kde  $a, b$  jsou vhodná reálná čísla, a že naopak pro libovolná čísla  $a, b$  za podmínky  $(a, b) \neq (0, 0)$  určuje předpis (4.54) sinusoidální funkci  $y = f(x)$  s periodou  $T$  a střední hodnotou  $D$ . Skutečně, podle vzorce pro sinus rozdílu platí

$$A \sin \frac{2\pi(x - x_0)}{T} = A \sin \frac{2\pi x}{T} \cos \frac{2\pi x_0}{T} - A \cos \frac{2\pi x}{T} \sin \frac{2\pi x_0}{T},$$

takže předpisy (4.53) a (4.54) zadávají stejnou funkci  $y = f(x)$ , je-li splněna dvojice rovností

$$a = -A \sin \frac{2\pi x_0}{T} \quad \text{a} \quad b = A \cos \frac{2\pi x_0}{T}. \quad (4.55)$$

Tím je první část tvrzení dokázána, zbývá ověřit, že v případě  $(a, b) \neq (0, 0)$  jsou poslední dvě rovnosti splněny pro vhodná čísla  $A > 0$  a  $x_0 \in \langle 0, T \rangle$ .<sup>48</sup> Je zřejmé, že amplituda  $A$  je ze soustavy (4.55) určena vzorcem  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  a vyhovující fázový posun  $x_0$  dvojicí rovností

$$\cos \frac{2\pi x_0}{T} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{a} \quad \sin \frac{2\pi x_0}{T} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(hodnoty na pravých stranách jsou skutečně souřadnicemi některého bodu na jednotkové kružnici).

Z dokázané možnosti zapisovat zkoumané funkce předpisy (4.54) vyplývá, že součet dvou sinusoidálních funkcí se stejnou periodou  $T$  je buď opět sinusoidální funkce s periodou  $T$ , nebo funkce, která je konstantní. Od tohoto poměrně jednoduchého poznatku je ještě hodně daleko ke geniální myšlence, se kterou přišel r. 1822 francouzský matematik Joseph Fourier, když navrhl vyjadřovat jakékoliv periodické funkce, řekněme s periodou  $T$ , jako součty vhodně volených sinusoidálních funkcí s periodami  $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots$ . O této konstrukci pro limitní případ, kdy počet sčítaných funkcí roste do nekonečna, dokázal sám Fourier důležité výsledky a položil tak základy obsáhlé teorie *Fourierových řad*, významného odvětví matematické analýzy, v němž goniometrické funkce našly nepochybně svého největšího uplatnění nad rámec elementární matematiky. ■

V další čtveřici příkladů vyřešíme několik úloh o rovinných trojúhelnících. Vrátime se tak k tématu kapitoly 3, v níž jsme byli ve výběru nestandardních příkladů dosti omezeni, protože nám pro mnohé výpočty chyběl bohatší aparát goniometrických vzorců. K soustavnějšímu výkladu některých trigonometrických výsledků se ještě vrátíme v kapitole 5.

<sup>48</sup>Podobnou otázku jsme posuzovali už dříve v podkapitole 4.4 při výkladu druhé metody řešení goniometrické rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$ , jejíž levou stranu jsme vlastně převáděli na kanonický tvar (4.52) sinusoidální funkce.

■ **Příklad 4.7.2.** Určete všechny trojúhelníky  $ABC$ , jejichž vnitřní úhly splňují rovnost<sup>49</sup>

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1.$$

*Řešení:* Ze zřejmých nerovností  $\sin \gamma \leq 1$ ,  $\sin \alpha \sin \beta \geq 0$  a zadané rovnosti plyne

$$1 \geq \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1 + \sin \alpha \sin \beta(1 - \sin \gamma) \geq 1.$$

Tudíž  $\cos(\alpha - \beta) = 1$  a  $\sin \gamma = 1$ , odkud plyne  $\gamma = 90^\circ$  a  $\alpha = \beta = 45^\circ$ . Pro takové vnitřní úhly je zadaná rovnost splněna jako  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Hledané trojúhelníky  $ABC$ , pro které platí zadaná rovnost, jsou tedy pravoúhlé rovnoramenné s hlavním vrcholem  $C$ .

■ **Příklad 4.7.3.** Dokažte, že trojúhelník  $ABC$  je rovnoramenný, právě když platí<sup>50</sup>

$$a \cos \beta + b \cos \gamma + c \cos \alpha = \frac{a + b + c}{2}.$$

*Řešení:* Díky rozšířené sinové větě  $a = 2r \sin \alpha$ ,  $b = 2r \sin \beta$  a  $c = 2r \sin \gamma$ , kde  $r$  je poloměr kružnice opsané, je zkoumaná rovnost ekvivalentní s rovností

$$2 \sin \alpha \cos \beta + 2 \sin \beta \cos \gamma + 2 \sin \gamma \cos \alpha = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma,$$

která se dá ještě přepsat na tvar

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\gamma - \alpha) = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.$$

Jelikož  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , platí  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ ,  $\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha$  a  $\sin(\gamma + \alpha) = \sin \beta$ . Tudíž upravenou rovnost lze zjednodušit do podoby

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) = 0,$$

a následně, po uplatnění výsledku z příkladu 4.6.9 o rozkladu součtu  $\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$ , na součinný tvar

$$4 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} = 0.$$

Součin je roven nule právě tehdy, když jeden z činitelů se rovná nule. Zkoumaná rovnost je tedy ekvivalentní podmínce, že platí  $\alpha = \beta$  nebo  $\beta = \gamma$  nebo  $\gamma = \alpha$ , čímž je důkaz hotov.

■ **Příklad 4.7.4.** Pro libovolný trojúhelník  $ABC$  dokažte nerovnosti<sup>51</sup>

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}, \quad \sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{a+c}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{a+b}.$$

*Řešení:* S ohledem na symetrii stačí dokázat jen např. první nerovnost. Použijeme opět rozšířenou sinovou větu a následně vzorec pro dvojnásobný argument (v čitateli) a vzorec pro součet dvou sinů (ve jmenovateli):

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Poslední úpravu jsme provedli na základě toho, že funkce sinus má svoji kofunkci kosinus a že hodnoty  $\frac{\alpha}{2}$  a  $\frac{\beta+\gamma}{2}$  se doplňují do  $90^\circ$ . Jelikož  $0 \leq |\beta - \gamma| < 180^\circ$ , platí  $0 < \cos \frac{\beta-\gamma}{2} \leq 1$ . Tudíž

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}} \geq \sin \frac{\alpha}{2}$$

a důkaz je hotov. Zároveň jsme zjistili, že v první nerovnosti nastane rovnost, právě když  $\beta = \gamma$ .

<sup>49</sup>[32], str. 20.

<sup>50</sup>[29], str. 112.

<sup>51</sup>[29], str. 66.

■ **Příklad 4.7.5.** Dokažte, že pro libovolný trojúhelník  $ABC$  platí

$$\alpha = 2\beta \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc \quad \text{a} \quad \alpha = 3\beta \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) = bc^2.$$

Rozhodněte rovněž, zda obecně platí i implikace opačná k druhé implikaci.<sup>52</sup>

*Řešení:*

$$\boxed{\alpha = 2\beta \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc}$$

Je-li  $\alpha = 2\beta$ , je  $\gamma = \pi - 3\beta$ , takže podle rozšířené sinové věty platí

$$a = 2r \sin 2\beta, b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin 3\beta,$$

kde  $r$  je poloměr kružnice opsané. K důkazu rovnosti  $a^2 = b^2 + bc$  proto stačí ověřit identitu

$$\sin^2 2\beta = \sin^2 \beta + \sin \beta \sin 3\beta.$$

Její pravá strana je podle známých goniometrických vzorců rovna

$$\sin \beta (\sin \beta + \sin 3\beta) = \sin \beta \cdot 2 \sin 2\beta \cos \beta = \sin^2 2\beta,$$

takže se skutečně rovná levé straně.

Předpokládejme nyní, že naopak platí  $a^2 = b^2 + bc$ . Porovnáním s rovností z kosinové věty

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

dostaneme

$$\begin{aligned} b^2 + bc &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ bc(1 + 2 \cos \alpha) &= c^2, \\ b(1 + 2 \cos \alpha) &= c. \end{aligned}$$

Dosaďme sem  $b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin \gamma = 2r \sin(\alpha + \beta)$  a postupně upravujeme:

$$\begin{aligned} 2r \sin \beta (1 + 2 \cos \alpha) &= 2r \sin(\alpha + \beta), \\ \sin \beta + 2 \sin \beta \cos \alpha &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin \beta &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin \beta &= \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Odtud plyne  $\alpha - \beta > 0$ , takže oba úhly  $\beta, \alpha - \beta$  leží v intervalu  $(0, \pi)$ . Jak víme, odvozená rovnost jejich sinů je tehdy možná, jen když buď  $\beta = \alpha - \beta$  nebo  $\beta + (\alpha - \beta) = \pi$ . Druhá možnost ( $\alpha = \pi$ ) je však vyloučena, takže platí  $\beta = \alpha - \beta$  neboli  $\alpha = 2\beta$ , jak jsme chtěli dokázat.

$$\boxed{\alpha = 3\beta \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) = bc^2}$$

Je-li  $\alpha = 3\beta$ , je  $\gamma = \pi - 4\beta$ , takže podle rozšířené sinové věty platí

$$a = 2r \sin 3\beta, b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin 4\beta, \tag{4.56}$$

<sup>52</sup>22. ročník MO (1972/1973), úloha A-P-3, a 46. ročník MO (1996/1997), úloha A-III-1.

kde  $r$  je poloměr kružnice opsané. Proto k důkazu implikace stačí ověřit identitu

$$(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) = \sin \beta \sin^2 4\beta. \quad (4.57)$$

Podle známých goniometrických vzorců platí

$$\begin{aligned} (\sin 3\beta - \sin \beta)^2 &= (2 \cos 2\beta \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta, \\ \sin 3\beta + \sin \beta &= 2 \sin 2\beta \cos \beta \end{aligned}$$

a odtud pro levou stranu rovnosti (4.57) plyne

$$\begin{aligned} (\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) &= (4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos \beta) = \\ &= (2 \sin \beta \cos \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \\ &= \sin 2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \sin \beta \sin^2 4\beta. \end{aligned}$$

Tak jsme dokázali, že (4.57) platí pro každé  $\beta$ .

Vysvětlíme nyní, proč opačná implikace neplatí. Funkce sinus má periodu  $360^\circ$ , takže strany trojúhelníku  $ABC$  jsou tvaru (4.56) i v případě, kdy platí  $\alpha = 3\beta - 360^\circ$  (a  $\gamma = 540^\circ - 4\beta$ ), např. pokud  $\alpha = 15^\circ, \beta = 125^\circ$  a  $\gamma = 40^\circ$ . Pro trojúhelník s takovými vnitřními úhly platí (jak jsme dokázali) rovnost  $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$ , přestože  $\alpha \neq 3\beta$ . ■

V další skupině úloh se vrátíme k problematice podkapitoly 4.4 věnované řešení goniometrických rovnic a jejich soustav. Standardní příklady k procvičování této dovednosti lze nalézt v četných učebnicích a sbírkách pro střední školy, které naše práce nechce suplovat. Proto se omezíme jen na několik příkladů obtížnějších rovnic, ve kterých budou často zastoupeny i parametry. Budeme přitom zkoumat otázky řešitelnosti a z tvaru zadaných rovnic odvozovat vlastnosti jejich řešení, aniž je vyjádříme v explicitním tvaru.

V prvním příkladu však přece jen uvedeme ukázky toho postupu, kterým goniometrické rovnice řešíme – od výchozích složitějších rovnic přecházíme k rovnicím jednodušším, až nakonec dospějeme k těm, které jsme v podkapitole 4.4 nazvali *základními*.

■ **Příklad 4.7.6.** Každou z jednotlivých rovnic

- $\sin^4 x + \cos^4 x = p$ ,
- $\sin x \sin(a - x) = p$ ,
- $\sin(x + 3a) = 3 \sin(a - x)$ ,
- $\sin(x + a) + \sin a \sin x \operatorname{tg}(x + a) = p \cos a \cos x$  (kde  $\cos a \neq 0$ )

s neznámou  $x$  a parametry  $a, p \in \mathbb{R}$  převedte na základní rovnici pro vhodnou goniometrickou funkci s vhodným argumentem.<sup>53</sup>

*Řešení:* a) Umocníme na druhou základní vztah  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  a z výsledku vyjádříme levou stranu zadané rovnice:

$$\begin{aligned} (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 &= 1^2, \\ \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x &= 1, \\ \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x. \end{aligned}$$

<sup>53</sup>[34], str. 43.

Nyní již upravíme na základní rovnici:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x &= p, \\ 4 \sin^2 x \cos^2 x &= 2 - 2p, \\ \sin^2 2x &= 2(1 - p), \\ \sin 2x &= \pm \sqrt{2(1 - p)}. \end{aligned}$$

S přihlédnutím k oboru hodnot funkce sinus má podmínka řešitelnosti tvar  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ .

b) Pomocí vzorce pro převod součinu dvou sinů na součet upravíme levou stranu zadané rovnice

$$\sin x \sin(a - x) = \frac{\cos(2x - a) - \cos a}{2}$$

a nyní již převedeme na požadovanou základní rovnici:

$$\begin{aligned} \cos(2x - a) - \cos a &= 2p, \\ \cos(2x - a) &= 2p + \cos a. \end{aligned}$$

Podmínka řešitelnosti je  $-1 \leq 2p + \cos a \leq 1$ .

c) Použijeme součtové a rozdílové vzorce pro přepis levé i pravé strany zadané rovnice a následně vzorce pro  $\cos 3a$  a  $\sin 3a$  z př. 4.6.1:

$$\begin{aligned} \sin x \cos 3a + \cos x \sin 3a &= 3(\sin a \cos x - \cos a \sin x), \\ \sin x(4 \cos^3 a - 3 \cos a) + \cos x(3 \sin a - 4 \sin^3 a) &= 3 \sin a \cos x - 3 \cos a \sin x, \\ 4 \sin x \cos^3 a - 4 \cos x \sin^3 a &= 0, \\ \cos a = 0 \Rightarrow \cos x = 0, \cos a \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}^3 a. \end{aligned}$$

d) Z levé strany zadané rovnice nejdříve vytkneme výraz  $\operatorname{tg}(x + a)$  a následně použijeme součtový vzorec pro funkci kosinus:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x + a) \cdot (\cos(x + a) + \sin a \sin x) &= p \cos a \cos x, \\ \operatorname{tg}(x + a) \cdot (\cos x \cos a - \sin x \sin a + \sin a \sin x) &= p \cos a \cos x, \\ \cos x \cos a \cdot (\operatorname{tg}(x + a) - p) &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož podle zadání platí  $\cos a \neq 0$ , je množina řešení původní rovnice sjednocením množin řešení základních rovnic

$$\cos x = 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}(x + a) = p.$$

■ **Příklad 4.7.7.** Dokažte, že goniometrická rovnice

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$$

nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.<sup>54</sup>

*Řešení:* Protože obě funkce  $\sin(\cos x)$  a  $\cos(\sin x)$  mají periodu  $2\pi$ , stačí ukázat, že se nikde nerovnajší

---

<sup>54</sup>[30], str. 234.



na intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$ . A protože jde o dvě funkce sudé, můžeme interval  $\langle -\pi, \pi \rangle$  zúžit na interval  $\langle 0, \pi \rangle$ . Připustíme tedy, že pro některé  $x \in \langle 0, \pi \rangle$  platí rovnost

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x).$$

Pro takové  $x$  ovšem  $0 \leq \sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ , takže  $\cos(\sin x) > 0$ . Z nerovnosti  $\sin(\cos x) > 0$  pak s ohledem na  $-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \cos x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$  plyne  $\cos x > 0$ . Rovnost  $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$  je proto rovností sinu a kosinu dvou argumentů  $\cos x, \sin x$  z intervalu  $(0, 1)$ , a tedy i intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Jak víme, taková rovnost je splněna, právě když součet obou argumentů z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  je roven  $\frac{\pi}{2}$ , v našem případě

$$\cos x + \sin x = \frac{\pi}{2}.$$

Tato rovnost však nemůže nastat pro žádný úhel  $x$ , jelikož obor hodnot funkce

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

je interval  $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$ , zatímco  $\frac{\pi}{2} > \sqrt{2}$ .

■ **Příklad 4.7.8.** Má-li rovnice

$$p_1 \cos(x + a_1) + p_2 \cos(x + a_2) + \cdots + p_n \cos(x + a_n) = 0$$

s reálnými parametry  $p_i, a_i$  taková dvě řešení  $x_1$  a  $x_2$ , že číslo  $\frac{x_2 - x_1}{\pi}$  není celé, pak jejím řešením je každé reálné číslo  $x$ . Dokažte a uveďte příklad takové rovnice s libovolným řešením pro  $n = 2$  a kladná  $p_1, p_2$ .<sup>55</sup>

*Řešení:* Pro dané parametry  $p_i, a_i$  definujme výrazy

$$\begin{aligned} c(x) &= p_1 \cos(x + a_1) + p_2 \cos(x + a_2) + \cdots + p_n \cos(x + a_n) = 0, \\ s(x) &= p_1 \sin(x + a_1) + p_2 \sin(x + a_2) + \cdots + p_n \sin(x + a_n) = 0. \end{aligned}$$

Všimněme si, že z rovností

$$\cos(y + a_i) = \cos(y - x) \cos(x + a_i) - \sin(y - x) \sin(x + a_i)$$

vyplývá, že pro libovolná  $x, y \in \mathbb{R}$  platí rovnost

$$c(y) = \cos(y - x)c(x) - \sin(y - x)s(x). \quad (4.58)$$

Ve shodě se zadáním úlohy předpokládejme, že pro některá čísla  $x_1, x_2$  platí  $c(x_1) = c(x_2)$  a přitom  $x_2 = x_1 + \pi \cdot r$ , kde  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Z rovnosti (4.58) pro  $x = x_1$  a  $y = x_2$  vychází

$$0 = \cos \pi r \cdot 0 - \sin \pi r \cdot s(x_1) \text{ neboli } \sin \pi r \cdot s(x_1) = 0.$$

Protože však  $\sin \pi r \neq 0$ , musí platit  $s(x_1) = 0$ . Z rovnosti (4.58) pro  $x = x_1$  pak pro libovolné  $y \in \mathbb{R}$  máme

$$c(y) = \cos(y - x) \cdot 0 - \sin(y - x_1) \cdot 0 = 0,$$

takže řešením zadané rovnice je skutečně každé reálné číslo.

Žádaným příkladem pro  $n = 2$  je rovnice

$$\cos x + \cos(x + \pi) = 0,$$

jejímž řešením je skutečně každé  $x \in \mathbb{R}$ , neboť číslo  $\pi$  je antiperioda funkce kosinus.

<sup>55</sup>[34], str. 21.

■ **Příklad 4.7.9.** Předpokládejme, že rovnice

$$a \cos x + b \sin x = c$$

s parametry  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , kde  $a^2 + b^2 > 0$ , má v intervalu  $(0, 2\pi)$  dvě různá řešení  $x_1, x_2$ . Dokažte rovnost<sup>56</sup>

$$\cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

*Řešení:* Danou rovnici  $a \cos x + b \sin x = c$  upravíme goniometrickou metodou popsanou v podkapitole 4.4 do tvaru  $K \sin(x + \varphi) = c$ , kde  $K = \sqrt{a^2 + b^2}$  a  $\varphi$  je vhodný úhel (jeho hodnotu nebudeme potřebovat). Podle zadání pro dvě různá čísla  $x_1, x_2 \in (0, 2\pi)$  platí

$$K \sin(x_1 + \varphi) = c \quad \text{a} \quad K \sin(x_2 + \varphi) = c. \quad (4.59)$$

Odečtením rovnic (4.59) s ohledem na  $K \neq 0$  dostaneme

$$0 = \sin(x_1 + \varphi) - \sin(x_2 + \varphi) = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2}. \quad (4.60)$$

Z nerovností  $0 \leq x_1, x_2 < 2\pi$  plyne  $-\pi < \frac{x_1 - x_2}{2} < \pi$ , odkud díky předpokladu  $x_1 \neq x_2$  máme  $\sin \frac{x_1 - x_2}{2} \neq 0$ , takže rovnost (4.60) znamená

$$\cos \frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2} = 0, \text{ a proto } \sin \frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2} = \pm 1.$$

Dosadíme-li poslední hodnotu do výsledku sečtení rovností (4.59), který lze upravit do tvaru

$$2K \sin \frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} = 2c,$$

dostaneme

$$\pm 2K \cos \frac{x_1 - x_2}{2} = 2c, \text{ odkud } \cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{c^2}{K^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2},$$

což je rovnost, kterou jsme měli dokázat.

*Poznámka:* K řešení předchozí úlohy lze využít i algebraickou metodu řešení goniometrické rovnice  $a \cos x + b \sin x = c$ , kterou jsme v podkapitole 4.4 ilustrovali obrázkem 4.17. Získáme tak dokonce obsažnější výsledek, totiž dvojici rovností

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} = \frac{ac}{a^2 + b^2} \quad \text{a} \quad \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \frac{bc}{a^2 + b^2}, \quad (4.61)$$

ze kterých po umocnění na druhou, sečtení, užití dvou goniometrických jedniček a aplikací vzorce pro  $\cos(x_1 - x_2)$  totiž vyplývá

$$\frac{1}{2} + \cos(x_1 - x_2) = \frac{c^2}{a^2 + b^2},$$

což je původní dokazovaná rovnost, neboť odvozená levá strana je zřejmě rovna  $\cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2}$ . K důkazu rovností (4.61) si povšimněme, že jejich levé strany jsou souřadnice středu úsečky s krajními body  $[\cos x_1, \sin x_1]$  a  $[\cos x_2, \sin x_2]$ , jež jsou průsečíky přímky  $p$  s jednotkovou kružnicí  $k$  vyznačenými

<sup>56</sup>[34], str. 51.

na obr. 4.17. Proto stačí ověřit, že kolmý průmět počátku  $[0, 0]$  na přímkou o rovnici  $ax + by = c$  má souřadnice uvedené v pravých stranách rovností (4.61). To je triviální poznatek analytické geometrie, neboť zřejmá rovnost

$$a \cdot \frac{ac}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{bc}{a^2 + b^2} = c$$

ukazuje, že bod s takovými souřadnicemi na dané přímce leží, a polohový vektor  $\left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2}\right)$  tohoto bodu je zřejmě rovnoběžný s normálovým vektorem  $(a, b)$  dané přímky  $ax + by = c$ .

■ **Příklad 4.7.10.** Necht  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ . Dokažte, že soustava rovnic

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = 1, \quad a \cos^2 y + b \sin^2 y = 1, \quad a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y \quad (4.62)$$

s neznámými  $x, y$  a parametry  $a, b$  má v oboru  $\mathbb{R}$  řešení, právě když platí  $a + b = 2ab > 0$  (což znamená, že obě čísla  $a, b$  jsou kladná, jedno z intervalu  $(\frac{1}{2}, 1)$ , druhé z intervalu  $(1, \infty)$ ).<sup>57</sup>

*Řešení:* • V první části předpokládejme, že vypsaná soustava má řešení, kterou je dvojice  $(x, y)$ . Ze třetí rovnice soustavy pak plyne  $\cos x \neq 0$  a  $\cos y \neq 0$  (jinak by hodnoty  $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$  neměly smysl). První dvě rovnice soustavy pak po vydělení  $\cos^2 x$ , resp.  $\cos^2 y$  a užití rovností

$$\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t + 1$$

pro  $t = x$  a  $t = y$  můžeme přepsat do podoby

$$(a - 1)\operatorname{tg}^2 x = 1 - b \quad \text{a} \quad (b - 1)\operatorname{tg}^2 y = 1 - a.$$

Odtud plyne  $a = 1 \Leftrightarrow b = 1$ . Protože však  $a \neq b$  podle zadání úlohy, jsou  $a - 1, b - 1$  nenulová čísla různých znamének, neboť nenulová čísla  $\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^2 y$  jsou kladná. Hodnoty  $\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^2 y$  jsou tedy dvě navzájem převrácená kladná čísla určená takto:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y} = -\frac{b - 1}{a - 1}. \quad (4.63)$$

Z třetí rovnice (4.62) nyní (díky nenulovosti čísel  $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$ ) plyne  $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$ , takže s ohledem na  $a \neq b$  jsou i obě čísla  $a, b$  nenulová a platí

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 y} = \left(\frac{b - 1}{a - 1}\right)^2,$$

kam jsme za  $\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^2 y$  dosadili z (4.63). Platí tedy některá z možností

$$\frac{b}{a} = \frac{b - 1}{a - 1} < 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{b}{a} = -\frac{b - 1}{a - 1} > 0. \quad (4.64)$$

Díky implikacím

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} = \frac{b - 1}{a - 1} &\Rightarrow b(a - 1) = a(b - 1) \Rightarrow a = b, \\ \frac{b}{a} = -\frac{b - 1}{a - 1} &\Rightarrow b(a - 1) = a(1 - b) \Rightarrow a + b = 2ab \end{aligned} \quad (4.65)$$

a předpokladu  $a \neq b$  musí nastat druhá možnost v (4.64), z níž tedy plyne kýžená rovnost  $a + b = 2ab$ . Protože hodnoty  $2ab$  a  $\frac{b}{a}$  mají zřejmě stejné znaménko a  $\frac{b}{a} > 0$  podle (4.64), platí i  $2ab > 0$

<sup>57</sup>[36], str. 91.

a první část řešení je hotova.

• Předpokládejme nyní, že různá čísla  $a, b$  splňují podmínku  $a + b = 2ab > 0$ . Protože z  $a + b = 2ab$  zřejmě plyne  $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$  a  $a = 1 \Leftrightarrow b = 1$ , jsou  $a, b$  dvě čísla různá od 0 a 1, takže implikace v (4.65) se dají obrátit a vedou pak k závěru, že platí druhý vztah v (4.64), přitom se využije předpoklad  $2ab > 0$ , podle něhož  $\frac{b}{a} > 0$ . Poslední výraz v (4.63) má tedy kladnou hodnotu, takže existují čísla  $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$  taková, že (4.63) platí; dokonce přitom máme  $x + y = \frac{\pi}{2}$ . Hodnoty  $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$  jsou tedy kladné a platí

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \sqrt{-\frac{b-1}{a-1}} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

(opět jsme využili druhou část (4.64)). Odtud plyne jednak

$$a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y = \sqrt{ab},$$

takže třetí rovnice soustavy (4.62) je splněna, jednak

$$\frac{1-b}{a-1} = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

odkud

$$(1-b)\cos^2 x = (a-1)\sin^2 x \quad \text{neboli} \quad a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1.$$

Určené  $x$  tedy splňuje i první rovnici soustavy (4.62), v důsledku čehož i určené  $y = \frac{\pi}{2} - x$  splňuje její druhou rovnici. Tím je i druhá část řešení úlohy hotova.

■ **Příklad 4.7.11.** Uvažujme soustavu rovnic

$$\cos x + \cos y = a, \quad \sin x + \sin y = b \tag{4.66}$$

s neznámými  $x, y \in (0, 2\pi)$  a parametry  $a, b \in \mathbb{R}$ . Popište grafickou metodu řešení (4.66) s využitím jednotkové kružnice, podejte diskusi o počtu řešení (4.66) v závislosti na parametrech  $a, b$  a odvoďte algebraickou soustavu dvou rovnic s neznámými  $c, s$  a parametry  $a, b$ , jejímiž řešeními jsou právě dvojice

$$(c, s) = (\cos x, \sin x) \quad \text{a} \quad (c, s) = (\cos y, \sin y)$$

sestavené z řešení původní soustavy (4.66). Nakonec převed'te soustavu (4.66) na soustavu základních goniometrických rovnic pro vhodné výrazy sestavené z neznámých  $x, y$ .<sup>58</sup>

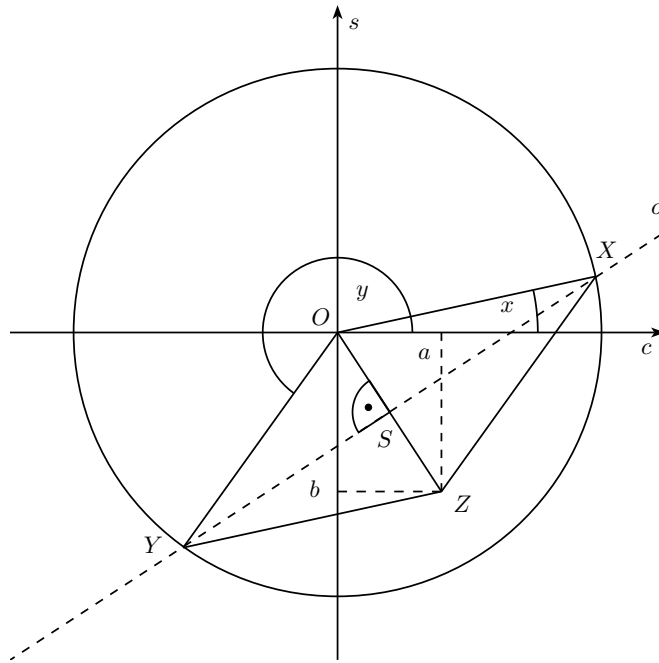
*Řešení:* V rovině s kartézskou soustavou souřadnic  $Ocs$  sestrojme jednotkové vektory

$$\vec{OX} = (\cos x, \sin x) \quad \text{a} \quad \vec{OY} = (\cos y, \sin y)$$

odpovídající polohám goniometrické ručičky pro úhly  $x$ , resp.  $y$ . Soustava (4.66) pak vyjadřuje právě to, že vektorový součet  $\vec{OX} + \vec{OY}$  je vektor  $\vec{OZ} = (a, b)$  s danými souřadnicemi  $a, b$ . Rovnoběžník  $OXYZ$  je kosočtverec s jednotkovými stranami, takže ze zadaného vektoru  $\vec{OZ}$  určíme koncové body  $X, Y$  neznámých vektorů  $\vec{OX}, \vec{OY}$  jako průsečíky jednotkové kružnice s osou  $o$  úsečky  $OZ$  (přitom je jedno, který z průsečíků označíme  $X$  a který  $Y$ , neboť soustava (4.66) je v neznámých  $x, y$  symetrická). To je hledaná grafická metoda řešení soustavy (4.66).

Existence a počet zmíněných průsečíků závisí na vzdálenosti osy  $o$  od počátku  $O$ , jež je rovna polovině délky  $\sqrt{a^2 + b^2}$  úsečky  $OZ$ . Odtud plyne:

<sup>58</sup>[29], str. 60.



Obrázek 4.25

- je-li  $a^2 + b^2 > 4$ , soustava (4.66) nemá řešení,
- je-li  $a^2 + b^2 = 4$ , soustava (4.66) má jediné řešení  $x = y = \varphi$ , kde  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$  je úhel určený rovnostmi

$$2 \cos \varphi = a, \quad 2 \sin \varphi = b,$$

- je-li  $0 < a^2 + b^2 < 4$ , soustava (4.66) má dvě řešení  $(x_0, y_0)$  a  $(y_0, x_0)$ , kde  $x_0, y_0 \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a  $x_0 \neq y_0$  (o jejich určení pojednáme níže),

- je-li  $a = b = 0$ , soustava (4.66) má nekonečně mnoho řešení, jež jsou právě tvaru  $(x, y)$ , kde  $x, y \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a  $|x - y| = \pi$  (odpovídá to situaci  $\vec{OX} + \vec{OY} = \vec{0}$ ).

K určení požadované soustavy pro neznámé  $c, s$  najdeme rovnici osy  $o$  úsečky  $OZ$ . Je to přímka s normálovým vektorem  $\vec{OZ} = (a, b)$ , která prochází bodem  $S[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$ , takže její rovnice má tvar

$$a \left( c - \frac{a}{2} \right) + b \left( s - \frac{b}{2} \right) = 0 \quad \text{neboli} \quad ac + bs = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Průsečíky osy  $o$  s jednotkovou kružnicí jsou proto určeny soustavou rovnic

$$\begin{aligned} ac + bs &= \frac{a^2 + b^2}{4}, \\ c^2 + s^2 &= 1. \end{aligned}$$

To je hledaná algebraická soustava pro řešení původní soustavy (4.66).

K trigonometrickému řešení přepíšeme rovnice soustavy (4.66) pomocí vzorců pro součet dvou kosinů a dvou sinů do ekvivalentního tvaru

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a, \quad 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b. \quad (4.67)$$

Vydělením rovnic (4.67) dostaneme

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{cotg} \frac{x+y}{2} = \frac{a}{b} \quad (4.68)$$

podle toho, zda  $a \neq 0$  či  $b \neq 0$  (případ  $a = b = 0$  z výše uvedených důvodů již neuvažujeme). Z těchto rovností zřejmě plyne

$$\cos \frac{x+y}{2} = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \frac{x+y}{2} = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (4.69)$$

přičemž oba vztahy platí se stejným znaménkem  $+$  či  $-$ . Po dosazení do té z rovnic (4.67), jejíž pravá strana je různá od nuly, dostaneme v obou případech stejný vztah

$$\cos \frac{x-y}{2} = \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad (4.70)$$

s tímž znaménkem jako ve (4.69). Všimněme si, že z rovnic (4.69) a (4.70) plynou naopak rovnice (4.67). Tak jsme původní soustavu (4.66) převedli na soustavu základních goniometrických rovnic (4.69) a (4.70), ve kterých vezmeme stejné znaménko. (Tímto postupem najdeme všechna řešení v oboru  $x, y \in \mathbb{R}$ .) ■

Přejdeme nyní k úlohám o goniometrických nerovnostech. Nebudeme však *řešit* nerovnice, nýbrž *dokazovat* nerovnosti. Proměnné v nich zastoupené tedy nebudou neznámé (které je třeba určit), nýbrž budou nabývat libovolných hodnot z předem stanovených oborů. Dokazování takových nerovností může být mnohdy tvrdým oříškem, přesto ve vybraných úlohách vždy vystačíme s elementárními prostředky, uplatňovanými však často dosti rafinovaně.

■ **Příklad 4.7.12.** Dokažte, že pro libovolná čísla  $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$  platí<sup>59</sup>

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos y} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}.$$

*Řešení:* Protože pro uvažovaná  $x, y$  platí  $0 < x+y < \pi$ , máme

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} \leq \frac{1}{\cos x \cos y}, \quad (4.71)$$

takže místo nerovnosti ze zadání úlohy stačí dokázat nerovnost

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\cos x \cos y}}. \quad (4.72)$$

To je ale snadné, neboť po převedení odmocniny z pravé strany na levou dostaneme po úpravě „na čtverec“ zřejmou nerovnost

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\cos x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos y}} \right)^2 \geq 0. \quad (4.73)$$

Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že nerovnost (4.72) též plyne z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel  $\frac{1}{\cos x}$  a  $\frac{1}{\cos y}$ .

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když nastanou rovnosti v obou nerovnostech (4.71) a (4.73). To lze zřejmě vyjádřit podmínkami

$$\sin(x+y) = 1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos y},$$

které jsou pro nějaká  $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$  splněny, právě když  $x+y = \frac{\pi}{2}$  a  $x = y$ , neboli  $x = y = \frac{\pi}{4}$ .

<sup>59</sup>51. ročník MO (2001/2002), úloha A-II-1.

■ **Příklad 4.7.13.** Dokažte, že pro libovolná reálná čísla  $x, y$  platí nerovnosti

$$\cos x + \cos y + \cos(x + y) \geq -\frac{3}{2}, \quad \cos x \cos y \cos(x + y) \geq -\frac{1}{8},$$

a podmínky, kdy nastane první, resp. druhá rovnost, vyjádřete základními rovnicemi pro vhodné goniometrické funkce s vhodnými argumenty sestavenými z proměnných  $x$  a  $y$ .<sup>60</sup>

*Řešení:* Výrazy v levých stranách nerovností označíme  $P$ , resp.  $Q$  a při jejich úpravách uijeme kromě goniometrických vzorců též metodu doplnění kvadratického trojčlenu na čtverec.

$$\begin{aligned} P &= \cos x + \cos y + \cos(x + y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \left( 2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1 \right) = \\ &= 2 \cos^2 \frac{x+y}{2} + 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \cos \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x-y}{2} - 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \cos \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x-y}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

V posledním výrazu jsou hodnoty prvních dvou sčítanců (díky druhým mocninám) nezáporná čísla, takže platí  $P \geq -\frac{3}{2}$ , jak jsme měli dokázat. Rovnost  $P = -\frac{3}{2}$  nastane, právě když základy obou druhých mocnin budou rovny nule:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x-y}{2} = 0 \quad \text{a} \quad \sin \frac{x-y}{2} = 0.$$

Druhá rovnost je splněna, právě když  $\cos \frac{x-y}{2} = \pm 1$ . Po dosazení do první rovnosti tak nacházíme kritérium rovnosti  $P = -\frac{3}{2}$  ve tvaru soustavy rovnic

$$\cos \frac{x-y}{2} = \pm 1, \quad \cos \frac{x+y}{2} = \mp \frac{1}{2}$$

(požadujeme, aby obě rovnice platily buď s horním, nebo s dolním znaménkem).

$$\begin{aligned} Q &= \cos x \cos y \cos(x + y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2} \cdot \cos(x + y) = \\ &= \frac{1}{2} \cos^2(x + y) + \frac{1}{2} \cos(x + y) \cos(x - y) = \\ &= \frac{1}{8} (2 \cos(x + y) + \cos(x - y))^2 - \frac{1}{8} \cos^2(x - y) = \\ &= \frac{1}{8} (2 \cos(x + y) + \cos(x - y))^2 + \frac{1}{8} \sin^2(x - y) - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ze stejných důvodů jako v první části řešení odtud plyne nerovnost  $Q \geq -\frac{1}{8}$ , přičemž rovnost nastane, právě když je splněna soustava základních rovnic

$$\cos(x - y) = \pm 1 \quad \text{a} \quad \cos(x + y) = \mp \frac{1}{2}.$$

<sup>60</sup>[34], str. 50–51.

■ **Příklad 4.7.14.** Pro každé přirozené číslo  $n \geq 2$  určete největší hodnotu výrazu

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_{n-1} \cos x_n + \sin x_n \cos x_1,$$

kde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou libovolná reálná čísla.<sup>61</sup>

*Řešení:* Kromě výrazu  $V_n$  uvažme ještě výraz

$$S_n = (\sin x_1 - \cos x_2)^2 + (\sin x_2 - \cos x_3)^2 + \cdots + (\sin x_n - \cos x_1)^2,$$

který je součtem  $n$  druhých mocnin, takže má pouze nezáporné hodnoty. Po provedení těchto druhých mocnin rozdílů a využití  $n$  goniometrických jedniček dostaneme vyjádření

$$S_n = n - 2V_n \quad \text{neboli} \quad V_n = \frac{n}{2} - \frac{S_n}{2},$$

odkud vzhledem k  $S_n \geq 0$  plyne  $V_n \leq \frac{n}{2}$ . Zkoumaný výraz  $V_n$  proto nabývá největší hodnoty  $\frac{n}{2}$ , neboť, jak snadno nahlédneme, pro čísla  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{\pi}{4}$  platí  $S_n = 0$ , takže potom  $V_n = \frac{n}{2}$ , což je vidět i po přímém dosazení hodnot

$$\sin x_i = \cos x_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

■ **Příklad 4.7.15.** Dokažte, že pro každé  $x \in (0, \pi)$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  platí<sup>62</sup>

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} > 0.$$

*Řešení:* Označme  $S_n$  levou stranu zkoumané nerovnosti. V řešení využijeme vzorec pro součin sinů

$$2 \sin x \sin(2k-1)x = \cos(2k-2)x - \cos 2kx,$$

následně v úpravách odhadneme hodnoty kosinů číslem 1 a získaný výraz teleskopicky sečteme:

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cdot S_n &= 2 \sin x \sin x + \frac{2 \sin x \sin 3x}{3} + \cdots + \frac{2 \sin x \sin(2n-1)x}{2n-1} = \\ &= 1 - \cos 2x + \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3} + \cdots + \frac{\cos(2n-2)x - \cos 2nx}{2n-1} = \\ &= 1 - \cos 2x \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \cos 4x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \frac{\cos 2nx}{2n-1} \geq \\ &\geq 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right] = 0. \end{aligned}$$

Protože z  $0 < x < \pi$  plyne  $\cos 2x < 1$ , je dokázaná nerovnost  $2 \sin x \cdot S_n \geq 0$  ve skutečnosti ostrá, takže z ní s ohledem na  $\sin x > 0$  dostáváme  $S_n > 0$ , což jsme chtěli dokázat.

■ **Příklad 4.7.16.** Dokažte, že pro libovolná reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  platí<sup>63</sup>

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(x_i - x_j) \geq -\frac{n}{2}.$$

<sup>61</sup>46. ročník MO (1996/1997), úloha A-III-5.

<sup>62</sup>[35], str. 15.

<sup>63</sup>[35], str. 11.



*Řešení:* Umocníme dva konečné součty  $\sum_{i=1}^n \cos x_i$  a  $\sum_{i=1}^n \sin x_i$  na druhou a následně výrazy, které jsou pro jakákoliv  $x_i$  nezáporné, sečteme:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \cos x_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \cos^2 x_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos x_i \cos x_j, \\ \left( \sum_{i=1}^n \sin x_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \sin^2 x_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin x_i \sin x_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \cos x_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sin x_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \cos^2 x_i + \sum_{i=1}^n \sin^2 x_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_i \cos x_j + \sin x_i \sin x_j) = \\ &= n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(x_i - x_j) \geq 0. \end{aligned}$$

Odtud již plyne dokazovaná nerovnost

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(x_i - x_j) \geq -\frac{n}{2}.$$

■

Poslední dva příklady teoretického charakteru částečně objasňují, proč je tak málo přesně známých velikostí ostrých úhlů, u nichž známe (rovněž přesně) i příslušné hodnoty goniometrických funkcí.

■ **Příklad 4.7.17.** Dokažte, že obě hodnoty  $\cos 1^\circ$ ,  $\sin 1^\circ$  jsou iracionální čísla.<sup>64</sup>

*Řešení:* Nejprve indukcí vzhledem k číslu  $n$  dokážeme: je-li  $x \in \mathbb{R}$  takové, že  $\cos x \in \mathbb{Q}$ , pak  $\cos nx \in \mathbb{Q}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Z předpokladu  $\cos x \in \mathbb{Q}$  a rovnosti  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  plyne  $\cos 2x \in \mathbb{Q}$ . Platí-li  $\cos nx \in \mathbb{Q}$  a současně  $\cos(n+1)x \in \mathbb{Q}$  pro některé  $n$ , pak z identity

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$$

vzhledem k výchozímu předpokladu  $\cos x \in \mathbb{Q}$  vyplývá  $\cos(n+1)x \in \mathbb{Q}$  a důkaz indukcí je hotov.

Nyní už k samotné úloze: kdyby platilo  $\cos 1^\circ \in \mathbb{Q}$ , měli bychom podle dokázaného tvrzení  $\cos n^\circ \in \mathbb{Q}$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , což dává pro  $n = 30$  spor, neboť  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$ . Ke stejnému sporu dojdeme i tehdy, když připustíme, že  $\sin 1^\circ \in \mathbb{Q}$ , neboť pak by z rovnosti  $\cos 2^\circ = 1 - 2\sin^2 1^\circ$  plynulo  $\cos 2^\circ \in \mathbb{Q}$ , a tedy  $\cos 2k^\circ \in \mathbb{Q}$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , tedy i pro  $k = 15$ .

*Poznámka:* Z uvedeného postupu plyne, že  $\cos k^\circ \notin \mathbb{Q}$  pro  $k \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$  (vypsali jsme všechny kladné dělitele čísla 30). Je známo (viz [38, str. 64]), že pro  $k \in \{1, 2, 3, \dots, 89\}$  platí  $\cos k^\circ \in \mathbb{Q}$  pouze v případě  $k = 60$ .

■ **Příklad 4.7.18.** Je-li  $\cos \pi x$  racionální číslo různé od 0,  $\pm \frac{1}{2}$  a  $\pm 1$ , pak je reálné číslo  $x$  iracionální. Dokažte tuto větu pro případ, kdy hodnota  $\cos \pi x$  je rovna zlomku  $\frac{p}{q}$ , kde  $p$  je celé číslo a  $q$  je liché číslo větší než 1.<sup>65</sup>

*Řešení:* Položme  $t = \pi x$  a předpokládejme, že platí  $\cos t = \frac{p}{q}$ , kde  $p$  je celé číslo a  $q$  je liché číslo větší

<sup>64</sup>[29], str. 114.

<sup>65</sup>V [41] je na str. 58–59 uveden důkaz pro zlomek  $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ .

než 1. Protože možnost  $\frac{p}{q} = \pm 1$  je zadáním vyloučena, můžeme navíc předpokládat, že čísla  $p, q$  jsou nesoudělná (po krácení zlomku  $\frac{p}{q}$  na základní tvar musí totiž vyjít zlomek s lichým jmenovatelem větším než 1). Indukcí vzhledem k číslu  $n$  dokážeme, že  $\cos nt$  je racionální číslo tvaru

$$\cos nt = \frac{p_n}{q^n},$$

kde pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $p_n$  celé číslo nesoudělné s číslem  $q$ . Protože  $\cos t = \frac{p}{q}$ , je  $p_1 = p$  a z rovnosti

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 = 2 \frac{p^2}{q^2} - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q^2}$$

plyne  $p_2 = 2p^2 - q^2$ . Proč je číslo  $p_2$  (stejně jako číslo  $p$ ) s číslem  $q$  nesoudělné? Kdyby některé prvočíslo  $r$  dělilo obě čísla  $2p^2 - q^2$  a  $q$ , bylo by  $r$  liché (protože  $q$  je liché) a dělilo by i číslo  $2p^2$ , takže by i dělilo i číslo  $p$ . Čísla  $p, q$  by tak měla společný prvočinitel  $r$ , což je spor.

Předpokládejme nyní, že pro některé  $n \geq 2$  platí

$$\cos(n-1)t = \frac{p_{n-1}}{q^{n-1}}, \quad \cos nt = \frac{p_n}{q^n}$$

a obě čísla  $p_{n-1}, p_n$  jsou s číslem  $q$  nesoudělná (tak je tomu, jak už víme, pro  $n = 2$ ). Pak z rovnosti

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2 \cos nt \cos t$$

dostáváme

$$\cos(n+1)t = 2 \cdot \frac{p_n}{q^n} \cdot \frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q^{n-1}} = \frac{2pp_n - q^2 p_{n-1}}{q^{n+1}},$$

takže platí  $p_{n+1} = 2pp_n - q^2 p_{n-1}$ . Kdyby nějaké prvočíslo  $r$  dělilo obě čísla  $p_{n+1}$  a  $q$ , bylo by lichým dělitelem čísla  $2pp_n$ , takže by dělilo aspoň jedno z čísel  $p, p_n$ , což je však ve sporu s jejich nesoudělností s číslem  $q$ . Proto je s číslem  $q$  nesoudělné i číslo  $p_{n+1}$  a důkaz indukce je hotov.

Dokázali jsme, že z rovnosti  $\cos \pi x = \frac{p}{q}$  plyne

$$\cos \pi n x = \frac{p_n}{q^n}$$

pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , přičemž  $p_n$  je číslo nesoudělné s číslem  $q > 1$ , což v důsledku znamená, že

$$\cos \pi n x \neq \pm 1.$$

Odtud vidíme, že číslo  $n x$  není celé pro žádné  $n \in \mathbb{N}$ , a tedy samo číslo  $x$  je nutně iracionální.

## Kapitola 5

# Hlubší trigonometrické vztahy

### 5.1 Trigonometrické identity

Trigonometrie, jak jsme ji poznali v kapitolách 2 a 3, je matematický obor, který vznikl z potřeb lidí prakticky počítat délky stran a velikosti úhlů konkrétních trojúhelníků. K tomu matematikové vyvinuli aparát goniometrických funkcí, s jejichž pomocí dokázali teoreticky vyjádřit vztahy mezi zkoumanými prvky obecného rovinného trojúhelníku. Patří k nim nejen strany a vnitřní úhly, ale také výšky a těžnice trojúhelníku, poloměry opsané, vepsané a připsaných kružnic, délky os vnitřních úhlů. Seznam těchto prvků lze dále rozšiřovat např. o úhly mezi stranami a těžnicemi, vzdálenosti různých významných bodů, jako jsou průsečík výšek, těžiště, středy již zmíněných kružnic apod. Čeští zájemci o tyto výsledky dobře znají knihu [27], která je jejich bohatou kolekcí opatřenou podrobnými důkazy. Nebudeme proto výsledky odtud reprodukovat, místo toho se zaměříme detailně na vztahy, ve kterých vystupují pouze hodnoty goniometrických funkcí argumentů rovných vnitřním úhlům  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku  $ABC$  nebo různým jejich násobkům. Takové vztahy se objevují v rozličných příručkách či sbírkách v nepřeberném množství, nejznámější z nich (uvedené i v knize [29]) se „vytrvale“ opakují, proto v celém textu nebudeme uvádět žádné odkazy. Jeho přínosem bude výklad s důrazem na vzájemné souvislosti jednotlivých vztahů a metodologii jejich odvozování způsobem, jaký jsme v literatuře v takto ucelené podobě nenašli. Využijeme k tomu samozřejmě aparát goniometrických vzorců z předchozí kapitoly.

Výchozím poznatkem pro náš výklad bude závislost tří kosinů

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1,$$

kterou jsme v podkapitole 3.4 odvodili jako lineárně-algebraický důsledek trigonometrické věty o průmětech, tedy bez užití jakéhokoliv goniometrického vzorce. S ohledem na zaměření našeho textu nebude zbytečné, když nyní podáme ještě druhý důkaz uvedené základní *trigonometrické identity*.<sup>1</sup> Psali jsme o ní i v řešení příkladu 4.5.13, v němž jsme se na důkaz této identity, který uvedeme až nyní, odvolali. Z rovnosti  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  plyne  $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ , takže rozdíl levé a pravé strany

---

<sup>1</sup>Termínem *identita* budeme zdůrazňovat, že dotčený vztah platí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku.

dokazované identity můžeme s využitím běžných goniometrických vzorců upravit takto:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = \\
 & = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) [2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)] - 1 = \\
 & = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - 1 = \\
 & = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \cdot (\cos[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] + \cos[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)]) - 1 = \\
 & = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 2\beta}{2} - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Tím je druhý důkaz ukončen. Jeho přínos spočívá v tom, že jsme zkoumanou rovnost odvodili z jediného předpokladu  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , který splňují i jiné trojice  $(\alpha, \beta, \gamma)$  reálných čísel než ty, které jsou vnitřními úhly některého trojúhelníku – takové jsou právě ty trojice  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , jež jsou tvořeny *kladnými* čísly, neboť z rovnosti  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  pak plyne  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ . Jak uvidíme, je to společný rys většiny trigonometrických identit, že totiž platí pro každou trojici z množiny

$$\mathcal{T} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha + \beta + \gamma = \pi\},$$

zatímco trojice vnitřních úhlů všech trojúhelníků tvoří užší množinu

$$\mathcal{T}_+ = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^3 : \alpha + \beta + \gamma = \pi\},$$

kde  $\mathbb{R}_+$  značí interval  $(0, \infty)$ . První výsledek této kapitoly tedy zapíšeme vztahem

$$\boxed{\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \quad (5.1)$$

a z provedeného důkazu ještě „vytěžíme“ metodický obrat: pro libovolnou funkci  $F$  tří proměnných platí implikace, kterou zapíšeme v neobvyklém směru<sup>2</sup>

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \Leftarrow \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : F(\alpha, \beta, \pi - \alpha - \beta) = 0. \quad (5.2)$$

Přináší práce s množinou  $\mathcal{T}$  (namísto  $\mathcal{T}_+$ ) při zkoumání trigonometrických identit nějaké skutečné (neformální) výhody? Kladnou odpověď nám přinese úvaha o dvou implikacích

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} & \Rightarrow \left( \frac{\pi - \alpha}{2}, \frac{\pi - \beta}{2}, \frac{\pi - \gamma}{2} \right) \in \mathcal{T}, \\
 (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} & \Rightarrow (\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma) \in \mathcal{T},
 \end{aligned}$$

kteří platí díky tomu, že z  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  plynou rovnosti

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\pi - \beta}{2} + \frac{\pi - \gamma}{2} & = \frac{3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} = \frac{3\pi - \pi}{2} = \pi, \\
 (\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) & = 3\pi - 2(\alpha + \beta + \gamma) = 3\pi - 2\pi = \pi.
 \end{aligned}$$

K odvozovacímu pravidlu (5.2) tak můžeme připojit další dvě pravidla, totiž

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F\left(\frac{\pi - \alpha}{2}, \frac{\pi - \beta}{2}, \frac{\pi - \gamma}{2}\right) = 0 \quad (5.3)$$

<sup>2</sup>Místo implikace jsme samozřejmě mohli napsat ekvivalenci, chtěli jsme však zdůraznit směr, který při odvozování identit využíváme.

a

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F(\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma) = 0. \quad (5.4)$$

Kdybychom pracovali pouze s množinou  $\mathcal{T}_+$ , byli bychom „ochuzeni“ o pravidlo (5.4), neboť hodnoty  $\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma$  jsou kladné pouze v případě, kdy trojice  $(\alpha, \beta, \gamma)$  je tvořena vnitřními úhly *ostrohleho* trojúhelníku, takže rovnost  $F(\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma) = 0$  bychom museli pro ostatní trojúhelníky dokazovat jinými prostředky.

Seznam pravidel pro odvozování složitějších trigonometrických identit bychom mohli neomezeně rozšiřovat, například přidat pravidlo

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F(2\pi - 5\alpha, 2\pi - 5\beta, 2\pi - 5\gamma) = 0,$$

pro účel našeho textu jsou však výše uvedená pravidla postačující.

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom z jediného základního výsledku (5.1) odvodili osm dalších trigonometrických identit. Nejprve užitím pravidel (5.3) a (5.4) díky převodním vzorcům

$$\cos \frac{\pi - x}{2} = \sin \frac{x}{2} \quad \text{a} \quad \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x$$

z identity (5.1) obdržíme

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \quad (5.5)$$

a

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma = 1 + 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma. \quad (5.6)$$

Rovnosti (5.1), (5.5) a (5.6) lze na základě goniometrických jednotek přepsat do vyjádření pro součty

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \quad \text{a} \quad \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma;$$

podobně na základě vzorců

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \text{a} \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

lze tytéž výsledky (5.1), (5.5) a (5.6) převést na identity pro součty

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma, \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \quad \text{a} \quad \cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma.$$

Shrneme-li všechny zmíněné důsledky (5.1), dostaneme přehlednou tabulku rovností

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$	$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$
$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$	$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$
$\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma = 1 + 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$	$\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma = 2 - 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$
$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$	$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$	$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
$\cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma = -1 + 4 \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$	$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$

s výjimkou posledních tří vztahů z pravého sloupce, které patrně žádnou algebraicky snadno vyjádřitelnou souvislost s ostatními identitami nemají. Dříve než se budeme věnovat jejich důkazům, povšimněme si tvaru pravých stran rovností z celé tabulky: jsou v nich zastoupeny všechny součiny tvaru  $f(k\alpha)f(k\beta)f(k\gamma)$ , kde  $f$  je libovolná z funkcí sinus, kosinus a  $k \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ .

Dokážeme-li jeden ze tří dosud neověřených vztahů

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}: \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad (5.7)$$

budeme moci k (5.7) uplatnit pravidla (5.3) a (5.4) a získat tak zbývající dvě identity pro součty  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$  a  $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma$  díky převodním vztahům

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \sin \frac{\pi - x}{2} = \cos \frac{x}{2}, \quad \sin 2(\pi - 2x) = -\sin 4x, \quad \sin(\pi - 2x) = \sin 2x.$$

Zabývejme se proto pouze důkazem (5.7). Využijeme při něm (i když ne úplně důsledně) osvědčené univerzální pravidlo (5.2). Ze substituce  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$  plynoucí vztahy  $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$  a  $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$  aplikujeme spolu s běžnými vzorci takto:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}_{=} &= \underbrace{2 \sin(\alpha + \beta)}_{=} \cos(\alpha - \beta) + \underbrace{2 \sin \gamma}_{=} \cos \gamma = \\ &= 2 \sin \gamma [\underbrace{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}_{=}] = 2 \sin \gamma \cdot 2 \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Důkaz (5.7) je hotov, takže všechny rovnosti z naší tabulky platí pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ . Z řady jejich důsledků vypíšeme ještě dvojici identit s poměrně jednoduchým zápisem

$$\begin{array}{l} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\beta + \gamma}{4} \cos \frac{\gamma + \alpha}{4} \\ \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{4} \sin \frac{\beta + \gamma}{4} \sin \frac{\gamma + \alpha}{4} \end{array}$$

plynoucích z identit pro  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$  a  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$  užitím odvozovacího pravidla (5.3), převodních vztahů  $\sin x = \cos y$  za podmínky  $x + y = \frac{\pi}{2}$  a rovností

$$\frac{\pi - \alpha}{4} = \frac{\beta + \gamma}{4}, \quad \frac{\pi - \beta}{4} = \frac{\alpha + \gamma}{4}, \quad \frac{\pi - \gamma}{4} = \frac{\alpha + \beta}{4}.$$

K první uvedené tabulce ještě dodejme, že poslední tři rovnosti z jejího pravého sloupce se v literatuře někdy zapisují v podobě z následující tabulky:

$$\begin{array}{l} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = 2 \\ \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = 2 \\ \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\beta \sin 2\gamma} + \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma} + \frac{\cos 2\gamma}{\sin 2\alpha \sin 2\beta} = -2 \end{array}$$

Odvodíme je, když užijeme vzorec  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  pro sčítance z levých stran rovností z tabulky a poté rovnosti vydělíme součiny z jejich pravých stran. Zdůrazněme, že vypsané rovnosti platí jen pro ty trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ , pro něž mají zastoupené zlomky nenulové jmenovatele. Znamená to, že první dvě z těchto tří rovností platí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku, u třetí rovnosti však musíme předpokládat, že trojúhelník není pravoúhlý.

V druhé části našeho výkladu o trigonometrických identitách s funkcemi sinus a kosinus uvedeme a dokážeme zajímavé vztahy poněkud jiného druhu, totiž

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}: \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad (5.8)$$

a

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}: \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma. \quad (5.9)$$

Pro rozdíl levé strany a pravé strany rovnosti z (5.8) platí

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + (\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) = \\ & = \cos \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta) + \sin \gamma \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \pi = 0, \end{aligned}$$

čímž je důkaz (5.8) ukončen. Podobně přistoupíme i k důkazu (5.9), kdy upravíme rozdíl levé strany rovnosti a součinu  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  z pravé strany:

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) + (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) = \\ & = \sin \gamma \cdot \sin(\alpha + \beta) - \cos \gamma \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1, \end{aligned}$$

přítom jsme znovu využili vztahů  $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$  a  $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ , známých důsledků rovnosti  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  určující trojice  $(\alpha, \beta, \gamma)$  z  $\mathcal{T}$ . Tím je i důkaz (5.9) hotov. Je možné, že k výsledkům (5.8) a (5.9) přivedl matematiky nápad využít rovnosti

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \quad \text{a} \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1$$

a rozvinout jejich levé strany podle součtových vzorců na součet činitelů  $\pm f(\alpha)g(\beta)h(\gamma)$ , kde  $(f, g, h)$  jsou různé variace z funkcí sinus a kosinus.

K dokázaným vztahům (5.8) a (5.9) můžeme jako dříve uplatnit odvozovací pravidla (5.3) a (5.4). Nebudeme už tentokrát vypisovat převodní vzorce, které nás takto dovedou k celkovému závěru, že pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  platí rovnosti z další tabulky:

$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ & \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ & \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ & \sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\gamma + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\gamma = \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma \\ & \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma + \sin 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\gamma + \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\gamma = -1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \end{aligned}$
---

Všimněme si, že v pravých stranách všech šesti zapsaných rovností vystupují stejné součiny  $f(k\alpha)f(k\beta)f(k\gamma)$ , které jsme vypořizovali v pravých stranách rovností z první tabulky. Z dvojích vyjádření těchto součinů tak můžeme získat řadu dalších (poněkud „delších“) trigonometrických identit, jako je například vztah

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}: (\sin^2 2\alpha + \dots) + 2(\cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma + \dots) = 0,$$

v obou závorkách jsme vypsali pouze první ze tří sčítanců příslušných symetrických součtů. Poznamenejme k tomu, že jsme se dosud zabývali pouze trigonometrickými rovnostmi  $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ , ve kterých byla  $F$  symetrická funkce proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$ . Trigonometrické identity bez této vlastnosti takový význam v teorii nemají a najdeme je v literatuře jen poskrovnu. Příkladem je vztah

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}: \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin \gamma = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta,$$

jehož ověření je triviální, když za  $\sin \gamma$  dosadíme  $\sin(\alpha + \beta)$  a upravíme. Za pozornost stojí i další nesymetrická identita, kterou dostaneme, když v rovnosti z kosinové věty nahradíme délky  $a, b, c$  stran trojúhelníku  $ABC$  trojicí hodnot  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ , jež je podle sinové věty trojici  $a, b, c$  úměrná:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Poslední rovnost tedy platí pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$ . Abychom ji dokázali i pro všechny trojice z  $\mathcal{T}$ , mohli bychom zvolit osvědčený postup eliminace jedné z proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$  a následných ekvivalentních úprav. Poučňější však bude, když zkoumanou rovnost porovnáme s první rovností z pravého sloupce dříve uvedené tabulky, kterou zřejmou úpravou přepíšeme do tvaru

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Vidíme, že z této již dokázané identity dostaneme novou identitu evokující kosinovou větu pomocí nového odvozovacího pravidla

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : F\left(\pi - \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 0,$$

jehož platnost plyne ze zřejmého výpočtu

$$(\pi - \alpha) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi - \pi = \pi.$$

Tímto novým pravidlem lze „opracovat“ každou ze symetrických rovností původní tabulky a získat tak novou tabulku nesymetrických identit pro trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ , kterou nyní uvedeme. Podrobná odvození pro jejich zřejmost zde vypisovat nebudeme, kromě nového pravidla lze v průběhu těchto výpočtů používat i dřívější pravidla (5.3), (5.4) a rovněž goniometrické jednotky spolu se vzorci  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ . Výsledné identity zapíšeme v podobě analogické jako v první tabulce na str. 165.

$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma = -1 + 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = -2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$
$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2} = -2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$	$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = -1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$
$\cos^2 2\alpha - \cos^2 2\beta - \cos^2 2\gamma = 2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$	$\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta - \sin^2 2\gamma = -1 - 2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$
$\cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma = 1 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$	$\sin \alpha - \sin \beta - \sin \gamma = -4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$
$\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma = -1 + 4 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\sin 2\alpha - \sin 2\beta - \sin 2\gamma = -4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$
$\cos 4\alpha - \cos 4\beta - \cos 4\gamma = -1 - 4 \cos 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$	$\sin 4\alpha - \sin 4\beta - \sin 4\gamma = 4 \sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$

Přejdeme nyní k trigonometrickým identitám s funkcemi tangens a kotangens. Protože tyto dvě funkce jsou podíly funkcí sinus a kosinus, můžeme každou takovou identitu přepsat jako identitu s funkcemi sinus a kosinus. Zápisům s funkcemi tangens a kotangens dáváme přednost zejména tehdy, když mají jednodušší tvar než příslušné zápisy s funkcemi sinus a kosinus. Nevýhodou těchto zápisů ovšem je, že pro některé trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  ztrácejí smysl, neboť hodnoty  $\operatorname{tg} x$  a  $\operatorname{cotg} x$  pro některá  $x \in \mathbb{R}$  nejsou definovány.

Prakticky všechny jednoduché trigonometrické identity s funkcemi tangens a kotangens jsou v uvedeném smyslu přepisování identit s funkcemi sinus a kosinus, které jsme dříve odvodili a zapsali šesti vztahy z tabulky na str. 167. Předpokládáme-li například, že pro trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  platí



$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \neq 0$ , jako je tomu v případě, kdy  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$ , pak po vydělení rovnosti (5.8) uvedeným součinem dostaneme rovnost

$$\cotg \alpha \cotg \beta + \cotg \alpha \cotg \gamma + \cotg \beta \cotg \gamma = 1,$$

kteřá proto platí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku.

Podobně za předpokladu  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \neq 0$  dostaneme vydělením (5.9) rovnost

$$\tg \alpha + \tg \beta + \tg \gamma = \tg \alpha \tg \beta \tg \gamma,$$

kteřá tudíž platí vždy, když trojúhelník s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  není pravouhlý. Zopakujeme-li proceduru dvojího dělení s každou z dalších identit v tabulce na str. 167, dostaneme dohromady 12 rovností, které nyní zapíšeme do dvou tabulek. V první z nich

$$\begin{aligned} \tg \alpha + \tg \beta + \tg \gamma &= \tg \alpha \tg \beta \tg \gamma \\ \tg 2\alpha + \tg 2\beta + \tg 2\gamma &= \tg 2\alpha \tg 2\beta \tg 2\gamma \\ \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2} + \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\gamma}{2} + \tg \frac{\beta}{2} \tg \frac{\gamma}{2} &= 1 \\ \cotg \alpha \cotg \beta + \cotg \alpha \cotg \gamma + \cotg \beta \cotg \gamma &= 1 \\ \cotg 2\alpha \cotg 2\beta + \cotg 2\alpha \cotg 2\gamma + \cotg 2\beta \cotg 2\gamma &= 1 \\ \cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} &= \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

jsou všechny rovnosti tvaru  $x + y + z = xyz$ , resp.  $xy + xz + yz = 1$ , jež po přepisu do podoby

$$z = \frac{x + y}{1 - xy}, \quad \text{resp.} \quad z = \frac{1 - xy}{x + y}$$

evokují součtové vzorce pro tangens a kotangens a tak naznačují, že rovnosti z tabulky lze dokázat přímým postupem pomocí substituce  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ . Ve druhé tabulce

$$\begin{aligned} \tg \alpha \tg \beta + \tg \alpha \tg \gamma + \tg \beta \tg \gamma &= 1 + \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \\ \tg 2\alpha \tg 2\beta + \tg 2\alpha \tg 2\gamma + \tg 2\beta \tg 2\gamma &= 1 - \frac{1}{\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma} \\ \tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2} + \tg \frac{\gamma}{2} &= \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2} \tg \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \\ \cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma &= \cotg \alpha \cotg \beta \cotg \gamma + \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ \cotg 2\alpha + \cotg 2\beta + \cotg 2\gamma &= \cotg 2\alpha \cotg 2\beta \cotg 2\gamma - \frac{1}{\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma} \\ \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} &= 1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

jsou zapsány složitější rovnosti, ve kterých vystupuje vždy dvojice funkcí tangens a kosinus, resp. kotangens a sinus. Zdůrazněme, že každá z 12 rovností v posledních dvou tabulkách platí vždy pro všechny ty trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ , pro které mají všechny zastoupené hodnoty funkce tangens, resp. kotangens smysl.

Na úplný závěr našeho výkladu o trigonometrických identitách uveďme pozoruhodnou skutečnost, že tutéž poměrně jednoduchou algebraickou rovnicí

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 2(1 + xyz)$$

splňují hodnoty  $x, y, z$  rovné jednak  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}$ , jednak  $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{4}, \operatorname{cotg} \frac{\beta}{4}, \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{4}$  pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ , pro kterou je uvedená trojice hodnot tangens, resp. kotangens definována. Oba dotyčné vztahy

$$\begin{aligned} (1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}) (1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}) (1 + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4}) &= 2 + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4} \\ (1 + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{4}) (1 + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{4}) (1 + \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{4}) &= 2 + 2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{4} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{4} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{4} \end{aligned}$$

ověříme současně tak, že je předem přepíšeme do téže identity

$$\left( \sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \right) \left( \sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\beta}{4} \right) \left( \sin \frac{\gamma}{4} + \cos \frac{\gamma}{4} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} \sin \frac{\gamma}{4} + 2 \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} \cos \frac{\gamma}{4}.$$

Tu nyní dokážeme tak, že nejprve v levé straně roznásobíme jen podle třetí závorky, členy z pravé strany převedeme na levou stranu, v níž pak členy sdružíme do dvojic částečným vytýkáním. Dostaneme ekvivalentní rovnost  $A \sin \frac{\gamma}{4} + B \cos \frac{\gamma}{4} = 0$  s koeficienty  $A, B$ , které vypíšeme a rovnou upravíme:

$$\begin{aligned} A &= \left( \sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \right) \left( \sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\beta}{4} \right) - 2 \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} = \\ &= \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} - \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} = \sin \frac{\alpha + \beta}{4} + \cos \frac{\alpha + \beta}{4}, \\ B &= \left( \sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \right) \left( \sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\beta}{4} \right) - 2 \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} = \\ &= \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} + \sin \frac{\alpha}{4} \sin \frac{\beta}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4} = \sin \frac{\alpha + \beta}{4} - \cos \frac{\alpha + \beta}{4}. \end{aligned}$$

Proto s ohledem na  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  platí

$$\begin{aligned} A \sin \frac{\gamma}{4} + B \cos \frac{\gamma}{4} &= \left( \sin \frac{\alpha + \beta}{4} + \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \right) \sin \frac{\gamma}{4} + \left( \sin \frac{\alpha + \beta}{4} - \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \right) \cos \frac{\gamma}{4} = \\ &= \left( \sin \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\gamma}{4} + \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \sin \frac{\gamma}{4} \right) - \left( \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\gamma}{4} - \sin \frac{\alpha + \beta}{4} \sin \frac{\gamma}{4} \right) = \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4} - \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4} = \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \end{aligned}$$

a tím je zkoumaná identita dokázána pro každou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ .

## 5.2 Trigonometrické nerovnosti

V druhé části naší kapitoly věnované hlubším trigonometrickým vztahům se budeme věnovat *nerovnostem* pro různé goniometrické výrazy závislé na vnitřních úhlech  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku. Jednotlivé příklady takových nerovností najdeme především ve sbírkách úloh matematických soutěží, asi desítku nejznámějších nerovností je dokázána v kapitole II knížky [33]. Snad nejúplnější přehled dotyčných nerovností je podán v kapitole 2 sbírky [23], u většiny ze zhruba 60 zařazených příkladů je však namísto důkazu uveden odkaz na časopisecký zdroj, odkud byl výsledek převzat. Využijme proto – stejně jako u trigonometrických identit – příležitost k ucelenějšímu výkladu o trigonometrických nerovnostech, nežli mohou podat autoři sbírek při řešení izolovaných úloh. Elementárnímu úvodu do zkoumané problematiky jsme nedávno věnovali článek [39].

Začneme metodickým výkladem postupů, které využíváme při důkazech tvrzení, že určitá nerovnost  $F(\alpha, \beta, \gamma) \geq 0$  platí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  každého trojúhelníku. V podstatě je vždy možné jednu z proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$  eliminovat, tedy například dosadit  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ , poté dokazovat nerovnost  $F(\alpha, \beta, \pi - \alpha - \beta) \geq 0$  pro libovolná  $\alpha, \beta \in (0, \pi)$  splňující podmínku  $\alpha + \beta < \pi$ . Pokud však máme k dispozici nějakou trigonometrickou identitu s výrazem zastoupeným v zadané funkci  $F$ , vyplatí se často od zmíněné eliminace upustit a hledat rovnou algebraický důkaz původní nerovnosti  $F(\alpha, \beta, \gamma) \geq 0$ . U většiny příkladů přitom vystačíme s poznatkami o kvadratických nerovnostech a se znalostí některých klasických nerovností, jakými jsou zejména nerovnosti mezi kvadratickým, aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem nebo Cauchyova-Schwarzova nerovnost.<sup>3</sup> Uveďme proto nejdříve přehled nerovností, které budeme v našich důkazech skutečně potřebovat. Budou to především kvadratické nerovnosti

$$\begin{aligned} \text{N1: } xy + xz + yz &\leq x^2 + y^2 + z^2, & \text{N2: } (x + y + z)^2 &\leq 3(x^2 + y^2 + z^2), \\ \text{N3: } 3(xy + xz + yz) &\leq (x + y + z)^2, \end{aligned}$$

kteří splňují libovolná *reálná* čísla  $x, y, z$ . Pro rozdíl pravé a levé strany nerovnosti N1 totiž platí

$$(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz + yz) = \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(x - z)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2,$$

což je kladná hodnota, neplatí-li  $x = y = z$ , kdy v N1 nastane rovnost. Nerovnosti N2 a N3 jsou zřejmě s dokázanou nerovností N1 ekvivalentní, jak je možné se přesvědčit snadným roznásobením. Další potřebná nerovnost

$$\text{N4: } 3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$$

platí pro libovolná *nezáporná* čísla  $a, b, c$ . Plyne to z rozkladu

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

přitom druhý činitel v pravé straně je *nezáporný* podle N1. Nerovnosti mezi geometrickým, aritmetickým a kvadratickým průměrem

$$\text{N5: } \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

platí rovněž pro každou trojici *nezáporných* čísel  $a, b, c$ , neboť levá, resp. pravá nerovnost je důsledkem N4, resp. N2. Poslední potřebný výsledek, totiž nerovnosti mezi geometrickým, harmonickým průměrem a mocninným průměrem stupně  $-2$  libovolné trojice *kladných* čísel  $a, b, c$  zapíšeme v podobě upraveném tvaru

$$\text{N6: } \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{3 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)}$$

a dodáme, že nerovnosti N6 plynou z nerovností N5 po záměně čísel  $a, b, c$  čísly převrácenými. Zdůrazněme nakonec, že v kterékoliv z nerovností N1 – N6 nastane rovnost právě tehdy, když zastoupené proměnné  $x, y, z$  či  $a, b, c$  mají stejnou hodnotu.

Podaný přehled algebraických nerovností doplníme postřehem dosvědčujícím téměř nepřebornou

---

<sup>3</sup>Efektivním prostředkem důkazů řady trigonometrických nerovností je také Jensenova nerovnost pro konvexní nebo konkávní funkce. Nebudeme ji však v našem textu s ohledem na jeho elementární zaměření používat.

bohatost trigonometrických nerovností.<sup>4</sup> Jakmile například později dokážeme, že vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku splňují vztah

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4},$$

bude to podle N5 a N6 znamenat, že rovněž platí nerovnosti

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}, \\ \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} &\geq 2\sqrt{3}, & \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} &\geq 4 \end{aligned}$$

(neboť funkce sinus je na  $(0, \pi)$  kladná). Díky identitě  $\sin^2 x \cdot (1 + \cotg^2 x) = 1$  lze ještě poslední nerovnost přepsat jako „další“ výsledek

$$\cotg^2 \alpha + \cotg^2 \beta + \cotg^2 \gamma \geq 1.$$

Z pohledu na takové skupiny provázaných nerovností je zajímavá situace u hodnot  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  splňujících, jak se později ukáže, dvě opačným směrem „zaměřené“ nerovnosti

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4},$$

takže číslo  $\frac{1}{2}$  vždy leží mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem těchto tří kosinů.

K metodice dokazování trigonometrických nerovností učiňme ještě jednu důležitou poznámku. Jak jsme se přesvědčili v první části této kapitoly, prakticky všechny identity pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku, tedy pro trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$ , bylo možné dokázat pro širší obor  $\mathcal{T}$  všech trojic reálných čísel  $\alpha, \beta, \gamma$  svázaných podmínkou  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Nebylo to samoúčelné, neboť jsme tím získali možnost využít obě odvozovací pravidla (5.3) a (5.4), které nyní připomeneme zápisy příslušných transformací trojic

$$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \left( \frac{\pi - \alpha}{2}, \frac{\pi - \beta}{2}, \frac{\pi - \gamma}{2} \right) \quad \text{a} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma), \quad (5.10)$$

zatímco v množině  $\mathcal{T}_+$  bychom mohli používat pouze první transformaci. U trigonometrických nerovností je stejné rozšíření oboru  $\mathcal{T}_+$  na obor  $\mathcal{T}$  obecně nemožné ze zřejmého důvodu, který doložíme jednoduchým příkladem: trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$  jistě splňují nerovnost

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > 0,$$

jejíž levá strana má však například pro trojici  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 2\pi) \in \mathcal{T}$  hodnotu  $-2$ . Proto také v literatuře najdeme příklady nerovností, které platí pouze pro vnitřní úhly ostroúhlých nebo tupouhlých trojúhelníků. Na druhou stranu je pozoruhodné, že trigonometrické nerovnosti s širším oborem pravdivosti  $\mathcal{T}$  existují a jsou natolik významné, že je lze využít k důkazům většiny běžně uváděných nerovností s oborem  $\mathcal{T}_+$ . Věnujeme jim první část následujícího výkladu, v níž tedy budeme moci využívat obě zmíněná odvozovací pravidla. Ta sice byla ve vztazích (5.3) a (5.4) zapsaná pro *rovnosti*, avšak je jasné, že platí pro jakékoliv *výrokové formy* proměnných  $\alpha, \beta, \gamma$  s definičním oborem  $\mathcal{T}$ , tedy i pro *nerovnosti*.

<sup>4</sup>K sestavování dalších trigonometrických nerovností lze využít také mocninné průměry dalších stupňů i exponenciální nebo logaritmickou funkci.

Jako první uvedeme a dokážeme trigonometrickou nerovnost, která bude v dalších úvahách hrát podobnou prioritní úlohu, jakou sehrála v našem výkladu trigonometrických identit závislost tří kosinů zapsaná vztahem (5.1). Její zápis s uvedením oboru

$$\boxed{\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}} \quad (5.11)$$

ještě doplníme konstatováním, že rovnost v (5.11) je možná jen tehdy, když platí rovnosti  $|\cos \alpha| = |\cos \beta| = |\cos \gamma| = \frac{1}{2}$ . Celý důkaz založený na základní identitě (5.1) provedeme tak, že pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  ověříme platnost implikace s opačnou nerovností

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad |\cos \alpha| = |\cos \beta| = |\cos \gamma| = \frac{1}{2}. \quad (5.12)$$

Předpokládejme tedy, že nerovnost z (5.12) pro určitou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  platí. Pak z (5.1) vyplývá

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4},$$

takže z nerovnosti N4 s čísly  $a = |\cos \alpha|^{\frac{2}{3}}, b = |\cos \beta|^{\frac{2}{3}}, c = |\cos \gamma|^{\frac{2}{3}}$  s ohledem na odvozenou nerovnost  $a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{3}{4}$  plyne

$$3|\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma|^{\frac{2}{3}} \leq \frac{3}{4} \quad \text{neboli} \quad |\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma| \leq \frac{1}{8}.$$

To spolu s nerovností z (5.12) znamená, že  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{8}$  a že nerovnost N4 byla použita pro tři sobě rovná čísla, tedy  $|\cos \alpha| = |\cos \beta| = |\cos \gamma| = \frac{1}{2}$ . Tím je důkaz hotov. Dodejme, že rovnost v (5.11) může nastat i pro trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ , které nespĺňují podmínku  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{2}$ . Příkladem je trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3})$ , pro niž  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$  a  $\cos \beta = \cos \gamma = -\frac{1}{2}$ . Takový příklad však nenajdeme v oboru  $\mathcal{T}_+$ , v němž rovnost  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{8}$  zaručuje, že všechny tři hodnoty  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  jsou kladné, a proto je splněna pouze v případě  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

Uplatníme-li k dokázanému výsledku (5.11) obě odvozovací pravidla založená na transformacích (5.10), pak vzhledem ke zřejmým důsledkům převodních vzorců

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi - \alpha}{2} \cos \frac{\pi - \beta}{2} \cos \frac{\pi - \gamma}{2} &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \cos(\pi - 2\alpha) \cos(\pi - 2\beta) \cos(\pi - 2\gamma) &= -\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \end{aligned}$$

dostaneme dvě nové trigonometrické nerovnosti s oborem pravdivosti  $\mathcal{T}$ , totiž

$$\boxed{\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T} : \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8} \quad \wedge \quad \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \geq -\frac{1}{8}}, \quad (5.13)$$

přítom jednotlivé rovnosti znamenají, že absolutní hodnoty všech tří zastoupených činitelů jsou rovny  $\frac{1}{2}$ .

Výsledky (5.11) a (5.13) umožňují odhadnout pravé strany devíti z 12 rovností v tabulce identit na straně 165. Tímto způsobem dostaneme 9 nových trigonometrických nerovností, které platí pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ . Zapišeme je do následující tabulky.

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$	$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$	$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$
$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$	$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$	$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$
$\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma \geq \frac{3}{4}$	$\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma \leq \frac{9}{4}$	$\cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma \geq -\frac{3}{2}$

Snadným rozbořem podmínek uvedených k případům rovností v (5.11) a (5.13) lze zjistit, že v případě  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$  rovnosti v prvních dvou řádcích tabulky nastanou, právě když je trojúhelník s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  rovnostranný; u rovností ze třetího řádku jsou to navíc trojúhelníky s vnitřními úhly  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$  a  $\frac{2\pi}{3}$ . Zdůrazněme, že všechny nerovnosti z tabulky jsme odvodili z výchozí „součinnové“ nerovnosti (5.11), která nás nejdříve přivedla k součinným nerovnostem (5.13).<sup>5</sup> Další významné důsledky dosud odvozených nerovností platné v oboru  $\mathcal{T}$  zapíšeme do druhé tabulky. Zdůvodnění zařazených nerovností uvedeme vzápětí.

$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$	$ \sin \alpha  +  \sin \beta  +  \sin \gamma  \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\left  \cos \frac{\alpha}{2} \right  + \left  \cos \frac{\beta}{2} \right  + \left  \cos \frac{\gamma}{2} \right  \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$ \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma  \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
$ \sin 2\alpha  +  \sin 2\beta  +  \sin 2\gamma  \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\left  \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right  \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
$ \sin 4\alpha  +  \sin 4\beta  +  \sin 4\gamma  \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$ \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma  \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

První nerovnost z levého sloupce pro součet  $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}$  bychom ještě mohli připsat do první tabulky, neboť je podle odvozovacích pravidel ekvivalentní s výsledkem o součtu  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ . Ostatní nerovnosti druhé tabulky tuto vlastnost již nemají, jsou to skutečně „nevratné“ algebraické důsledky nerovností první tabulky. Vysvětlíme to pouze pro první dvě nerovnosti z pravého sloupce, neboť zbylých pět nerovností tabulky z nich opět plyne užitím transformací (5.10). Zmíněné dvě nerovnosti jsou odhady součtu  $a + b + c$  a součinu  $abc$  pro hodnoty  $a = |\sin \alpha|, b = |\sin \beta|$  a  $c = |\sin \gamma|$ . Jejich platnost proto okamžitě plyne z N5, neboť podle první nerovnosti z prostředního sloupce první tabulky platí  $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{9}{4}$ . Tím jsou všechny nerovnosti druhé tabulky pro libovolnou trojici  $(a, b, c) \in \mathcal{T}$  dokázány.

Učňme ještě poznámku o absolutních hodnotách, které se objevily v druhé tabulce nerovností. Protože pro každé  $x \in \mathbb{R}$  platí  $x \leq |x|$ , mohli jsme absolutní hodnoty v tabulce vynechat a uvést tak „slabší“ výsledky. Byla by to však pro obecné trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  zbytečná ztráta. Je ovšem zřejmé, že pro trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$  je vynechání některých absolutních hodnot v tabulce ekvivalentní úprava, neboť například funkce  $\sin x$  a  $\cos \frac{x}{2}$  jsou na  $(0, \pi)$  kladné. Proto jsou například známé výsledky

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{a} \quad \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku „přesnými“ kopii nerovností, které jsme dokázali pro všechny trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$ . Na druhou stranu není možné pro obecnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  připsat absolutní hodnoty sčítancům první nerovnosti levého sloupce tabulky, neboť například pro trojici  $(3\pi, -\pi, -\pi) \in \mathcal{T}$  platí

$$\left| \sin \frac{3\pi}{2} \right| + \left| \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right| + \left| \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right| = |-1| + |-1| + |-1| = 3.$$

Stejně tak nelze ani „vylepšit“ tři nerovnosti z pravého sloupce první tabulky.

<sup>5</sup>Je dobré si uvědomit, že díky trigonometrickým identitám lze naopak z každé z 9 nerovností v tabulce odvodit příslušnou ze tří součinných nerovností (5.11) nebo (5.13), jež jsou ostatně také – díky transformacím (5.10) – navzájem ekvivalentními tvrzeními.

Přejdeme nyní k nerovnostem s funkcemi tangens a kotangens, které platí pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  vždy, když mají zastoupené hodnoty smysl. Využijeme přitom trigonometrické identity s funkcemi tangens a kotangens, které jsme dříve odvodili a shrnuli do dvou tabulek na str. 169. V první z nich jsou jednak rovnosti tvaru  $xy + xz + yz = 1$ , z něhož podle nerovností N1 a N3 plynou odhady

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \quad \text{a} \quad (x + y + z)^2 \geq 3 \quad \text{neboli} \quad |x + y + z| \geq \sqrt{3},$$

jednak rovnosti tvaru  $x + y + z = xyz$ , z něhož podle N2 a N3 vyplývá

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{x^2 y^2 z^2}{3} \quad \text{a} \quad xy + xz + yz \leq \frac{x^2 y^2 z^2}{3}.$$

Dostáváme tak první skupinu nerovností

$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} &\geq 1 & \left  \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right  &\geq \sqrt{3} \\ \operatorname{cotg}^2 \alpha + \operatorname{cotg}^2 \beta + \operatorname{cotg}^2 \gamma &\geq 1 &  \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma  &\geq \sqrt{3} \\ \operatorname{cotg}^2 2\alpha + \operatorname{cotg}^2 2\beta + \operatorname{cotg}^2 2\gamma &\geq 1 &  \operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{cotg} 2\beta + \operatorname{cotg} 2\gamma  &\geq \sqrt{3} \end{aligned}$ $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma \geq \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma}{3} \geq \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ $\operatorname{tg}^2 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\beta + \operatorname{tg}^2 2\gamma \geq \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^2 2\beta \operatorname{tg}^2 2\gamma}{3} \geq \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\gamma + \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma$ $\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$
---

s platností v oboru  $\mathcal{T}$  s výše zmíněným omezením.

K odvození nerovností plynoucích z druhé tabulky identit na str. 169 uplatníme dříve získané odhady pro součiny typu  $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)$ . Tak podle základní nerovnosti (5.11) pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma)$  platí, že hodnota součinu  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  leží v intervalu  $\langle -1, \frac{1}{8} \rangle$ , jehož levá mez je zaručena triviálními odhady  $|\cos x| \leq 1$  pro  $x = \alpha, \beta, \gamma$ . Odtud plyne poznatek

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}: \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \in (-\infty, -1) \cup \langle 8, \infty \rangle,$$

z něhož podle identity pro součet  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$  vyplývá odhad

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \in (-\infty, 0) \cup \langle 9, \infty \rangle.$$

Podobně z dříve odvozené nerovnosti  $|\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$  plyne

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}: \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma|} \geq \frac{8\sqrt{3}}{9},$$

takže z identity pro součet  $\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma$  vychází odhad

$$|\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma - \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma| \geq \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Takovým postupem získáme druhou skupinu nerovností s funkcemi tangens a kotangens platných v oboru  $\mathcal{T}$ , které zapíšeme do následující tabulky, a to v pořadí odpovídajícím příslušným identitám z výše zmíněné tabulky.

$$\begin{array}{l}
 \operatorname{tga} \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \in (-\infty, 0) \cup (9, \infty) \\
 \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\gamma + \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma \in (-\infty, 0) \cup (9, \infty) \\
 \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right| \geq \frac{8\sqrt{3}}{9} \\
 |\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma - \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma| \geq \frac{8\sqrt{3}}{9} \\
 |\operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{cotg} 2\beta + \operatorname{cotg} 2\gamma - \operatorname{cotg} 2\alpha \operatorname{cotg} 2\beta \operatorname{cotg} 2\gamma| \geq \frac{8\sqrt{3}}{9} \\
 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \in (-\infty, 0) \cup (9, \infty)
 \end{array}$$

Zdůrazněme ještě jednou, že odhady v tabulce platí pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$  vždy, když mají všechny hodnoty v příslušné nerovnosti smysl.

V druhé části našeho výkladu se budeme věnovat nerovnostem, které platí pro libovolné trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$ , tedy trojice tvořené vnitřními úhly trojúhelníků. Platí pro ně samozřejmě všechny dosud odvozené nerovnosti, z nichž mnohé budeme schopni ještě upřesnit, avšak také řada nových nerovností, a to díky tomu, že hodnoty  $\alpha, \beta, \gamma$  leží v intervalu  $(0, \pi)$ . Všechny tyto nerovnosti uvedeme přehledně v několika tabulkách podle zastoupených goniometrických funkcí. Za každou tabulku vždy vzápětí uvedeme zdůvodnění nerovností, které jsme do tabulky zahrnuli.

Nejdříve uvedeme tabulku nerovností s funkcí sinus, které platí pro všechny trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$ .

$$\begin{array}{ll}
 0 < \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4} & 1 > \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4} \\
 0 < \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} & 1 < \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2} \\
 0 < \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} & 0 < \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8} \\
 \infty > \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \geq 2\sqrt{3} & \infty > \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 6 \\
 \infty > \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \geq 4 & \infty > \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \geq 12
 \end{array}$$

Všimněme si, že v zapsaných nerovnostech vystupují pouze hodnoty  $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$  a  $\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\gamma}{2}$ , které jsou v  $\mathcal{T}_+$  kladné. Víme již, že první neostrá nerovnost v levém sloupci a první dvě neostré nerovnosti v pravém sloupci platí dokonce v oboru  $\mathcal{T}$ . Ostatní neostré nerovnosti jsou v  $\mathcal{T}_+$  jejich algebraickými důsledky. Pro nerovnosti z levého sloupce jsme to podrobně ukázali v úvodní části této podkapitoly bezprostředně za přehledem nerovností N1 – N6. Pro neostré nerovnosti z pravého sloupce je zdůvodnění analogické – poslední tři nerovnosti plynou z nerovnosti

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$$

díky tomu, že hodnoty  $\sin \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\gamma}{2}$  jsou kladné. Ke každé neostré nerovnosti v tabulce lze dodat, že rovnost v ní nastane, jedině když  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ . To ostatně bude platit pro neostré nerovnosti i v dalších tabulkách, nebudeme to proto již zmiňovat (nenastane-li rovnost jindy).

Pokud jde o ostré nerovnosti v předchozí tabulce, ty s číslem 0, resp.  $\infty$  na levé straně jsou splněny triviálně. Jejich zápisem chceme zdůraznit, že výraz na pravé straně nerovnosti může nabývat



libovolně malé, resp. velké kladné hodnoty. Dosvědčují to příklady trojice

$$\alpha = \varepsilon, \quad \beta = \varepsilon, \quad \gamma = \pi - 2\varepsilon \quad (5.14)$$

s malým parametrem  $\varepsilon > 0$ . Stejně trojice dokazují i přesnost ostrých nerovností s číslem 1 na levé straně, které však nejsou triviální. Jejich platnost plyne z identit

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} &= 1 + 4 \sin \frac{\pi - \alpha}{4} \sin \frac{\pi - \beta}{4} \sin \frac{\pi - \gamma}{4}, \end{aligned}$$

jejichž pravé strany jsou zřejmě menší, resp. větší než 1. Zatímco první z těchto identit jsme v podkapitole 5.1 odvodili, na druhou identitu se tam nedostalo, i když je odvození celkem jasné: stačí uplatnit odvozovací pravidlo (5.3) k identitě pro součet  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ . Tím jsou všechny nerovnosti s funkcí sinus z naší tabulky dokázány. Přidejme k nim ještě čtveřici nerovností

$0 < \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma \leq \frac{9}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
$0 < \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma \geq -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

pro hodnoty sinů dvoj- a čtyřnásobků úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$ , které v oboru  $\mathcal{T}_+$  nabývají kladných i záporných hodnot. Všechny čtyři zapsané neostré nerovnosti jsme dokázali již dříve (s absolutními hodnotami) v oboru  $\mathcal{T}$ . Proto jsou v pravém sloupci dva odhady v každém řádku zapsány nezvykle vždy dvěma neostrými nerovnostmi. Jejich opačné směry v řádcích jsme zvolili kvůli identitě, podle které se součet  $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma$  rovná  $(-4)$ -násobku součinu  $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$ . Zabývejme se proto pouze tímto součinem. Pro něj levá či pravá nerovnost přejde v rovnost, právě když bude platit

$$|\sin 2\alpha| = |\sin 2\beta| = |\sin 2\gamma| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

takže nyní (v oboru  $\mathcal{T}_+$ ) každý z úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  bude roven jedné z hodnot  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$  nebo  $\frac{2\pi}{3}$ . Kromě obvykle jediného případu  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ , kdy některá neostrá trigonometrická nerovnost přechází v rovnost, jakou je v našem případě rovnost

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

se znaménkem  $+$ , existují rovněž trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$ , pro které posuzovaná rovnost bude platit se znaménkem  $-$ . Až na pořadí prvků jsou všechny tyto trojice shodné s trojicí  $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$ . Našli jsme tak první příklad netriviální, v oboru  $\mathcal{T}_+$  obecně platné nerovnosti, v níž nastane rovnost pro trojúhelníky, které nejsou rovnostranné. (Triviálním příkladem je nerovnost  $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \geq 0$ .) Pokud jde o dvě ostré nerovnosti v poslední tabulce, první z nich je triviální; platnost druhé nerovnosti plyne z identity, podle které je součet  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$  roven součinu  $4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ . Přesnost obou ostrých nerovností znovu dosvědčují trojice (5.14).

Přejdeme k nerovnostem s funkcí kosinus, jež platí pro libovolnou trojici  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$ . Předtím než je zapíšeme do tabulky, zdůrazněme, že zatímco hodnoty  $\cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\gamma}{2}$  jsou kladné, hodnoty  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  stejně jako hodnoty  $\cos 2\alpha, \cos 2\beta, \cos 2\gamma$  mohou mít libovolná znaménka.

$3 > \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$	$2 < \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$
$1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$	$2 < \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$-1 < \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$	$0 < \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
$3 > \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$	$\infty > \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} \geq 2\sqrt{3}$
$1 > \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \geq -\frac{1}{8}$	$\infty > \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \geq 4$
$3 > \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma \geq \frac{3}{4}$	

V levém sloupci platí všechny neostré nerovnosti (jak víme) dokonce v oboru  $\mathcal{T}$ , přitom rovnosti v posledních dvou nerovnostech nastanou i pro trojice  $\alpha, \beta, \gamma$  tvořené úhly  $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ , o kterých jsme již psali u nerovností pro hodnoty  $\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma$ . Všechny ostré nerovnosti v levém sloupci – s výjimkou druhé shora – jsou triviální a uvádíme je ze stejného důvodu jako triviální nerovnosti z první tabulky. Výjimečná (netriviální) ostrá nerovnost je důsledkem identity

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

neboť druhý sčítanec na pravé straně je zřejmě kladný.

V pravém sloupci platí první neostrá nerovnost (jak víme) v oboru  $\mathcal{T}$ ; ostatní neostré nerovnosti jsou v  $\mathcal{T}_+$  jejími algebraickými důsledky. Pro triviální ostré nerovnosti v pravém sloupci, tj. pro nerovnosti s 0 a  $\infty$ , platí totéž co pro ostré nerovnosti z levého sloupce. Zbývá posoudit první dvě ostré nerovnosti z pravého sloupce (obě s číslem 2). Protože pro každé  $c \in (0, 1)$  zřejmě platí  $c > c^2$ , máme

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} > \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2},$$

takže obě posuzované ostré nerovnosti plynou z identity

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

jejíž pravá strana je větší než 2. Tím jsou všechny nerovnosti s funkcí kosinus z naší tabulky dokázány, přitom přesnost všech ostrých nerovností opět prokazují trojice (5.14).

Výklad o nerovnostech s funkcemi sinus a kosinus, které platí v oboru  $\mathcal{T}_+$ , završíme odhady součtů  $f(\alpha)f(\beta) + f(\alpha)f(\gamma) + f(\beta)f(\gamma)$ , jež jsou o to cennější, že pro tyto součty s funkcí sinus nebo kosinus neexistují žádné zjednodušující identity. Z těchto nových odhadů sestavíme další tabulku odhadů platných v oboru  $\mathcal{T}_+$ .

$0 < \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{9}{4}$	$1 < \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4}$
$-1 < \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{3}{4}$	$0 < \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{4}$
$\infty > \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{1}{\sin \alpha \sin \gamma} + \frac{1}{\sin \beta \sin \gamma} \geq 4$	$\infty > \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \geq 4$
	$\infty > \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} \geq 12$

První dvě neostré nerovnosti v každém z obou sloupců plynou užitím N3 k dříve uvedeným odhadům kladných součtů  $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$ . Ostatní neostré nerovnosti platí díky N6 a horním odhadům

součinů  $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)$ . Všechny ostré nerovnosti – s výjimkou těch s čísly  $-1$  a  $1$  – jsou triviální a přesnost všech (bez výjimky) opět potvrzují trojice (5.14). Ostrá nerovnost s číslem  $1$  je zřejmě důsledkem identity

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

odvozené v 5.1. Ostrou nerovnost s číslem  $-1$  stačí jistě dokázat pouze v případě, kdy  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vnitřní úhly *tupoúhlého* trojúhelníku. Dosáhneme toho například v případě  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  sečtením nerovností

$$\cos \alpha \cos \gamma > -1 \quad \text{a} \quad (\cos \alpha + \cos \gamma) \cos \beta > 0,$$

z nichž první je zřejmá a druhá plyne z toho, že oba činitele na levé straně mají kladnou hodnotu, neboť  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  a  $0 < \gamma < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tím je důkaz všech nerovností z tabulky ukončen.

V další tabulce uvedeme nerovnosti, které platí v oboru  $\mathcal{T}_+$  pro výrazy s funkcemi tangens a kotangens.

$\infty > \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$	$\infty > \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}$
$\infty > \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$	$\infty > \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}$
$0 < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$	$\infty > \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 9$

První dvě neostré nerovnosti v levém sloupci jsme již dříve dokázali v oboru  $\mathcal{T}$  jako algebraické důsledky identity  $xy + xz + yz = 1$ , nyní jsme jen v druhé nerovnosti odstranili absolutní hodnoty, neboť čísla  $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  jsou v oboru  $\mathcal{T}_+$  kladná. Novou třetí neostrou nerovnost z levého sloupce odvodíme užitím nerovnosti N5 pro trojici čísel  $xy, xz$  a  $yz$ , podle které pro naše čísla  $x, y, z$  platí

$$\sqrt[3]{xy \cdot xz \cdot yz} \leq \frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{1}{3}, \quad \text{odkud } xyz \leq \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Kladná čísla  $x = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}, z = \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$  z nerovností v pravém sloupci tabulky splňují jak víme identitu  $x + y + z = xyz$ . Pro hodnotu  $s = xyz > 0$  podle N5 znamená

$$\sqrt[3]{s} = \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3} = \frac{s}{3}, \quad \text{odkud } s \leq \frac{s^3}{27} \quad \text{neboli } s \geq 3\sqrt{3},$$

což dokazuje první dvě neostré nerovnosti, třetí nerovnost je jejich důsledkem díky N2. Přesnost všech (triviálních) ostrých nerovností z poslední tabulky dosvědčují v některých případech trojice (5.14), v ostatních případech trojice

$$\alpha = 2\varepsilon, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

K dokázaným nerovnostem z tabulky připojme ještě dvojici nerovností

$\infty > \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \geq 9$
$\infty > \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma \geq \sqrt{3}$

První z nich je snadným upřesněním výsledku, který jsme dokázali v oboru  $\mathcal{T}$  a podle něhož příslušný součet leží v množině  $(-\infty, 0) \cup (9, \infty)$ ; v oboru  $\mathcal{T}_+$  je ovšem tento součet kladný. Protože jsme dříve v oboru  $\mathcal{T}$  dokázali rovněž nerovnost

$$|\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma| \geq \sqrt{3},$$

je naším úkolem nyní pouze vysvětlit, proč v případě  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$  je součet „uvnitř absolutní hodnoty“ kladný. Jistě to platí, není-li trojúhelník s úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  tupoúhlý; v opačné situaci, kdy např.  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  a  $\beta + \gamma = \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ , dostaneme potřebné sečtením nerovností

$$\cotg \alpha + \cotg \beta > 0 \quad \text{a} \quad \cotg \gamma > 0,$$

z nichž druhá je zřejmá a první plyne z  $0 < \beta < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Pokud jde o přesnost obou (triviálních) ostrých nerovností, vše opět řeší trojice (5.14), stejně jako u nerovností v další tabulce.

K nerovnostem s funkcemi tangens a kotangens v oboru  $\mathcal{T}_+$  poznamenejme, že jsme uvedli *jedinou* netriviální nerovnost pro hodnoty  $\cotg \alpha, \cotg \beta, \cotg \gamma$ , zatímco pro hodnoty  $\tg \alpha, \tg \beta, \tg \gamma$  jsme dokonce neuvodili žádnou takovou nerovnost (u které by ovšem bylo nutné doplnit předpoklad  $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2}$ ), když nepočítáme složitější nerovnosti, které jsme uvedli a dokázali dříve v rozšíření  $\mathcal{T}$  oboru  $\mathcal{T}_+$ . Z nich za připomenutí stojí snad jediné odhady dvou součtů

$\begin{aligned} \infty &> \cotg^2 \alpha + \cotg^2 \beta + \cotg^2 \gamma \geq 1 \\ \infty &> \cotg^2 2\alpha + \cotg^2 2\beta + \cotg^2 2\gamma \geq 1 \end{aligned}$
---

(druhý součet však existuje, jen když  $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2}$ ). Tato absence není projevem neúplnosti našeho výkladu – žádné takové nerovnosti s obvyklými součty a součiny se nevyskytují ani v literatuře, protože v  $\mathcal{T}_+$  ani jedna z nich obecně neplatí.

Jak jsme se již zmínili, v různých sbírkách najdeme i jednotlivé příklady nerovností, které namísto oboru  $\mathcal{T}_+$  platí v užším oboru všech trojic  $(\alpha, \beta, \gamma)$  určených podmínkou

$$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

tedy příklady nerovností, pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného *ostroúhlého* trojúhelníku. Věnujeme jim třetí část našeho textu, v němž nyní máme jedinečnou příležitost odvodit téměř všechny takové nerovnosti rychle a pohodlně z dříve dokázaných nerovností platných v oboru  $\mathcal{T}_+$  všech trojic vnitřních úhlů trojúhelníků libovolného druhu. Povšimneme si totiž, že  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku, právě když úhly

$$\alpha' = \pi - 2\alpha, \quad \beta' = \pi - 2\beta, \quad \gamma' = \pi - 2\gamma$$

jsou vnitřní úhly obecného trojúhelníku. Plyne to ze zřejmých ekvivalencí

$$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha', \beta', \gamma' \in (0, \pi), \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi.$$

Díky tomuto poznatku a obráceným převodním vztahům

$$\alpha = \frac{\pi - \alpha'}{2}, \quad \beta = \frac{\pi - \beta'}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi - \gamma'}{2}$$

můžeme konstatovat, že pro každou dvojici funkcí  $F$  a  $G$  svázaných identitou

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = G(\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma) \quad \text{neboli} \quad G(\alpha', \beta', \gamma') = F\left(\frac{\pi - \alpha'}{2}, \frac{\pi - \beta'}{2}, \frac{\pi - \gamma'}{2}\right)$$

platí rovnost množin

$$\left\{F(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \wedge \alpha + \beta + \gamma = \pi\right\} = \left\{G(\alpha', \beta', \gamma') : (\alpha', \beta', \gamma') \in \mathcal{T}_+\right\}.$$

Znamená to, že pro hodnoty funkce  $F = F(\alpha, \beta, \gamma)$  vnitřních úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  všech ostroúhlých trojúhelníků platí *stejně odhady* jako pro hodnoty příslušné funkce  $G = G(\alpha', \beta', \gamma')$  vnitřních úhlů  $\alpha', \beta', \gamma'$  všech obecných trojúhelníků. Proto také všechny obecně platné nerovnosti pro ostroúhlé trojúhelníky můžeme odvodit (alespoň principiálně) z nerovností obecně platných v oboru  $\mathcal{T}_+$ . Tak například z dříve dokázaných nerovností

$$2 < \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{9}{4} \quad \text{a} \quad \infty > \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

po záměně trojice  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}_+$  trojicí  $(\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma)$  dostaneme pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného ostroúhlého trojúhelníku nerovnosti

$$2 < \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4} \quad \text{a} \quad \infty > \tg \alpha \tg \beta \tg \gamma \geq \sqrt{3}. \quad (5.15)$$

Na těchto dvou příkladech si všimněme některých společných rysů, které takto odvozené nerovnosti budou mít. V ostrých nerovnostech nastane rovnost jedině v případě, kdy bude platit

$$\pi - 2\alpha = \pi - 2\beta = \pi - 2\gamma = \frac{\pi}{3} \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3},$$

tedy opět pouze v případě rovnostranného trojúhelníku. Rovněž tak je jasné, že ostré odvozené nerovnosti jsou přesné v tom významu, který jsme zavedli u nerovností v oboru  $\mathcal{T}_+$ .

Povšimněme si ještě, že ve vztahu k našemu předchozímu textu o nerovnostech v oboru  $\mathcal{T}_+$  má každá z nerovností (5.15) odlišné postavení. První z nich je *upřesněním* odhadu téhož výrazu v oboru  $\mathcal{T}_+$ , který měl tvar

$$0 < \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}.$$

Druhá dvojice nerovností v (5.15) je odhadem *nového* výrazu  $\tg \alpha \tg \beta \tg \gamma$ , tedy výrazu, pro který v oboru  $\mathcal{T}_+$  (za podmínky  $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2}$ ) žádná netriviální nerovnost vyjma  $\tg \alpha \tg \beta \tg \gamma \neq 0$  neexistuje. Dodejme, že některé odhady odvozené v  $\mathcal{T}_+$ , jako například

$$1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad 0 < \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

žádná upřesnění při přechodu od obecných k ostroúhlým trojúhelníkům nepřipouštějí. Přesně takové odhady totiž znovu dostaneme, když na nerovnosti platné v oboru  $\mathcal{T}_+$

$$1 < \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad 0 < \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

aplikujeme výše popsanou proceduru záměny trojice  $(\alpha, \beta, \gamma)$  trojicí  $(\pi - 2\alpha, \pi - 2\beta, \pi - 2\gamma)$ .

Těmito úvodními poznámkami o nerovnostech, které platí pro vnitřní úhly všech ostroúhlých trojúhelníků, jsme objasnili obecnou metodu jejich odvozování z nerovností v oboru  $\mathcal{T}_+$  a zároveň jsme naznačili, v jakých skupinách budeme nové výsledky nyní prezentovat. Do první tabulky zařadíme ty z nich, které upřesňují odhady výrazů, jež jsme zkoumali již v oboru  $\mathcal{T}_+$ . Ještě jednou zdůrazníme, že nerovnosti v následujících čtyřech tabulkách platí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  *libovolného ostroúhlého trojúhelníku*.

$2 < \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$	$1 > \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$
$2 < \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$0 < \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$
$0 < \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$	$-1 > \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$
$\sqrt{2} < \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} < \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
$2 > \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{2} < \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$1 < \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{9}{4}$	
$0 < \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{3}{4}$	

S výjimkou čtyř výrazů s úhly  $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ , odhady pro všechny ostatní výrazy v předchozí tabulce jsou získány z odhadů v oboru  $\mathcal{T}_+$  výše popsaným postupem. Čtenář se o tom může přesvědčit postupem opačným: v každém výrazu tabulky zaměnit trojici  $\alpha, \beta, \gamma$  trojicí  $\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi-\beta}{2}, \frac{\pi-\gamma}{2}$  a přesvědčit se, že odhady pro nový výraz byly v textu dříve dokázány v oboru  $\mathcal{T}_+$  – stejně jako neostré nerovnosti pro výrazy s úhly  $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ , které jsme do nové tabulky znovu zapsali. Proto nyní dokážeme pouze uvedené *ostré* nerovnosti pro tyto výrazy (u kterých se přechod k nerovnostem v oboru  $\mathcal{T}_+$  nevyplatí). I když pro zřejmý důkaz jedné z těchto čtyř ostrých nerovností máme k dispozici identitu

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

jejíž levá strana je (jak už víme) větší než 2, popíšeme teď zajímavou metodu společného důkazu všech čtyř nerovností. Bude založena na tom, že pro libovolná čísla  $x, y \in (0, \frac{\pi}{4})$  platí nerovnosti

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &> \sin \frac{\pi}{4} + \sin \left(x + y - \frac{\pi}{4}\right), & \cos x \cos y &> \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(x + y - \frac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &< \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \left(x + y - \frac{\pi}{4}\right), & \cos x + \cos y &> \cos \frac{\pi}{4} + \cos \left(x + y - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Odložme na chvíli důkaz těchto nerovností a ukažme, jak z nich plynou posuzované nerovnosti z naší tabulky. Každou z nerovností (5.16) zapíšeme pro dvojice

$$(x, y) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \quad \text{a} \quad (x, y) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\gamma}{2}\right)$$

a obě takto získané nerovnosti pak sečteme, resp. vynásobíme. Takové užití (5.16) je korektní, neboť všechny hodnoty

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\gamma}{2}$$

leží v intervalu  $(0, \frac{\pi}{4})$  díky tomu, že  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku. S přihlédnutím

k rovnosti  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$  popsaným postupem dostaneme nerovnosti, které jsme chtěli dokázat:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} &> 2 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} &> \cos^2 \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &< 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 2, \\ \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} &> 2 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 1 + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Přesnost dokázaných nerovností dosvědčují ostroúhlé trojúhelníky s vnitřními úhly

$$\alpha = 2\varepsilon, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

kde  $\varepsilon > 0$  je malý parametr.

Zbývá dokázat nerovnosti (5.16) pro libovolná čísla  $x, y \in (0, \frac{\pi}{4})$ . Nerovnosti pro součet sinů a pro součet kosinů plynou z identit

$$\begin{aligned}(\sin x + \sin y) - \left( \sin \frac{\pi}{4} + \sin \left( x + y - \frac{\pi}{4} \right) \right) &= 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4}-x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4}-y}{2}, \\ (\cos x + \cos y) - \left( \cos \frac{\pi}{4} + \cos \left( x + y - \frac{\pi}{4} \right) \right) &= 4 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4}-x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4}-y}{2},\end{aligned}$$

o jejichž platnosti se lze nejlépe přesvědčit dosazením do pravých stran za součin druhého a třetího sinu podle vzorce

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{4}-x}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4}-y}{2} = \cos \frac{x-y}{2} - \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2} \right).$$

Podobně nerovnost v (5.16) pro součin kosinů plyne z identity

$$\cos x \cos y - \cos \frac{\pi}{4} \cos \left( x + y - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \sin \left( \frac{\pi}{4} - y \right),$$

kterou lze dokázat úpravou obou stran na stejný výraz

$$\frac{\cos(x-y) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right)}{2}.$$

Poslední nerovnost v (5.16) je důsledkem identit

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \left( x + y - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sin(x+y)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \left( x + y - \frac{\pi}{4} \right)}$$

a již dokázané nerovnosti pro součin kosinů. Tím je náš výklad o nerovnostech z první tabulky nerovností pro vnitřní úhly ostroúhlých trojúhelníků ukončen.

Do druhé tabulky zařadíme odhady pro takové výrazy s funkcemi sinus a kosinus, které jsme v širším oboru  $\mathcal{T}_+$  vůbec nezkoumali.

$\infty > \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\beta} + \frac{1}{\sin 2\gamma} \geq 2\sqrt{3}$	$\infty > \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \frac{1}{\cos \gamma} \geq 6$
$\infty > \frac{1}{\sin^2 2\alpha} + \frac{1}{\sin^2 2\beta} + \frac{1}{\sin^2 2\gamma} \geq 4$	$\infty > \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \geq 12$
$0 > \sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma \geq -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$1 > \cos 4\alpha \cos 4\beta \cos 4\gamma \geq -\frac{1}{8}$
$0 < \sin^2 4\alpha + \sin^2 4\beta + \sin^2 4\gamma \leq \frac{9}{4}$	$3 > \cos^2 4\alpha + \cos^2 4\beta + \cos^2 4\gamma \geq \frac{3}{4}$

Čtenář se opět může přesvědčit, že všechny odhady v právě uvedené tabulce plynou ze dříve odvozených odhadů v oboru  $\mathcal{T}_+$ ; platí to i pro odhady „nových“ výrazů s funkcemi tangens a kotangens, ze kterých sestavíme následující tabulku.

$\infty > \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma \geq 9$	$-\infty < \operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{cotg} 2\beta + \operatorname{cotg} 2\gamma \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\infty > \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3}$	$0 < \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$
$\infty > \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3}$	

Do poslední tabulky nerovností pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  ostroúhlých trojúhelníků zařadíme odhady „nových“ součtů  $f(\alpha)f(\beta) + f(\alpha)f(\gamma) + f(\beta)f(\gamma)$ . Také tyto odhady jsou důsledky předchozích výsledků v oboru  $\mathcal{T}_+$ .

$0 < \sin 2\alpha \sin 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\gamma + \sin 2\beta \sin 2\gamma \leq \frac{9}{4}$
$\infty > \frac{1}{\sin 2\alpha \sin 2\beta} + \frac{1}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma} + \frac{1}{\sin 2\beta \sin 2\gamma} \geq 4$
$-1 < \cos 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\gamma + \cos 2\beta \cos 2\gamma \leq \frac{3}{4}$
$\infty > \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{1}{\cos \alpha \cos \gamma} + \frac{1}{\cos \beta \cos \gamma} \geq 12$
$\infty > \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \geq 9$

V předchozích třech částech této podkapitoly jsme se věnovali trigonometrickým nerovnostem obecně platným postupně v oborech  $\mathcal{T}, \mathcal{T}_+$  a v oboru tvořeném trojicemi vnitřních úhlů všech ostroúhlých trojúhelníků. V závěrečné čtvrté části zaměříme pozornost na nerovnosti, které splňují výrazy s vnitřními úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného *tupoúhlého* trojúhelníku, tedy na nerovnosti obecně platné v oboru všech trojic  $(\alpha, \beta, \gamma)$  určených podmínkami

$$\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi): \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ a } \max(\alpha, \beta, \gamma) > \frac{\pi}{2}.$$

Tyto nerovnosti uvedeme rozdělené do dvou tabulek. První z nich bude obsahovat pouze takové nerovnosti, které tupoúhlé trojúhelníky přesně charakterizují, tedy nerovnosti, jež neplatí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  žádného ostroúhlého nebo pravoúhlého trojúhelníku. Do prvního řádku tabulky zapíšeme dvě nerovnosti, které tuto vlastnost zřejmě mají, všechny ostatní nerovnosti jsou jejich důsledky díky identitám odvozeným v podkapitole 5.1.

$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma < 0$	$\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma < 0$
$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma > 1$	$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma < 2$
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma > -1$	$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma > 0$
$\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma < 1$	
$\sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\gamma + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\gamma < 0$	

K dokázaným nerovnostem z předchozí tabulky, které charakterizují tupoúhlé trojúhelníky, dodejme, že pokud v nich zaměníme znaky nerovností znaky rovností, resp. znaky opačných nerovností, dostaneme rovnosti, resp. nerovnosti, které charakterizují pravoúhlé, resp. ostroúhlé trojúhelníky.



Rovněž do druhé tabulky, kterou nyní uvedeme, zařadíme nerovnosti, o kterých vzápětí ukážeme, že platí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného tupouhelného trojúhelníku. Z našeho postupu však vyplýne, že tyto nerovnosti splňují i vnitřní úhly některých jiných trojúhelníků, například všech pravoúhlých trojúhelníků, jež nejsou rovnoramenné, a proto také i jistých ostroúhlých trojúhelníků. Nejsou to tedy nerovnosti, které by tupouhelné trojúhelníky charakterizovaly.

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma < 2$	$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma < \frac{1}{2}$
$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma < 1 + \sqrt{2}$	$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} < \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$
$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < \sqrt{2}$	$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} < \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$

Protože v každém ze tří řádků jsou uvedeny dvě nerovnosti, které jsou podle první tabulky identit z podkapitoly 5.1 ekvivalentní, budeme dokazovat pouze nerovnosti pro součty z levého sloupce tabulky. S ohledem na symetrii můžeme o úhlech  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolně zvoleného tupouhelného trojúhelníku předpokládat, že  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  a  $\beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ . První dokazovaná nerovnost je pak zřejmým důsledkem odhadů

$$\sin 2\alpha < 0, \quad \sin 2\beta \leq 1 \quad \text{a} \quad \sin 2\gamma \leq 1.$$

Ukážeme-li, že za našich předpokladů na úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  platí rovněž odhady

$$\sin \alpha + \sin \beta < 1 + \cos \gamma \quad \text{a} \quad \cos \alpha + \cos \beta < \sin \gamma, \quad (5.17)$$

vyplnou z nich zbylé dvě nerovnosti, jež máme dokázat, následujícím postupem:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &< 1 + \cos \gamma + \sin \gamma = 1 + \sqrt{2} \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 + \sqrt{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &< \sin \gamma + \cos \gamma = \sqrt{2} \sin \left( \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Zbývá tedy dokázat nerovnosti (5.17). Pro rozdíl stran první z nich platí

$$\begin{aligned} (1 + \cos \gamma) - (\sin \alpha + \sin \beta) &= 1 - \cos(\alpha + \beta) - \sin \alpha - \sin \beta = \\ &= 1 - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha - \sin \beta = (1 - \sin \alpha)(1 - \sin \beta) - \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Poslední výraz má skutečně kladnou hodnotu, neboť z  $0 < \beta < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  plyne

$$1 - \sin \alpha > 0, \quad 1 - \sin \beta > 0, \quad \cos \alpha < 0 \quad \text{a} \quad \cos \beta > 0.$$

Rozdíl stran druhé nerovnosti z (5.17) má vyjádření

$$\sin \gamma - (\cos \alpha + \cos \beta) = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left( \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Protože  $\sin \frac{\gamma}{2} > 0$ , bude poslední výraz kladný, když ověříme, že pro ostré úhly  $\frac{\gamma}{2}$  a  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  platí nerovnost

$$\frac{\gamma}{2} < \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{neboli} \quad \gamma + \beta < \alpha.$$

To je však zřejmé, neboť  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  a  $\gamma + \beta = \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Obě nerovnosti (5.17) jsou tedy dokázány. Protože v případě  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  platí vztahy (5.17) zřejmě jako rovnosti, platí i tehdy odvozené ostré nerovnosti z naší tabulky, není-li ovšem  $\beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$ . Tímto konstatováním celé naše pojednání o trigonometrických nerovnostech končí.

# Kapitola 6

## Další aplikace goniometrických funkcí

### 6.1 Goniometrické substituce

Kromě samotné trigonometrie, kterou jsme se zabývali ve třech kapitolách naší práce, nalézájí goniometrické funkce uplatnění v řadě dalších matematických oborů. V matematické analýze je snad nejvýznamější role goniometrických funkcí v teorii Fourierových řad, o kterých jsme se zmínili v příkladu 4.7.1. Již v základním kurzu matematické analýzy sehrávají tyto funkce významnou úlohu při výpočtech neurčitých integrálů z racionálních i jiných funkcí, které určujeme pomocí vhodných *goniometrických substitucí*. Méně je známo, že tyto substituce lze využít i v elementární matematice při řešení různých algebraických úloh, ve kterých se objevují výrazy, které svým zápisem připomínají některý goniometrický vzorec, nebo rovnice, jež mají tvar některé goniometrické či trigonometrické identity. Právě takovým postupům se teď budeme formou jednotlivých řešených příkladů věnovat. Za pozornost stojí zejména příklad 6.1.26, který věnujeme goniometrickému řešení kubických rovnic.

■ **Příklad 6.1.1.** Najděte obor všech hodnot výrazu

$$V = x + \sqrt{1 - x^2}$$

s reálnou proměnnou  $x$ .<sup>1</sup>

*Řešení:* Protože výraz  $V$  má smysl pouze pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ , můžeme zavést substituci  $x = \sin \alpha$ , kde  $\alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Pro taková  $\alpha$  platí  $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha$ , takže  $V = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ . Protože pro  $\alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$  proběhne součet  $\alpha + \frac{\pi}{4}$  interval  $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rangle$ , na kterém má funkce sinus obor hodnot  $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \rangle$ , je hledaným oborem hodnot výrazu  $V$  interval  $\langle -1, \sqrt{2} \rangle$ . (Extrémní hodnoty  $V = -1$ , resp.  $V = \sqrt{2}$ , dostaneme pro  $x = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ , resp.  $x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .)

■ **Příklad 6.1.2.** Předpokládejme, že pro čísla  $x, y, z \in \mathbb{R}$  mají smysl zlomky

$$\frac{x - y}{1 + xy}, \quad \frac{y - z}{1 + yz}, \quad \frac{z - x}{1 + zx}.$$

Dokažte, že součet těchto tří zlomků je roven jejich součinu.<sup>2</sup>

*Řešení:* Zadané zlomky jsou tvaru, který dobře známe ze vzorce pro tangens rozdílu

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

---

<sup>1</sup>[31], str. 31, upraveno.

<sup>2</sup>[34], str. 20.

Po substituci  $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta, z = \operatorname{tg} \gamma$  pro vhodná  $\alpha, \beta, \gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  je tedy naším úkolem dokázat rovnost

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma - \alpha).$$

Ta však přímo plyne z výsledku příkladu 4.6.4, podle kterého hodnoty  $\operatorname{tg} u, \operatorname{tg} v, \operatorname{tg} w$  splňují identitu  $\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w$  za předpokladu, že platí  $\sin(u+v+w) = 0$ , speciálně tedy v případě  $u + v + w = 0$ , který odpovídá naší situaci, kdy  $u = \alpha - \beta, v = \beta - \gamma$  a  $w = \gamma - \alpha$ . Důkaz je tak hotov.

■ **Příklad 6.1.3.** V oboru reálných čísel řešte rovnici<sup>3</sup>

$$6x + 8\sqrt{1-x^2} = 5(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}).$$

(Řešení, které je iracionálním číslem, určete s přesností  $10^{-3}$  a najděte kubickou rovnici, jejímž je kořenem.)

*Řešení:* Kromě goniometrické jedničky využijeme vzorce

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Protože obě strany dané rovnice jsou definovány pouze pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ , můžeme výhodně zavést substituci  $x = \cos \alpha$ , kde  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ , a do rovnice dosadit

$$\sqrt{1-x^2} = \sin \alpha, \quad \sqrt{1+x} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

neboť hodnoty  $\sin \alpha, \cos \frac{\alpha}{2}$  a  $\sin \frac{\alpha}{2}$  jsou pro  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  nezáporné. Dostaneme tak pro novou neznámou  $\alpha$  rovnici

$$6 \cos \alpha + 8 \sin \alpha = 5\sqrt{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

kterou dále upravíme obvyklým postupem:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \cos \alpha + \frac{4}{5} \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\ \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

kde  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$  je úhel určený podmínkami

$$\sin \varphi = \frac{3}{5}, \quad \cos \varphi = \frac{4}{5}$$

spojenými se známým pravoúhlým trojúhelníkem o stranách 3, 4 a 5. Z omezení  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  plyne, že  $\alpha + \varphi$  a  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$  jsou dva úhly, které leží po řadě v intervalech  $(0, \frac{3\pi}{2})$  a  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ . Proto se siny těchto dvou úhlů rovnají jedině ve dvou případech

$$(i) \quad \alpha + \varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad (ii) \quad (\alpha + \varphi) + \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \pi.$$

V případě (i) vychází  $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$ , takže první řešení  $x_1$  má hodnotu

$$x_1 = \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2\varphi \right) = \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

<sup>3</sup>[18], str. 13–14, kde rovnice řešena pouze v oboru  $\langle \frac{3}{5}, 1 \rangle$ .

V případě (ii) platí  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\varphi$ , takže druhé řešení  $x_2$  má vyjádření

$$x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\varphi\right) = \sin\frac{2}{3}\varphi = \sin\left(\frac{2}{3}\arcsin\frac{3}{5}\right) \doteq 0,416.$$

Podle vzorce  $\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$  pro hodnotu  $\beta = \frac{2}{3}\varphi$ , při které platí  $\sin\beta = x_2$  a  $\sin 3\beta = x_1 = \frac{24}{25}$ , dostáváme rovnost

$$\frac{24}{25} = 3x_2 - 4x_2^3,$$

takže číslo  $x_2$  je kořenem kubické rovnice  $100x^3 - 75x + 24 = 0$ .

■ **Příklad 6.1.4.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic<sup>4</sup>

$$\frac{3x - y}{x - 3y} = x^2, \quad \frac{3y - z}{y - 3z} = y^2, \quad \frac{3z - x}{z - 3x} = z^2.$$

*Řešení:* Účinným prostředkem bude vzorec pro tangens trojnásobného argumentu, který je podle příkladu 4.6.1 tvaru

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Vyřešíme-li totiž rovnice zadané soustavy vzhledem k neznámým, v nichž jsou lineární (tedy po řadě  $y, z$  a  $x$ ), dostaneme vztahy

$$y = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \quad z = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}, \quad x = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

se zlomky z uvedeného vzorce. Ukažme, že nová soustava rovnic je v oboru *nenulových* reálných čísel s původní soustavou ekvivalentní. Kdyby platilo např.  $x = 0$ , nespĺňovalo by první původní rovnici žádné číslo  $y$ . Proto nutně platí  $x \neq 0$  a podobně  $y \neq 0$  a  $z \neq 0$ . Z důsledků původních rovnic

$$y(1 - 3x^2) = 3x - x^3, \quad z(1 - 3y^2) = 3y - y^3, \quad x(1 - 3z^2) = 3z - z^3$$

proto plyne, že žádné z čísel  $x^2, y^2, z^2$  se nerovná ani číslu  $\frac{1}{3}$ , ani číslu 3. Zmíněná ekvivalence původní a upravené soustavy (druhé v oboru  $xyz \neq 0$ ) je tak dokázána.

Předpokládejme nyní, že  $(x, y, z)$  je libovolné řešení upravené soustavy,  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ . Hledejme hodnotu  $x$  ve tvaru  $x = \operatorname{tg} \alpha$  pro vhodné  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\alpha \neq 0$ . Z první rovnice soustavy plyne  $y = \operatorname{tg} 3\alpha$ , z druhé pak  $z = \operatorname{tg}(3 \cdot 3\alpha) = \operatorname{tg} 9\alpha$  a konečně z třetí rovnice  $x = \operatorname{tg}(3 \cdot 9\alpha) = \operatorname{tg} 27\alpha$ . Platí tedy rovnost  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 27\alpha$ , která znamená, že  $27\alpha = \alpha + k\pi$  neboli  $\alpha = \frac{k\pi}{26}$  pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ . Z podmínek  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  a  $\alpha \neq 0$  dostáváme 24 možných hodnot  $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12$  parametru  $k$ . Každé z nich odpovídá trojice hodnot

$$x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{26}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{3k\pi}{26}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{9k\pi}{26}.$$

Protože tyto hodnoty funkce tangens existují a jsou nenulové, je každá z těchto 24 trojic řešením soustavy ze zadání příkladu (a jiná její řešení, jak plyne z našeho postupu, neexistují).

<sup>4</sup>[18], str. 14.

■ **Příklad 6.1.5.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic<sup>5</sup>

$$x^3 - 3x = y, \quad y^3 - 3y = z, \quad z^3 - 3z = x.$$

*Řešení:* Levé strany zadaných rovnic připomínají vzorec pro kosinus trojnásobného argumentu, který jsme dokázali v příkladu 4.6.1 ve tvaru

$$\cos 3\omega = 4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega.$$

V zadaných rovnicích však „chybí“ koeficient 4, což napravíme, když je po vydělení číslem 2 zapíšeme ve tvaru

$$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{x}{2} = \frac{y}{2}, \quad 4 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{y}{2} = \frac{z}{2}, \quad 4 \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{z}{2} = \frac{x}{2}.$$

Hledejme proto nejprve řešení dané soustavy v oboru  $\langle -2, 2 \rangle$ . V tomto případě totiž můžeme psát  $x = 2 \cos \alpha$ ,  $y = 2 \cos \beta$  a  $z = 2 \cos \gamma$  pro vhodná  $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi \rangle$  a po dosazení do upravených rovnic dostaneme díky uvedenému vzorci pro  $\omega = \alpha, \beta, \gamma$  soustavu rovnic

$$\cos 3\alpha = \cos \beta, \quad \cos 3\beta = \cos \gamma, \quad \cos 3\gamma = \cos \alpha.$$

Je korektní závěr  $\cos 27\alpha = \cos \alpha$ , který se odtud nabízí? Všimněme si ještě jednou vzorce s obecným úhlem  $\omega$ . Plyne z něj, že hodnota  $\cos 3\omega$  je *jednoznačně určena* hodnotou  $\cos \omega$ . Proto v našem případě z rovnosti  $\cos 3\alpha = \cos \beta$  plyne  $\cos 3 \cdot 3\alpha = \cos 3\beta$ , tedy – s ohledem na  $\cos 3\beta = \cos \gamma$  – platí  $\cos 9\alpha = \cos \gamma$ . Odtud podobně obdržíme  $\cos 27\alpha = \cos 3\gamma$ , a tím je závěr  $\cos 27\alpha = \cos \alpha$  korektně dokázán. V jeho důsledku pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$  platí

$$27\alpha = \pm\alpha + 2k\pi \quad \text{neboli} \quad \alpha \in \left\{ \frac{k\pi}{13}, \frac{k\pi}{14} \right\}.$$

S ohledem na  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$  tak dostaneme 27 vyhovujících hodnot  $\alpha$ , kterým odpovídá 27 různých řešení zadané soustavy:

$$x = 2 \cos \frac{k\pi}{13}, \quad y = 2 \cos \frac{3k\pi}{13}, \quad z = 2 \cos \frac{9k\pi}{13} \quad (k = 0, 1, \dots, 13)$$

a

$$x = 2 \cos \frac{k\pi}{14}, \quad y = 2 \cos \frac{3k\pi}{14}, \quad z = 2 \cos \frac{9k\pi}{14} \quad (k = 1, 2, \dots, 13).$$

(Protože je funkce kosinus prostá na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ , jedná se skutečně o různá řešení, protože se liší ve složce  $x$ ; kvůli tomu jsme ve druhé skupině řešení vynechali hodnoty  $k = 0$  a  $k = 14$ .)

Řešení příkladu by bylo neúplné, kdybychom neukázali, že soustava rovnic nemá žádné řešení, jež nesplňuje podmínku  $x, y, z \in \langle -2, 2 \rangle$ . Uděláme to nyní pěkným obratem. Kdybychom zadanou soustavu řešili algebraicky, a to eliminační metodou, po dosazení za  $y$  z první rovnice do druhé a poté po dosazení za  $z$  z druhé rovnice do třetí bychom dostali rovnici s jednou neznámou  $x$

$$((x^3 - 3x)^3 - 3(x^3 - 3x))^3 - 3(x^3 - 3x)^3 + 9(x^3 - 3x) = x,$$

jež má zřejmě stupeň 27. A protože jsme našli právě 27 jejích řešení v oboru  $\langle -2, 2 \rangle$ , žádná jiná řešení ani mimo tento obor neexistují.

<sup>5</sup>[31], str. 29–30.

■ **Příklad 6.1.6.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic<sup>6</sup>

$$3(x^2 + 1)yz = 4(y^2 + 1)zx = 5(z^2 + 1)xy, \quad xy + yz + zx = 1.$$

*Řešení:* Poslední rovnice dané soustavy evokuje identitu

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,$$

o které jsme v podkapitole 5.1 ukázali, že platí pro vnitřní úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  libovolného trojúhelníku. Hodnoty  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  jsou tehdy ovšem kladné, můžeme to však tvrdit o složkách  $x, y, z$  libovolného řešení zadané soustavy? Předně je jasné, že žádné z čísel  $x, y, z$  není rovno nule. Kdyby totiž například platilo  $x = 0$ , z prvních dvou rovnic soustavy bychom měli  $yz = 0$ , zatímco z třetí rovnice by plynulo  $yz = 1$ . Čísla  $yz, zx, xy$  jsou tedy nenulová a podle prvních rovnic mají stejné znaménko; protože je podle třetí rovnice jejich součet roven 1, jde o tři kladná čísla. Každé řešení  $(x, y, z)$  je tedy tvořeno buď třemi kladnými, nebo třemi zápornými čísly, přitom trojice  $(-x, -y, -z)$  je zřejmě také řešením. Můžeme se proto skutečně omezit na hledání řešení v oboru kladných čísel, jak jsme si přáli.

Vrátíme se nyní k trigonometrické identitě zapsané v úvodní větě řešení a dokážeme užitečné pravidlo: *Splňují-li kladná reálná čísla  $x, y, z$  rovnost  $xy + yz + zx = 1$ , pak tato čísla mají vyjádření  $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$  a  $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ , kde  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou vnitřní úhly vhodného trojúhelníku.* Skutečně, čísla  $\alpha, \beta, \gamma$  pro kžžena vyjádření v intervalu  $(0, \pi)$  existují, neboť funkce tangens nabývá v  $(0, \frac{\pi}{2})$  všech kladných hodnot. Naším cílem je vysvětlit, proč pro taková  $\alpha, \beta, \gamma$  platí rovnost  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Z předpokládané rovnosti  $xy + yz + zx = 1$  zřejmě plyne  $xy \neq 1$ , takže ji lze upravit do tvaru

$$\frac{1}{z} = \frac{x + y}{1 - xy} \quad \text{neboli} \quad \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)$$

(díky vzorci pro tangens součtu). Poslední rovnost pro úhly  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  již ovšem znamená

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \quad \text{neboli} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

a potřebné pravidlo je tak dokázáno.

Vraťme se k řešení zadané soustavy v oboru kladných čísel a dosadme odvozené trigonometrické vyjádření  $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  do prvních dvou rovnic soustavy, upravených do tvaru

$$\frac{3(x^2 + 1)}{x} = \frac{4(y^2 + 1)}{y} = \frac{5(z^2 + 1)}{z}$$

po vydělení součinem  $xyz$ . Díky identitě

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2} + \cos^2 \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{2}{\sin \omega},$$

kteřou použijeme pro  $\omega = \alpha, \beta, \gamma$ , dostaneme

$$\frac{3 \cdot 2}{\sin \alpha} = \frac{4 \cdot 2}{\sin \beta} = \frac{5 \cdot 2}{\sin \gamma} \quad \text{neboli} \quad \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 3 : 4 : 5.$$

Podle sinové věty jsou  $\alpha, \beta, \gamma$  vnitřní úhly známého pravoúhlého trojúhelníku o stranách 3, 4, 5, takže platí  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{4}{5}$  a  $\sin \gamma = 1$ . Z výše uvedené identity s úhlem  $\omega$  snadno vypočteme hodnoty  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$  a  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$ . V oboru kladných čísel má tedy zadaná soustava jediné řešení  $(x_1, y_1, z_1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$ . Její druhé řešení je  $(x_2, y_2, z_2) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1)$ , žádné další řešení v oboru reálných čísel daná soustava nemá.

<sup>6</sup>[18], str. 15–16.

■ **Příklad 6.1.7.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic<sup>7</sup>

$$2x + x^2y = y, \quad 2y + y^2z = z, \quad 2z + z^2x = x.$$

*Řešení:* Využijeme vzorec pro tangens dvojnásobného argumentu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

neboť zlomky uvedeného druhu dostaneme, když rovnice zadané soustavy vyřešíme po řadě vzhledem k  $y, z$  a  $x$ :

$$y = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad z = \frac{2y}{1 - y^2}, \quad x = \frac{2z}{1 - z^2}.$$

Ujistěme se, že upravená soustava je ekvivalentní s původní soustavou, že tedy vydělení výrazy  $1 - x^2, 1 - y^2, 1 - z^2$  je korektní úprava. Kdyby například platilo  $1 - x^2 = 0$ , tj.  $x = \pm 1$ , po dosazení do první rovnice bychom dostali  $2x = 0$ , tedy spor. Proto se dále budeme zabývat řešením upravené soustavy. Po substituci  $x = \operatorname{tg} \alpha$  s vhodným úhlem  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  dostaneme z první rovnice  $y = \operatorname{tg} 2\alpha$ , z druhé pak  $z = \operatorname{tg} 2 \cdot 2\alpha = \operatorname{tg} 4\alpha$  a konečně z třetí rovnice  $x = \operatorname{tg} 2 \cdot 4\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$ . Z rovnosti  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$  máme  $8\alpha = \alpha + k\pi$  neboli  $\alpha = \frac{k\pi}{7}$  pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ , jež díky podmínce  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  nabývá hodnot  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ . Těm odpovídá sedm trojic

$$(x, y, z) = \left( \operatorname{tg} \frac{k\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{2k\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{4k\pi}{7} \right),$$

jež jsou zřejmě různá řešení dané soustavy (liší se totiž ve složce  $x$  a žádná složka žádné trojice se nerovná ani 1, ani  $-1$ ). Jiná řešení daná soustava nemá.

■ **Příklad 6.1.8.** V oboru reálných čísel řešte pro každé  $n \geq 2$  soustavu rovnic<sup>8</sup>

$$2x_1x_2 + 1 = x_1^2, \quad 2x_2x_3 + 1 = x_2^2, \quad \dots, \quad 2x_nx_1 + 1 = x_n^2.$$

*Řešení:* Z první rovnice zřejmě plyne  $x_1 \neq 0$ , takže z ní lze vyjádřit  $x_2$  pomocí  $x_1$  zlomkem, k jehož úpravě se vyplatí – možná poněkud překvapivě – substituce  $x_1 = \operatorname{cotg} \alpha$ . Takový úhel  $\alpha \in (0, \pi)$  jistě existuje, neboť obor hodnot funkce kotangens na  $(0, \pi)$  je celé  $\mathbb{R}$ . Dostaneme tak

$$x_2 = \frac{x_1^2 - 1}{2x_1} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1}{2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{cotg} 2\alpha.$$

Podobně z druhé rovnice soustavy plyne  $x_2 \neq 0$  a  $x_3 = \operatorname{cotg} (2 \cdot 2\alpha) = \operatorname{cotg} 4\alpha$ . Z dalších rovnic pak indukci dostaneme vyjádření  $x_i = \operatorname{cotg} (2^{i-1}\alpha)$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ , až konečně z poslední rovnice  $x_1 = \operatorname{cotg} (2^n \alpha)$ . To znamená, že  $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} 2^n \alpha$ , a proto  $2^n \alpha = \alpha + k\pi$  neboli  $\alpha = \frac{k\pi}{2^n - 1}$  pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ . S ohledem na podmínku  $\alpha \in (0, \pi)$  musí být číslo  $k$  rovno jednomu z čísel  $1, 2, \dots, 2^n - 2$  a my tak nacházíme  $2^n - 2$   $n$ -tic

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2^n - 1}, \operatorname{cotg} \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \dots, \operatorname{cotg} \frac{2^{n-1}k\pi}{2^n - 1} \right),$$

kteřá jsou různá řešení zadané soustavy, neboť se navzájem liší v první složce  $x_1$  a žádná složka žádné  $n$ -tice se nerovná nule. V opačném případě by totiž některé z čísel  $\frac{2^{i-1}k\pi}{2^n - 1}$  muselo být násobkem čísla  $\pi$ , takže číslo  $2^{i-1} \cdot k$  by muselo být dělitelné číslem  $2^n - 1$ . Mocnina  $2^{i-1}$  je však s lichým číslem  $2^n - 1$  nesoudělná, takže by číslo  $2^n - 1$  bylo dělitelem čísla  $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 2\}$ , a to je spor. Dokázali jsme, že zadaná soustava má právě  $2^n - 2$  řešení (uvedených výše) a žádná jiná řešení nemá.

<sup>7</sup>[31], str. 31.

<sup>8</sup>[31], str. 31, kde zadáno a řešeno pouze pro  $n = 4$ .

■ **Příklad 6.1.9.** Pro libovolná reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dokažte implikace

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3} \cdot \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \leq \frac{n}{4} \cdot \max \{|x_i|^3 : 1 \leq i \leq n\}.$$

Pro obě dokazované nerovnosti rovněž zjistěte, kdy v nich nastane rovnost.<sup>9</sup>

*Řešení:* Využijeme vzorec pro sinus trojnásobného argumentu

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

který jsme odvodili v příkladu 4.6.1. Maxima  $M$  a  $M^3$  v dokazovaných nerovnostech jsou nezáporná čísla, přitom v případě  $M = 0$  jde o dvě triviální rovnosti, neboť tehdy platí  $x_i = 0$  pro každé  $i$ . Až do konce řešení se proto zabýváme případem, kdy  $M > 0$ . Tehdy můžeme každé z čísel  $x_i$  vyjádřit ve tvaru  $x_i = M \sin \alpha_i$  pro vhodné  $\alpha_i \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Podle vzorce z úvodní věty řešení platí rovnosti

$$\sin 3\alpha_i = 3 \sin \alpha_i - 4 \sin^3 \alpha_i = \frac{3x_i}{M} - \frac{4x_i^3}{M^3},$$

jejichž sečtením pro  $i = 1, 2, \dots, n$  dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \sin 3\alpha_i = \frac{3}{M} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{4}{M^3} \sum_{i=1}^n x_i^3,$$

odkud již snadno plynou obě implikace pro zkoumané součty:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0 &\quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i = \frac{M}{3} \cdot \sum_{i=1}^n \sin 3\alpha_i \leq \frac{M}{3} \cdot \sum_{i=1}^n 1 = \frac{n}{3} \cdot M, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 0 &\quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i^3 = -\frac{M^3}{4} \sum_{i=1}^n \sin 3\alpha_i \leq -\frac{M^3}{4} \sum_{i=1}^n (-1) = \frac{n}{4} \cdot M^3. \end{aligned}$$

Zároveň vidíme, že v první dokázané implikaci nastane rovnost, právě když bude platit  $\sin 3\alpha_i = 1$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ . To s ohledem na  $3\alpha_i \in \langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$  znamená  $3\alpha_i \in \{ -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \}$  neboli  $\alpha_i \in \{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \}$ , tedy  $x_i = M \sin \alpha_i \in \{ -M, \frac{M}{2} \}$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ . Kolik z čísel  $x_i$  má hodnotu  $-M$  a kolik hodnotu  $\frac{M}{2}$ , zjistíme z předpokladu  $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$ , za kterého podmínku rovnosti hledáme. Je-li  $x_i = -M$  pro právě  $k$  indexů  $i$  (a tedy  $x_i = \frac{M}{2}$  pro  $n - k$  indexů  $i$ ), má zmíněný předpoklad tvar

$$k \cdot (-M)^3 + (n - k) \cdot \left(\frac{M}{2}\right)^3 = 0 \quad \text{neboli} \quad -k + \frac{n - k}{8} = 0$$

(připomínáme, že  $M \neq 0$ ), což je ekvivalentní s rovností  $n = 9k$ . Kromě případu  $M = 0$  proto platí v první implikaci rovnost, jen když je číslo  $n$  dělitelné devíti a přitom  $\frac{n}{9}$  čísel  $x_i$  je rovno  $-M$  a  $\frac{8n}{9}$  čísel  $x_i$  je rovno  $\frac{M}{2}$ .

Pro rovnost v druhé dokázané implikaci zkoumáme kombinaci předpokladu a podmínky ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0 \quad \text{a} \quad \sin 3\alpha_i = -1 \quad (1 \leq i \leq n).$$

<sup>9</sup>[46], str. 12 a [18], str. 16, v obou zdrojích bez diskuse o případě rovnosti. O náročnosti možného důkazu první implikace bez užití goniometrické substituce se lze přesvědčit v [38], str. 147–8.



Z podmínky tentokrát dostaneme  $\alpha_i \in \{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$  neboli  $x_i \in \{-\frac{M}{2}, M\}$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ . Předpoklad tehdy bude splněn, jen když bude číslo  $n$  dělitelné třemi a přitom  $\frac{2n}{3}$  čísel  $x_i$  bude rovno  $-\frac{M}{2}$  a  $\frac{n}{3}$  čísel  $x_i$  bude rovno  $M$ . To je hledané kritérium rovnosti v druhé implikaci (v případě  $M \neq 0$ ).

■ **Příklad 6.1.10.** Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla  $a, b, c, d$  platí

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Dokažte nerovnost  $abcd \geq 3$  a zjistěte, kdy v ní nastane rovnost.<sup>10</sup>

*Řešení:* Náš postup založíme na využití zřejmé identity

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x.$$

Určíme-li k daným číslům  $a, b, c, d$  úhly  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tak, aby platilo  $\operatorname{tg} \alpha = a^2, \operatorname{tg} \beta = b^2, \operatorname{tg} \gamma = c^2, \operatorname{tg} \delta = d^2$ , pak podmínku ze zadání příkladu můžeme díky uvedené identitě přepsat do tvaru

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = 1 \quad \text{neboli} \quad \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \sin^2 \alpha.$$

Odtud užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel  $\cos^2 \beta, \cos^2 \gamma, \cos^2 \delta$  (kterou jsme dokázali v úvodní části podkapitoly 5.2) dostaneme

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta \geq 3 \sqrt[3]{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma \cos^2 \delta}.$$

Vynásobení tohoto odhadu pro  $\sin^2 \alpha$  a analogických tří odhadů pro  $\sin^2 \beta, \sin^2 \gamma, \sin^2 \delta$  získáme nerovnost

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \geq 81 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \cos^2 \delta,$$

kterou lze zřejmě upravit na tvar  $\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \delta \geq 3^4$ . Levá strana poslední nerovnosti je však rovna  $a^4 b^4 c^4 d^4$ , takže požadovaný důkaz nerovnosti  $abcd \geq 3$  je hotov. Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve všech čtyřech nerovnostech, které jsme mezi sebou vynásobili. Taková podmínka bude splněna, právě když každá tři z průměrovaných čísel  $\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma, \cos^2 \delta$  budou stejná. Protože součet všech čtyř čísel je roven 1, dostáváme kritérium rovnosti  $abcd = 3$  v podobě vztahů

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta = \cos^2 \gamma = \cos^2 \delta = \frac{1}{4} \quad \text{neboli} \quad \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma = \sin^2 \delta = \frac{3}{4}.$$

Ekvivalentní zápis  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \delta = \sqrt{3}$  vede k závěru, že rovnost  $abcd = 3$  nastane jedině pro čtveřici  $a = b = c = d = \sqrt[4]{3}$ .

■ **Příklad 6.1.11.** Dokažte, že z libovolné čtveřice různých čísel z intervalu  $(0, 1)$  lze vybrat dvě čísla  $x$  a  $y$  tak, aby platilo<sup>11</sup>

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

*Řešení:* Daná čtyři různá čísla z intervalu  $(0, 1)$  zapíšeme v goniometrickém tvaru jako

$$\sin \alpha_1, \quad \sin \alpha_2, \quad \sin \alpha_3, \quad \sin \alpha_4,$$

<sup>10</sup>[44], str. 14.

<sup>11</sup>[31], str. 31.

kde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  jsou čtyři různé úhly z intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Díky tomu, že  $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_i} = \cos \alpha_i$  pro každé  $i$ , máme úkol dokázat existenci dvou indexů  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  s vlastností

$$0 < \sin \alpha_i \cos \alpha_j - \sin \alpha_j \cos \alpha_i < \frac{1}{2} \quad \text{neboli} \quad 0 < \sin(\alpha_i - \alpha_j) < \frac{1}{2}$$

(podle vzorce pro sinus rozdílu). Poslední podmínka bude splněna, právě když pro indexy  $i, j$  bude platit  $0 < \alpha_i - \alpha_j < \frac{\pi}{6}$ , neboť funkce sinus je na intervalu  $(0, \frac{\pi}{6})$  rostoucí a  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ . Takovou dvojici  $\alpha_i, \alpha_j$  ze čtveřice  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  vždy vybereme, neboť v jednom ze tří intervalů  $(0, \frac{\pi}{6})$ ,  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$  a  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ , které dělí celý interval  $(0, \frac{\pi}{2})$  na třetiny, musí dva ze čtyř daných úhlů vždy ležet.

■ **Příklad 6.1.12.** Pro všechna reálná čísla  $x, y$  dokažte nerovnosti<sup>12</sup>

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Rozhodněte rovněž, kdy nastanou rovnosti.

*Řešení:* Elegantní postup založíme na využití goniometrických vzorců

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \omega = \frac{1}{\cos^2 \omega},$$

jejichž platnost je zřejmá. Každá dvě reálná čísla  $x, y$  můžeme zapsat ve tvaru  $x = \operatorname{tg} \alpha$  a  $y = \operatorname{tg} \beta$ , kde  $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Podle uvedených vzorců upravíme výraz ze zadání příkladu, přitom třetí vzorec užijeme pro dvě hodnoty  $\omega = \alpha$  a  $\omega = \beta$ :

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta}} = \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \beta).$$

Obor hodnot posledního výrazu je skutečně interval  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Tím jsou oba odhady ze zadání příkladu dokázány, přitom jedna z rovností nastane, právě když bude platit  $\sin 2(\alpha + \beta) = \pm 1$ , tj.:

$$2(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{neboli} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ . To je zřejmě ekvivalentní s podmínkou  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \pm 1$ , kterou lze užitím vzorce pro tangens součtu přepsat do původních proměnných  $x, y$  ve tvaru

$$\frac{x+y}{1-xy} = \pm 1.$$

(Vyhovující dvojice  $[x, y]$  jako body v rovině s kartézskou soustavou souřadnic  $Oxy$  zaplní dvě rovnoosé hyperboly se středy  $[1, 1]$  a  $[-1, -1]$ .)

■ **Příklad 6.1.13.** Dokažte, že funkce  $\varrho$  daná předpisem

$$\varrho(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}$$

má obor hodnot  $(0, 1)$  a splňuje tzv. trojúhelníkovou nerovnost<sup>13</sup>

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z) \quad \text{pro všechna } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

<sup>12</sup>[31], str. 31, bez diskuse o případech rovnosti.

<sup>13</sup>[30], str. 240.

*Řešení:* Libovolná reálná čísla  $x, y, z$  lze zapsat ve tvaru

$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta \quad \text{a} \quad z = \operatorname{tg} \gamma, \quad \text{kde } \alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dosaďme do předpisu pro funkci  $\varrho$  a upravme (s ohledem na to, že  $\cos \omega > 0$  pro každé  $\omega \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ )

$$\varrho(x, y) = \frac{|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{|\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}} = |\sin(\alpha - \beta)|.$$

(Využili jsme běžné goniometrické vzorce.) Tím je tvrzení oboru hodnot funkce  $\varrho$  dokázáno a trojúhelníkovou nerovnost, kterou máme ověřit, lze zapsat ve tvaru

$$|\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| \geq |\sin(\alpha - \gamma)|.$$

Prověrkou založíme na vzorci pro sinus součtu, podle kterého platí

$$\begin{aligned} |\sin(\alpha - \gamma)| &= |\sin((\alpha - \beta) + (\beta - \gamma))| = |\sin(\alpha - \beta) \cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma)| \leq \\ &\leq |\sin(\alpha - \beta)| \cdot |\cos(\beta - \gamma)| + |\cos(\alpha - \beta)| \cdot |\sin(\beta - \gamma)| \leq \\ &\leq |\sin(\alpha - \beta)| \cdot 1 + |\sin(\beta - \gamma)| \cdot 1. \end{aligned}$$

Tím je celé řešení ukončeno.

■ **Příklad 6.1.14.** Pro libovolná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ , kde  $n \geq 2$ , dokažte<sup>14</sup>

$$\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq 1.$$

*Řešení:* Nejprve se v případě  $n > 2$  pomocí vynechání některých činitelů vedoucího k odhadům

$$\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \sqrt{a_1 a_2} \quad \text{a} \quad \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)}$$

„zbavíme“ proměnných  $a_3, a_4, \dots, a_n$  a zredukujeme tak vše na důkaz nerovnosti

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)} \leq 1.$$

Užitím substitucí  $a_1 = \cos^2 \alpha_1, a_2 = \cos^2 \alpha_2$  s vhodnými úhly  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$  prepíšeme díky goniometrickým jedničkám poslední nerovnost do tvaru

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \leq 1.$$

Podle vzorce pro kosinus rozdílu je však levá strana rovna  $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ , což je skutečně hodnota nepřevyšující číslo 1. Důkaz je hotov.

■ **Příklad 6.1.15.** Pro libovolná reálná čísla  $x, y, z$  dokažte nerovnost

$$(xy + yz + zx - 1)^2 \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)$$

a zjistěte, kdy v ní nastane rovnost.<sup>15</sup>

*Řešení:* Užitím substitucí  $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta, z = \operatorname{tg} \gamma$  s úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ , které k daným číslům  $x, y, z$  vždy v intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  najdeme, upravíme součin na pravé straně dokazované nerovnosti do tvaru

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} = \\ &= \frac{1}{(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2}. \end{aligned}$$

<sup>14</sup>[30], str. 239, upraveno.

<sup>15</sup>[29], str. 116, bez diskuse o případu rovnosti.

Naší úlohou je tak vlastně dokázat nerovnost

$$|(xy + yz + zx - 1) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma| \leq 1.$$

Do výrazu uvnitř absolutní hodnoty dosadíme za  $x, y, z$  a dále užitím běžných goniometrických vzorců vyjádření výrazu podstatně zjednodušíme:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha - 1) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \sin \beta (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) - \cos \beta (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) = \\ &= \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) - \cos \beta \cos(\alpha + \gamma) = -\cos(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Protože poslední výraz má všechny hodnoty skutečně v intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , je nerovnost ze zadání příkladu dokázána. Rovnost v ní přitom nastane, právě když bude platit  $|\cos(\alpha + \beta + \gamma)| = 1$  neboli  $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$ . Poslední rovnost je však podle výsledku příkladu 4.6.4 ekvivalentní s rovností

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{neboli} \quad x + y + z = xyz.$$

Hledané trojice čísel  $x, y, z$  jsou tedy právě ty, jež splňují poslední rovnici.

■ **Příklad 6.1.16.** Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{ab + c^2}}$$

pro libovolná kladná reálná čísla  $a, b, c$  splňující podmínku  $ab \leq c^2$ .<sup>16</sup>

*Řešení:* Substituce  $a = c \operatorname{tg} \alpha, b = c \operatorname{tg} \beta$  pro vhodné úhly  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  vede k následujícím vyjádřením:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= c^2(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = c^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{c^2}{\cos^2 \alpha}, \\ b^2 + c^2 &= c^2(\operatorname{tg}^2 \beta + 1) = \frac{c^2}{\cos^2 \beta}, \\ ab + c^2 &= c^2(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1) = c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{c^2 \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

Zadanou nerovnost lze proto (s ohledem na  $\cos \alpha, \cos \beta > 0$ ) zapsat jako

$$\frac{\cos \alpha}{c} + \frac{\cos \beta}{c} \leq \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}},$$

odkud po vynásobení kladným číslem  $c$  a umocnění vychází ekvivalentní nerovnost ve tvaru

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \leq \frac{4 \cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}$$

neboli (s ohledem na  $\cos(\alpha - \beta) > 0$ )

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 2 \cos \alpha \cos \beta (2 - \cos(\alpha - \beta)).$$

<sup>16</sup>[29], str. 80, upraveno.

Protože v této nerovnosti mezi kladnými výrazy platí pro čísel v závorce na pravé straně zřejmý odhad  $2 - \cos(\alpha - \beta) \geq 1$ , bude tato nerovnost platit, když dokážeme silnější nerovnost (se zmenšenou pravou stranou)

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Zvolíme k tomu cestu ekvivalentních úprav s využitím běžných goniometrických vzorců:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \right) \cdot \cos(\alpha - \beta) \leq \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\ & \left( 1 + \cos \frac{2\alpha + 2\beta}{2} \cos \frac{2\alpha - 2\beta}{2} \right) \cos(\alpha - \beta) \leq \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\ & \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \cos^2(\alpha - \beta) \leq \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\ & -\cos(\alpha + \beta) [1 - \cos^2(\alpha - \beta)] \leq 0, \\ & \cos(\alpha + \beta) \sin^2(\alpha - \beta) \geq 0. \end{aligned}$$

Celý dosavadní postup byl korektní pro libovolné dva úhly  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Poslední nerovnost však (kromě případu  $\alpha = \beta$ ) platí, jen když je splněna podmínka  $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Tu nám zaručí, jak nyní ukážeme, předpoklad  $ab \leq c^2$  ze zadání příkladu. Z něj po dosazení zavedené substituce  $a = c \operatorname{tg} \alpha, b = c \operatorname{tg} \beta$  dostaneme  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \leq 1$ , což podle známých vlastností funkce tangens na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  znamená právě to, že platí podmínka  $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , kterou jsme k ukončení celého důkazu potřebovali.

■ **Příklad 6.1.17.** Předpokládejme, že z daných kladných reálných čísel  $a, b, c$  je číslo  $c$  nejmenší. Dokažte nerovnosti<sup>17</sup>

$$\left( \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) \sqrt{ab} \leq \sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)} \leq 2\sqrt{ab}.$$

*Řešení:* K odstranění odmocnin v prostředním zadaném výrazu využijeme dvě zřejmé goniometrické identity

$$1 \pm \sin 2\omega = (\sin \omega \pm \cos \omega)^2.$$

Všechny tři zadané výrazy proto nejprve vydělíme kladnou hodnotou  $\sqrt{ab}$  a do získaných ekvivalentních nerovností

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \leq \sqrt{\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq 2$$

dosadíme za zlomky  $\frac{c}{a}$  a  $\frac{c}{b}$ , které díky předpokladu ze zadání leží v intervalu  $(0, 1)$ , vyjádření

$$\frac{c}{a} = \sin 2\alpha \quad \text{a} \quad \frac{c}{b} = \sin 2\beta$$

s vhodnými úhly  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$ . S přihlédnutím k nerovnostem  $\cos \alpha \geq \sin \alpha > 0$  a  $\cos \beta \geq \sin \beta > 0$  můžeme díky identitám z úvodu řešení zapsat výsledek dosazení jako dvojici nerovností

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leq (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta) + (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \beta - \sin \beta) \leq 2,$$

které lze užitím běžných vzorců zapsat jako

$$2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 2 \cos(\alpha - \beta) \leq 2.$$

Protože z  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$  plyne, že obě hodnoty  $\cos(\alpha - \beta)$  a  $\sin(\alpha + \beta)$  leží v intervalu  $(0, 1)$ , je platnost posledních dvou nerovností zřejmá, a proto platí i to, co jsme měli dokázat.

<sup>17</sup>[19], str. 210.

■ **Příklad 6.1.18.** Předpokládejme, že z daných kladných reálných čísel  $a, b, c$  je číslo  $d$  největší. Dokažte nerovnost<sup>18</sup>

$$\sqrt{a(d-b)(d-c)} + \sqrt{b(d-a)(d-c)} + \sqrt{c(d-a)(d-b)} \leq \sqrt{d^3} + \sqrt{abc}.$$

*Řešení:* K odstranění odmocnin využijeme goniometrické jedničky následujícím postupem. Do dokazované nerovnosti vydělené kladným číslem  $\sqrt{d^3}$ , kterou zapíšeme va tvaru

$$\sqrt{\frac{a}{d} \left(1 - \frac{b}{d}\right) \left(1 - \frac{c}{d}\right)} + \sqrt{\frac{b}{d} \left(1 - \frac{a}{d}\right) \left(1 - \frac{c}{d}\right)} + \sqrt{\frac{c}{d} \left(1 - \frac{a}{d}\right) \left(1 - \frac{b}{d}\right)} \leq 1 + \sqrt{\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d}},$$

dosadíme vyjádření

$$\frac{a}{d} = \sin^2 \alpha, \quad \frac{b}{d} = \sin^2 \beta \quad \text{a} \quad \frac{c}{d} = \sin^2 \gamma$$

pro vhodné úhly  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ , které existují díky předpokladu  $\max(a, b, c) \leq d$  ze zadání příkladu. S využitím goniometrických jedniček a s přihlédnutím k tomu, že obě funkce sinus a kosinus jsou na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  nezáporné, dostaneme po dosažení nerovnost

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \leq 1 + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Tu nyní dokážeme tak, že nejprve člen  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  převedeme z pravé strany na levou a nový výraz na levé straně upravíme užitím běžných goniometrických vzorců, abychom ověřili, že jeho hodnota je skutečně menší než 1:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \\ & = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \gamma = \\ & = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma) \leq 1. \end{aligned}$$

Tím je celý důkaz hotov.

■ **Příklad 6.1.19.** Necht'  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost reálných čísel splňující podmínku

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}} \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

Dokažte, že tato posloupnost je periodická.<sup>19</sup>

*Řešení:* Přímým algebraickým výpočtem můžeme užitím daného rekurentního vzorce vyjádřit pomocí  $x_n$  postupně  $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots$  atd., až zjistíme, že  $x_{n+6} = x_n$ , že tedy zkoumaná posloupnost má periodu 6. Místo takového poměrně pracného postupu přepíšeme rekurentní vzorec do tvaru

$$x_{n+1} = \frac{x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + x_n \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}},$$

který připomíná vzorec pro tangens rozdílu

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

<sup>18</sup>[19], str. 226.

<sup>19</sup>[31], str. 30–31.

se známou hodnotou  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  pro  $\beta = \frac{\pi}{6}$ . Když tedy ke členu  $x_n$  určíme úhel  $\alpha_n$  tak, aby platilo  $x_n = \operatorname{tg} \alpha_n$ , dostaneme porovnáním rekurentního a goniometrického vzorce vyjádření  $x_{n+1} = \operatorname{tg}(\alpha_n - \frac{\pi}{6})$ . Zopakujeme-li tuto úvahu pro index  $n$  o 1 větší, dostaneme  $x_{n+2} = \operatorname{tg}(\alpha_n - \frac{2\pi}{6})$  a dále indukcí  $x_{n+k} = \operatorname{tg}(\alpha_n - \frac{k\pi}{6})$  pro každé  $k \geq 1$ . Pro  $k = 6$  tak díky periodě  $\pi$  funkce tangens obdržíme kýženou rovnost  $x_{n+6} = x_n$ , ve které je  $n$  (od začátku našich úvah) libovolné přirozené číslo. Tím je perioda 6 zkoumané posloupnosti prokázána.

■ **Příklad 6.1.20.** Najděte všechny posloupnosti  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  reálných čísel, jež splňují podmínku<sup>20</sup>

$$\sqrt{x_{n+2} + 2} \leq x_n \leq 2 \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

*Řešení:* Díky nezápornosti odmocniny leží všechny členy  $x_n$  každé vyhovující posloupnosti v intervalu  $(0, 2)$ . Proto můžeme zavést substituci  $x_n = 2 \cos \alpha_n$  pro vhodné  $\alpha_n \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  při každém  $n \geq 1$ , abychom s výhodou využili goniometrický vzorec  $1 + \cos 2\omega = 2 \cos^2 \omega$ , díky kterému

$$2 \cos \alpha_n = x_n \geq \sqrt{x_{n+2} + 2} = \sqrt{2(1 + \cos \alpha_{n+2})} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{n+2}}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha_{n+2}}{2}.$$

Protože je funkce kosinus na intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  klesající, z odvozené nerovnosti  $\cos \alpha_n \geq \cos \frac{\alpha_{n+2}}{2}$  plyne  $\frac{\alpha_{n+2}}{2} \geq \alpha_n$  pro každé  $n \geq 1$ . Z tohoto závěru po záměně indexu  $n$  postupně za  $n+2, n+4, \dots$  dostaneme řetězec nerovností

$$\alpha_n \leq \frac{\alpha_{n+2}}{2} \leq \frac{\alpha_{n+4}}{2^2} \leq \frac{\alpha_{n+6}}{2^3} \leq \dots,$$

v němž číselník každého zlomku nepřevyšuje hodnotu  $\frac{\pi}{2}$ . Úhel  $\alpha_n$  z intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  tak splňuje nerovnost  $\alpha_n \leq \frac{\pi}{2^k}$  pro každé  $k \geq 1$ , což je možné, jedině když  $\alpha_n = 0$ . Index  $n$  však byl libovolný, takže podmínku ze zadání příkladu splňuje jediná posloupnost s konstantními členy  $x_n = 2 \cos 0 = 2$ .

■ **Příklad 6.1.21.** Pro libovolné číslo  $p \in \mathbb{R}$  definujme posloupnost  $x_1, x_2, \dots$  vztahy  $x_1 = p$  a

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} \quad \text{pro každé } n \geq 1,$$

pro které  $x_n \neq \pm 1$ . Platí-li  $x_n = \pm 1$  pro jisté  $n$ , řekneme, že sestrojena posloupnost má (konečnou) délku  $n$ . Určete, kolik existuje dotýčných posloupností, jež mají délku 8.<sup>21</sup>

*Řešení:* Protože platí

$$\frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} = \frac{2x_n}{1-x_n^2},$$

využijeme s výhodou vzorce pro tangens dvojnásobného argumentu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Každá uvažovaná posloupnost je určena prvním členem  $x_1 = p$ , který lze zapsat ve tvaru  $x_1 = \operatorname{tg} \psi$  pro vhodné  $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Ze zadání a uvedeného vzorce pak snadno indukcí dostáváme pro každé přípustné  $n$  vyjádření  $x_n = \operatorname{tg}(2^{n-1}\psi)$ . Pro posloupnost délky 8 tudíž musí platit  $x_8 = \operatorname{tg} 2^7 \psi = \operatorname{tg} 128\psi = \pm 1$ , odkud  $128\psi = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$  pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ . S ohledem na podmínku  $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  tak dostáváme

$$\psi = \pm \frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128} = \frac{(4k \pm 1)\pi}{512} = \frac{l\pi}{512},$$

<sup>20</sup>[31], str. 31.

<sup>21</sup>[31], str. 31.

kde  $l$  je libovolné z (lichých) čísel  $-255, -253, \dots, 253, 255$ , kterých je právě 256. Zbývá ještě vysvětlit, že pro žádné takové  $\psi$  nenastane  $\operatorname{tg}(2^{n-1}\psi) = \pm 1$  již při některém  $n < 8$ . Kdyby tomu tak bylo, muselo by existovat  $m \in \mathbb{Z}$ , pro které by platilo

$$2^{n-1} \cdot \frac{l\pi}{512} = \pm \frac{\pi}{4} + m\pi \quad \text{neboli} \quad 2^{n-1}l = \pm 128 + 512m.$$

Pravá strana je však násobkem čísla  $128 = 2^7$ , navíc číslo  $l$  je liché, takže levá strana je násobkem  $2^7$ , jen když  $n - 1 \geq 7$ , tj.  $n \geq 8$ . Tím je dokázáno, že dotyčných posloupností délky 8 je právě 256.

■ **Příklad 6.1.22.** Dvě posloupnosti reálných čísel  $x_1, x_2, \dots$  a  $y_1, y_2, \dots$  jsou definovány vztahy  $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$ ,

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2} \quad \text{a} \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}} \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

Dokažte, že nerovnosti  $2 < x_n y_n < 3$  platí pro všechny indexy  $n \geq 2$ .<sup>22</sup>

*Řešení:* K úpravě výrazu  $\sqrt{1 + x^2}$  je výhodná substituce  $x = \operatorname{tg} \alpha$ :

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{|\cos \alpha|}.$$

Obě naše posloupnosti jsou tvořeny výlučně kladnými čísly, takže jejich členy lze zapsat ve tvaru  $x_n = \operatorname{tg} \alpha_n$  a  $y_n = \operatorname{tg} \beta_n$ , kde  $\alpha_n, \beta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$  pro každé  $n \geq 1$ . Protože  $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ , platí  $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\pi}{3}$  a podle zadaných rekurentních vztahů a vzorce z úvodu řešení, ve kterém v případě  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  můžeme psát  $\cos \alpha$  bez znaku absolutní hodnoty, dostáváme běžnými goniometrickými úpravami

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{n+1} = x_{n+1} &= \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{1}{\cos \alpha_n} = \frac{\sin \alpha_n + 1}{\cos \alpha_n} = \frac{(\sin \frac{\alpha_n}{2} + \cos \frac{\alpha_n}{2})^2}{\cos^2 \frac{\alpha_n}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_n}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha_n}{2} + \cos \frac{\alpha_n}{2}}{\cos \frac{\alpha_n}{2} - \sin \frac{\alpha_n}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_n}{2} \right), \\ \operatorname{tg} \beta_{n+1} = y_{n+1} &= \frac{\operatorname{tg} \beta_n}{1 + \frac{1}{\cos \beta_n}} = \frac{\sin \beta_n}{1 + \cos \beta_n} = \frac{2 \sin \frac{\beta_n}{2} \cos \frac{\beta_n}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta_n}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2}. \end{aligned}$$

Protože všechny úhly  $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_n}{2}, \frac{\beta_n}{2}$  leží v intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$ , odvozené rovnosti znamenají, že pro každé  $n \geq 1$  platí

$$\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_n}{2} \quad \text{a} \quad \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}.$$

Odtud s přihlédnutím k  $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\pi}{3}$  dostáváme pro úhly  $\alpha_n, \beta_n$  s obecným indexem  $n$  vzorce (jež lze ověřit indukcí)

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \quad \text{a} \quad \beta_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Pro každé  $n \geq 1$  tak máme

$$\begin{aligned} x_n y_n = \operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \beta_n &= \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 2 \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}. \end{aligned}$$

<sup>22</sup>[29], str. 134–5.



Proto dokazované nerovnosti  $2 < x_n y_n < 3$  platí právě pro ty indexy  $n$ , pro které je splněna podmínka

$$0 < \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \frac{1}{3}.$$

Levá nerovnost je zřejmá, pravá pro každé  $n \geq 2$  plyne z odhadu  $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$ .

■ **Příklad 6.1.23.** Pro každé číslo  $p \in \mathbb{R}$  definujeme posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  vztahy  $x_1 = p$  a

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

Určete, pro kolik hodnot  $p$  platí  $x_N = 0$  s pevně zvoleným indexem  $N \geq 2$ .<sup>23</sup>

*Řešení:* Vyřešíme nejprve úkol pro  $N = 2$ . Protože  $x_2 = 4x_1(1 - x_1) = 4p(1 - p)$ , rovnost  $x_2 = 0$  nastane pro právě dvě hodnoty  $p$ , totiž pro  $p = 0$  a  $p = 1$ . Obecněji nyní ukážeme, že rovnost  $x_N = 0$  celkem nastane pro  $2^{N-2} + 1$  hodnot  $p = \sin^2 \frac{k\pi}{2^{N-1}}$ , kde  $k = 0, 1, \dots, 2^{N-2}$ .

Všimněme si, že funkce  $f(x) = 4x(1 - x)$  z předpisu  $x_{n+1} = f(x_n)$  zkoumaných posloupností splňuje identitu

$$f(x) = 4x(1 - x) = 1 - (2x - 1)^2.$$

Platí-li proto  $f(x) \in \langle 0, 1 \rangle$  pro určité  $x$ , pak i  $(2x - 1)^2 \in \langle 0, 1 \rangle$  neboli  $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$ , což znamená  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Díky takto dokázané implikaci

$$f(x) \in \langle 0, 1 \rangle \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

platí o našich posloupnostech pravidlo

$$x_N = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in \langle 0, 1 \rangle \quad \text{pro každé } n \in \{1, 2, \dots, N - 1\},$$

takže pro první člen  $x_1 = p$  každé posloupnosti, jež splňuje podmínku  $x_N = 0$  s daným (dále již pevným) indexem  $N \geq 2$ , můžeme zavést výhodnou substituci  $p = \sin^2 \alpha$  s vhodným úhlem  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Díky ní totiž dostaneme

$$x_2 = 4 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha,$$

podobně  $x_3 = \sin^2(2^2\alpha)$  a indukci  $x_n = \sin^2(2^{n-1}\alpha)$  pro každé  $n \geq 1$ . Člen  $x_N = \sin^2(2^{N-1}\alpha)$  je pak roven nule, právě když platí  $2^{N-1}\alpha = k\pi$  pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ . Všechny různé vyhovující hodnoty parametru

$$p = \sin^2 \alpha = \sin^2 \frac{k\pi}{2^{N-1}}$$

pak zřejmě dostaneme volbou  $k = 0, 1, \dots, 2^{N-2}$  (pro krajní hodnoty  $k = 0$ , resp.  $k = 2^{N-2}$  to jsou hodnoty  $p = 0$ , resp.  $p = 1$ , jež vyhovují podmínce  $x_N = 0$  pro každé  $N \geq 2$ ). Rovnost  $x_N = 0$  s daným  $N \geq 2$  je tedy skutečně splněna pro právě  $2^{N-2} + 1$  různých hodnot  $p$  členu  $x_1$ , jak jsme slíbili dokázat.

■ **Příklad 6.1.24.** Rozhodněte, zda existuje 100-prvková množina reálných čísel, do které s každým číslem  $x$  patří i číslo  $2x^2 - 1$ .<sup>24</sup>

*Řešení:* Kladnou odpověď potvrdíme konstrukcí vyhovující 100-prvkové množiny. Mnohočlen  $2x^2 - 1$  ze zadání příkladu napovídá, že ke konstrukci bude možné využít vzorec pro kosinus dvojnásobného

<sup>23</sup>[29], str. 145.

<sup>24</sup>[19], str. 227.

argumentu  $\cos 2\omega = 2\cos^2 \omega - 1$ , platný pro každé  $\omega \in \mathbb{R}$ . Když totiž sestrojíme (nekonečnou) posloupnost reálných čísel  $x_1, x_2, x_3, \dots$  určenou vztahy  $x_1 = \cos \alpha$  pro dané  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad \text{pro každé } n \geq 1,$$

bude díky zmíněnému vzorci platit  $x_2 = \cos 2\alpha, x_3 = \cos 4\alpha, \dots$ , obecně  $x_n = \cos(2^{n-1}\alpha)$  pro každé  $n \geq 1$ . Požadovanou vlastnost pak bude mít množina

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{100}\},$$

budou-li v ní zapsané hodnoty navzájem různé a bude-li navíc platit  $x_{101} = x_1$  neboli  $\cos 2^{100}\alpha = \cos \alpha$ . Stačí tedy najít takové  $\alpha > 0$ , aby všechna čísla

$$\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \dots, 2^{99}\alpha$$

ležela v intervalu  $(0, \pi)$ , na kterém je funkce kosinus prostá, a aby zároveň platilo  $2^{100}\alpha = \alpha + 2\pi$ . Protože obě tyto vlastnosti má číslo  $\alpha = \frac{2\pi}{2^{100}-1}$ , je konstrukce vyhovující množiny hotova.

■ **Příklad 6.1.25.** Najděte největší hodnotu výrazu

$$V = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2),$$

jsou-li zastoupené reálné proměnné vázány rovnostmi

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2,$$

kde  $c > 0$  je daná konstanta.<sup>25</sup>

*Řešení:* Body  $[x_1, x_2]$  a  $[y_1, y_2]$  leží v rovině s kartézskou soustavou souřadnic na kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným  $c$ , takže je můžeme zapsat jako

$$[x_1, x_2] = [c \cdot \cos \alpha, c \cdot \sin \alpha] \quad \text{a} \quad [y_1, y_2] = [c \cdot \cos \beta, c \cdot \sin \beta]$$

s vhodnými úhly  $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Dosaďme tato vyjádření do výrazu  $V$ , upravme užitím běžných goniometrických vzorců a nakonec shora odhadněme:

$$\begin{aligned} V &= 2 - c(\cos \alpha + \sin \alpha + \cos \beta + \sin \beta) + c^2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= 2 - c\sqrt{2} \left( \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} \right) \right) + c^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) \leq \\ &\leq 2 + c\sqrt{2}(1 + 1) + c^2. \end{aligned}$$

Rovnost v odvozené nerovnosti nastane, bude-li platit zároveň

$$\sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \beta + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \quad \text{a} \quad \cos(\alpha - \beta) = 1,$$

což se vyplní například pro  $\alpha = \beta = \frac{5\pi}{4}$ . To znamená, že

$$\max V = 2 + 2c\sqrt{2} + c^2 = (c + \sqrt{2})^2.$$

---

<sup>25</sup>[30], str. 240.

■ **Příklad 6.1.26.** V oboru reálných čísel řešte kubickou rovnici  $x^3 + px + q = 0$  s obecnými nenulovými koeficienty  $p, q \in \mathbb{R}$ , a to goniometrickou metodou, založenou na užití vzorců pro sinus nebo kosinus trojnásobného argumentu. Charakterizujte rovněž ty kubické rovnice, pro něž je tato metoda použitelná.<sup>26</sup>

*Řešení:* Před vlastním popisem metody připomeňme známý fakt, že na kubickou rovnici ze zadání příkladu, tedy rovnici bez členu  $x^2$ , lze převést každou obecnou kubickou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

a sice záměnou neznámé  $x$  za novou neznámou  $x + \frac{a}{3}$ . Dodejme ještě, že přímo v zadání příkladu jsme vyloučili případy  $p = 0$  a  $q = 0$ , kdy je postup řešení kubické rovnice  $x^3 + px + q = 0$  triviální.

Vzorce, které máme využít a které jsme odvodili v příkladu 4.6.1, totiž

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \text{a} \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

mají natolik podobné pravé strany, že oba dva přinášejí při zamýšleném řešení kubické rovnice  $x^3 + px + q = 0$  stejný užitek. Budeme proto hledat její kořeny ve tvaru  $x = r \cos \alpha$  s vhodnými čísly  $r > 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . K užití vzorce pro  $\cos 3\alpha$  (kterému tedy dáme přednost) zadanou rovnici  $x^3 + px + q = 0$  po dosazení  $x = r \cos \alpha$  upravíme takto:

$$\begin{aligned} (r \cos \alpha)^3 + pr \cos \alpha + q &= 0, \\ \frac{r^3}{4} \left( 4 \cos^3 \alpha + \frac{4p}{r^2} \cos \alpha \right) + q &= 0. \end{aligned}$$

V závorce poslední rovnice dostaneme hodnotu  $\cos 3\alpha$  z výše uvedeného vzorce, bude-li splněna podmínka  $\frac{4p}{r^2} = -3$ . Tu můžeme volbou parametru  $r$  zaručit, ovšem jen tehdy, když je koeficient  $p$  výchozí kubické rovnice záporný (to je první omezení na použitelnost naší metody). Zabývejme se proto dále pouze případem  $p < 0$ . Jak jsme naznačili, podmínku  $\frac{4p}{r^2} = -3$  splníme volbou

$$r = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

a upravenou rovnici zjednodušíme na

$$\frac{r^3}{4} \cdot \cos 3\alpha + q = 0 \quad \text{neboli} \quad \cos 3\alpha = \frac{-4q}{r^3} = \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}}.$$

Dostali jsme základní goniometrickou rovnici s funkcí kosinus, která má řešení, právě když je splněna podmínka (která je druhým omezením našeho postupu)

$$\left| \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right| \leq 1.$$

Je-li splněna, pak označíme

$$\omega = \arccos \left( \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) \in \langle 0, \pi \rangle$$

<sup>26</sup>Podle internetové encyklopedie *Wolfram Math World* popsál tuto méně známou metodu řešení kubických rovnic poprvé L. E. Dickson v roce 1898. Lze s ní seznámit i středoškolsky znalé základů goniometrie, kteří dosud neprobírali komplexní čísla.

a z rovnosti  $\cos 3\alpha = \cos \omega$  dostaneme  $3\alpha = \pm\omega + 2k\pi$  pro vhodné  $k \in \mathbb{Z}$ . Kořenem původní kubické rovnice je tedy každé číslo  $x$  tvaru

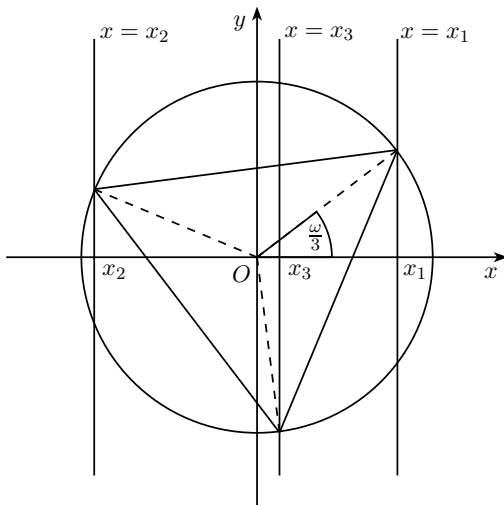
$$x = r \cos \alpha = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left( \pm\frac{\omega}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right), \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

S ohledem na to, že funkce kosinus je sudá a má periodu  $2\pi$ , tak dostáváme tři kořeny rovnice  $x^3 + px + q = 0$  ve tvaru

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\omega}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left( \frac{\omega}{3} + \frac{2\pi}{3} \right), \quad x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left( \frac{\omega}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$$

(lze ukázat, že jsou-li některé z hodnot  $x_1, x_2, x_3$  rovny témuž číslu, jedná se o násobný kořen). Z nalezených vzorců pro kořeny  $x_1, x_2, x_3$  je dobře patrný geometrický význam kladného parametru  $r = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$ . V rovině s kartézskou soustavou souřadnic  $Oxy$  se jedná o poloměr  $r$  té kružnice se středem v počátku  $O$ , jež protíná tři rovnoběžné přímky o rovnicích  $x = x_1, x = x_2$  a  $x = x_3$  ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku, jak je znázorněno na obrázku. Taková kružnice vždy existuje, splňují-li čísla  $x_1, x_2, x_3$  podmínku  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , jež vyjadřuje absenci členu  $x^2$  ve zkoumané kubické rovnici.<sup>27</sup>

Protože více než tři kořeny kubická rovnice mít nemůže, poskytuje popsána metoda pro rovnici



Obrázek 6.1: Kružnice opsaná rovnostrannému trojúhelníku

$x^3 + px + q = 0$  za podmínek

$$p < 0 \quad \text{a} \quad \left| \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right| \leq 1$$

její úplné řešení. Pověsimněme si nyní, že při splnění první podmínky  $p < 0$  lze druhou podmínku upravit do tvaru nerovnosti

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0,$$

<sup>27</sup>V kurzech syntetické geometrie se často objevuje konstrukční úloha sestavit rovnostranný trojúhelník s vrcholy na třech daných rovnoběžkách.

kteřá už (pro nenulová  $p, q$ ) sama má za důsledek podmínku  $p < 0$ . Z teorie kubických rovnic je však dobře známo, že nerovnost  $4p^3 + 27q^2 \leq 0$  charakterizuje právě ty rovnice  $x^3 + px + q = 0$ , jež mají tři reálné kořeny. Právě pro ně je tedy popsána goniometrická metoda řešení použitelná (a vede k nalezení všech tří kořenů). Dodejme, že Cardanova metoda řešení takových rovnic si vynucuje užití komplexních čísel k výpočtu druhých odmocnin ze záporných čísel. Tento případ bývá označován jako *casus irreducibilis* a my jsme se s ním už setkali při řešení goniometrické soustavy v příkladu 4.5.13.

## 6.2 Goniometrický tvar komplexních čísel

K úvahám v této podkapitole nám postačí základní pojmy a znalosti k dotyčné problematice, jak jsou vyloženy například v gymnaziální učebnici [9]. Nebudeme zde proto ani připomínat, jak se *komplexní čísla* a *aritmetické operace* s nimi zavádějí, co znamenají termíny jako *reálná část* a *imaginární část* komplexního čísla, číslo *komplexně sdružené* k danému číslu, *absolutní hodnota* komplexního čísla a jakými symboly se běžně tyto objekty značí. Za známou budeme považovat i skutečnost, že každé nenulové komplexní číslo  $z = a + ib$  (kde  $i^2 = -1$ ) má kromě právě zapsaného algebraického tvaru též standardní vyjádření

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (6.1)$$

kterému se říká *goniometrický tvar komplexního čísla*. V něm je orientovaný úhel  $\alpha$  (zvaný argument komplexního čísla  $z$ ) reálné číslo s vlastností

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{a} \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (6.2)$$

jež však není určeno jednoznačně. (Je-li  $\alpha_0$  jedna vyhovující hodnota, pak každá jiná je tvaru  $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ ). Zdůrazněme, že v případě komplexní jednotky  $|z| = 1$  není soustava dvou rovnic (6.2) ničím jiným, než definicí goniometrických funkcí kosinus a sinus v oboru  $\mathbb{R}$ , jak jsme ji podali v úvodní části kapitoly 4 pomocí jednotkové kružnice opatřené goniometrickou ručičkou.

Zapisování komplexních čísel ve tvaru (6.1) poskytuje jejich uživatelům významné početní výhody, zejména při umocňování a odmocňování těchto čísel. Přestože tyto jednoduché a všeobecně známé poznatky patří rovněž k základům aritmetiky komplexních čísel, vyložíme je nyní podrobně, abychom ukázali jejich souvislost s teorií goniometrických funkcí, kterou jsme vybudovali v kapitole 4. Aplikacemi těchto poznatků se pak budeme zabývat ve zbylé části podkapitoly. Budou to ukázky o to zajímavější, že komplexní čísla nebudou samotným námětem jednotlivých zadání, nýbrž prostředkem jejich řešení.

Zmíněné výhody zápisů (6.1) se odvíjí od pravidla o násobení dvou komplexních jednotek

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \quad (6.3)$$

které dokážeme tak, že závorky na levé straně algebraicky roznásobíme a poté využijeme součtové vzorce pro sinus a kosinus<sup>28</sup>:

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \\ & = \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta = \\ & = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = \\ & = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

<sup>28</sup>Zdůrazněme, že to byly i v kapitole 4 první dokázané vzorce, ze kterých jsme dále odvozovali vše, co jsme pro teorii goniometrických funkcí v oboru  $\mathbb{R}$  potřebovali.

Opakovaným užitím dokázaného pravidla (6.3) při volbě  $\beta = \alpha$  dostaneme významné tvrzení, jež proto patří k těm matematickým větám, které mají své jméno. Říká se jí *Moivreova věta*, zmínili jsme se o ní již v historické části práce na str. 34 a její obsah lze vyjádřit vzorcem

$$\boxed{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).}$$

Uvedený vzorec platí dokonce pro všechny celé (nejen kladné) exponenty  $n$ , neboť z výchozího vzorce (6.3) plyne rovněž pravidlo o podílu dvou komplexních jednotek

$$\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Snadno totiž ověříme, že libovolné dvě komplexní jednotky s navzájem opačnými argumenty, řekněme právě  $\beta$  a  $-\beta$ , jsou čísla nejen navzájem komplexně sdružená, ale také navzájem převrácená:

$$\begin{aligned} \cos(-\beta) + i \sin(-\beta) &= \cos \beta - i \sin \beta, \\ (\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta) &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1. \end{aligned}$$

V důsledku toho také z Moivreovy věty plyne pravidlo

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos n\alpha = \frac{1}{2} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right) \quad \wedge \quad \sin n\alpha = \frac{1}{2i} \left( z^n - \frac{1}{z^n} \right), \quad (6.4)$$

kteří později oceníme při řešení některých příkladů.

První výhoda, kterou Moivreova věta poskytuje, je zřejmá. Máme-li vypočítat mocninu  $(a + ib)^n$  vyššího stupně  $n$ , vyplatí se převést základ  $a + ib$  z algebraického tvaru na goniometrický tvar a pak jednoduše aplikovat dotyčný vzorec.<sup>29</sup> Daleko významnější (protože prakticky nepostradatelná) je role Moivreovy věty při výpočtu *odmocnin* z komplexních čísel. Připomeňme, že  $n$ -tou odmocninou z komplexního čísla  $z$  (kde  $n$  je celé číslo větší než 1) nazýváme každé komplexní číslo  $w$ , které vyhovuje rovnici  $w^n = z$ . Pro  $z = 0$  je to jediné číslo  $w = 0$  ( $n$ -násobný kořen dané rovnice), v případě  $z \neq 0$  rovnici vyhovuje  $n$  různých hodnot  $w = w_k$ , které dostaneme z goniometrického tvaru odmocněnce  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  podle vzorce

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Je patrné, jak tento vzorec získat: pro číslo  $w$  s neznámou absolutní hodnotou a neznámým argumentem stačí vyjádřit  $w^n$  podle Moivreovy věty a pak porovnat obě strany rovnice  $w^n = z$ . Bez důkazu dodejme, že pro obecné  $z = a + ib$  lze pouze v případě  $n = 2$  vypočítat hodnoty  $w_k$  aritmeticky, tj. vyjádřit je z daných čísel  $a, b$  užitím binárních operací  $+, -, \times, :$  doplněných o unární operaci odmocnění (s libovolným odmocnitelem  $2, 3, 4, \dots$ ), uvažovanou v oboru kladných reálných čísel (která je využita i ve výše uvedeném vzorci k vyjádření  $|w_k|$ ). Proto jsou goniometrické funkce nepostradatelné, chceme-li například přesně vyjádřit kořeny jakékoliv kubické rovnice s reálnými koeficienty, a to dokonce i v případě, kdy taková rovnice má tři reálné kořeny. Poznali jsme to již při řešení příkladů 4.5.13 a 6.1.26.

Právě připomenuté řešení kubických rovnic bylo historicky první situací, při níž nový druh čísel, na něž ostatně nikdo předtím ani nepomýšlel, našel v matematických výpočtech uplatnění. Od té

<sup>29</sup>Je to alternativa k přímým algebraickým výpočtům založeným buď na binomické větě, nebo na postupném výpočtu potřebných mocnin nižších stupňů – například k určení  $z^{17}$  stačí postupně počítat  $z^2 = z \cdot z$ ,  $z^4 = z^2 \cdot z^2$ ,  $z^8 = z^4 \cdot z^4$ ,  $z^{16} = z^8 \cdot z^8$ ,  $z^{17} = z^{16} \cdot z$ .

doby se komplexní čísla osvědčila i při řešení řady dalších otázek a stala se rovněž vhodným prostředkem vyjadřování různých vztahů a závislostí nejen v matematice, ale i fyzice. O užitečnosti komplexních čísel, speciálně jejich zápisů v goniometrickém tvaru, při řešení některých úloh z elementární matematiky, se právě nyní přesvědčíme.

Ukázky užití komplexních čísel, které jsme v závěru předchozího odstavce slíbili, jsou obsáhle zpracovány v paragrafu 7 kapitoly 1 dobře dostupného učebního textu [12], a tak by jejich prosté reprodukování v našem textu nebylo příliš účelné. Proto nejdůležitější dotyčné výsledky z [12] zde pouze okomentujeme následným volnějším výkladem. Doplníme je poté už jen čtyřmi řešenými příklady, dvěma převzatými z jiných, méně dostupných zdrojů, a dvěma příklady, které jsme sestavili sami.

První část zmíněného paragrafu z učebnice [12] na str. 61–62 se týká problematiky určování *součtů kombinačních čísel*  $\binom{n}{k}$  s pevným parametrem  $n$  a proměnným parametrem  $k$ , který probíhá některou aritmetickou posloupností.<sup>30</sup> Obecně lze konstatovat, že tyto výsledky plynou z rovností

$$(1+z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}z + \binom{n}{2}z^2 + \dots + \binom{n}{n-1}z^{n-1} + \binom{n}{n}z^n \quad (6.5)$$

platných podle binomické věty, v nichž za parametr  $z$  vybíráme různé (vhodně zvolené) komplexní jednotky. Volby  $z = \pm 1$  znalost komplexních čísel nevyžadují a jsou známým prostředkem k odvození rovností

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

(Tečkami jsou zde, podobně jako v dalších rovnostech, označeny další sčítance  $\binom{n}{k}$ , které se tvoří podle zřejmého zákona, dokud platí  $k \leq n$ .) Přidejme k těmto dvěma rovnostem ještě rovnosti (6.5) pro  $z = \pm i$ , jejichž levé strany mají podle Moivreovy věty hodnoty

$$(1 \pm i)^n = \left( \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n = \left( \sqrt{2} \right)^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} \pm i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

zatímco na pravých stranách těchto rovností jsou mocniny  $(\pm i)^k$ , jejichž výpočet je triviální bez přechodu ke goniometrickému tvaru obou čísel  $\pm i$ . Z takových čtyř rovností lze odvodit, jak je v [12] ukázáno, vzorce pro čtveřici součtů

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j+4} + \binom{n}{j+8} + \dots, \quad \text{kde } j = 0, 1, 2, 3.$$

Poté je ve stejném zdroji ještě odvozen vzorec pro součet

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \dots,$$

a to z šesti rovností (6.5) pro  $z = \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^k$ , kde  $k = 0, 1, \dots, 5$ . Konečně je zde jako cvičení uveden úkol odvodit vzorce pro obdobné součty

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j+3} + \binom{n}{j+6} + \dots, \quad \text{kde } j = 0, 1, 2,$$

a to s návodem, jak kombinovat tři rovnosti (6.5) pro  $z = \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^k$ , kde  $k = 0, 1, 2$ .<sup>31</sup> Namísto těchto komplikovaných postupů ukažme pro zajímavost, jak lze vypočítat mocninu  $(1+z)^n$

<sup>30</sup>Řešení tohoto problému v obecném podání lze nalézt v [8] na str. 240 – 242.

<sup>31</sup>Pozoruhodná je skutečnost, že dva z posledních tří vypsanych součtů se při daném  $n$  rovnají a třetí součet je buď o 1 menší, nebo o 1 větší. Důkaz tohoto poznatku bez odvození explicitních vzorců pro uvažované tři součty je podán v [8] na str. 242.

z levé strany rovnosti (6.5) pro libovolnou komplexní jednotku  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Využijeme k tomu nejprve vzorce pro kosinus a sinus dvojnásobného argumentu a poté Moivreovu větu:

$$\begin{aligned} (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^n = \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2}\right)^n \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)^n = \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2}\right)^n \cdot \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Po dosazení tohoto výsledku do levé strany rovnosti (6.5) a porovnání reálných a imaginárních částí obou stran dostaneme nové goniometrické vzorce<sup>32</sup>

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cos \alpha + \dots + \binom{n}{n} \cos n\alpha, \\ 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2} &= \binom{n}{1} \sin \alpha + \binom{n}{2} \sin 2\alpha + \dots + \binom{n}{n} \sin n\alpha \end{aligned}$$

platné pro každé  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Různým goniometrickým vzorcům je věnována i druhá část posuzovaného paragrafu z učebnice [12] na str. 62–67. Nejdříve jsou z rovnosti

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \quad (\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

užitím binomické věty k součtu na pravé straně a porovnáním reálných a imaginárních částí obou stran odvozeny užitečné vzorce pro kosinus a sinus  $n$ -násobného argumentu<sup>33</sup>

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \binom{n}{0} \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots, \\ \sin n\alpha &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots \end{aligned}$$

Dodejme k tomu, že pomocí goniometrické jedničky lze uvedené vzorce zjednodušit do tvaru  $\cos n\alpha = F_n(\cos \alpha)$  a – v případě lichého  $n$  – rovněž  $\sin n\alpha = G_n(\sin \alpha)$ , s vhodnými mnohočleny  $F_n$ , resp.  $G_n$ . Dále jsou v [12] odvozena vyjádření součtů

$$\begin{aligned} S_n &= \sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin(\varphi + n\alpha), \\ C_n &= \cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots + \cos(\varphi + n\alpha) \end{aligned}$$

pro libovolná  $\varphi, \alpha \in \mathbb{R}$ , která jsme nejprve pro  $\varphi = 0$  dokazovali v příkladu 4.6.11 (s jiným označením) bez užití komplexních čísel metodou teleskopického sčítání, abychom v následné poznámce rozšířili jejich platnost na případ obecného  $\varphi$ . Nyní po vzoru [12] z hledaných reálných hodnot  $S_n$  a  $C_n$  sestavíme komplexní číslo  $C_n + iS_n$ , které můžeme podle pravidla (6.3) a Moivreovy věty zapsat jako součet

$$C_n + iS_n = w(1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n})$$

<sup>32</sup>[8], str. 238–9.

<sup>33</sup>Poznamenejme, že tento postup můžeme využít vždy, když potřebujeme například vzorce pro  $\cos 3\alpha$  a  $\sin 3\alpha$  a nemáme přitom po ruce žádnou příručku. To ostatně platí i pro součtové vzorce pro sinus a kosinus, pokud je náhodou zapomeneme – stačí zapsat pravidlo (6.3) a algebraicky roznásobit zastoupený součin.



s komplexními jednotkami  $w = \cos \varphi + i \sin \varphi$  a  $z = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}$ , přitom u druhé jednotky jsme záměrně zvolili argument  $\frac{\alpha}{2}$  (a ne  $\alpha$ ) kvůli výhodě, která se ukáže v dalším výpočtu. K určení takového součtu lze v případě  $z^2 \neq 1$  (neboli  $\alpha \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) využít zřejmou algebraickou identitu

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{2n} = \frac{z^{2n+2} - 1}{z^2 - 1},$$

podle které proto platí

$$C_n + iS_n = \frac{w(z^{2n+2} - 1)}{z^2 - 1} = \frac{wz^n(z^{n+1} - z^{-n-1})}{z - z^{-1}}.$$

Dosadíme-li sem ještě vyjádření

$$z^{n+1} - z^{-n-1} = 2i \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \quad \text{a} \quad z - z^{-1} = 2i \sin \frac{\alpha}{2}$$

platná podle pravidla (6.4) a uvážíme-li, že komplexní jednotka  $wz^n$  má argument rovný  $\varphi + \frac{n\alpha}{2}$ , obdržíme rovnost

$$C_n + iS_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \left( \cos \left( \varphi + \frac{n\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \varphi + \frac{n\alpha}{2} \right) \right),$$

z níž porovnáním reálných a imaginárních částí plynou výsledné vzorce

$$S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \left( \varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{a} \quad C_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos \left( \varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

pro každé  $\alpha \neq 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). (Pro vyloučené hodnoty  $\alpha = 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) platí triviálně  $S_n = (n+1) \sin \varphi$  a  $C_n = (n+1) \cos \varphi$ ). Uveďme ještě jeden důsledek odvozeného vzorce pro součet  $C_n$ , totiž rovnost<sup>34</sup>

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \cos \frac{5\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

jež platí pro každé celé  $n \geq 1$ . (Stačí dosadit  $\varphi = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2n+1}$  do vzorce pro  $C_{n-1}$ .)

Třetí, závěrečná část posuzovaného paragrafu z učebnice [12] na str. 63–69 je věnována odvozování složitějších výsledků cestou využití mnohočlenů a jejich rozkladů na kořenové činitele v komplexním oboru. Protože je tato problematika poněkud vzdálenější od zaměření naší práce, převezmeme z této části textu [12] jedinou jednodušší ukázkou, totiž důkaz zajímavé goniometrické rovnosti

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

pro každé celé číslo  $n > 1$ , založený na rovnosti mnohočlenů stupně  $n$

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - w^2)(x - w^4) \dots (x - w^{2n-2}),$$

kde  $x$  je (komplexní) proměnná a  $w$  komplexní jednotka s argumentem  $\frac{\pi}{n}$ , tedy

$$w = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}.$$

<sup>34</sup>Tato rovnost je pro  $n = 3$  odvozena v [28], str. 70–71, a pro  $n = 5$  v [8], str. 214.

Obě strany uvedené rovnosti, kterou lze zdůvodnit tím, že rovnice  $x^n = 1$  má v oboru komplexních čísel  $n$  různých kořenů  $1, w^2, w^4, \dots, w^{2n-2}$  (jsou to totiž právě hodnoty  $n$ -té odmocniny z čísla 1), můžeme zřejmě vydělit beze zbytku dvojitelnem  $x - 1$  a získat tak novou rovnost mnohočlenů (stupně  $n - 1$ )

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x - w^2)(x - w^4) \dots (x - w^{2n-2}).$$

Oba poslední mnohočleny mají stejné hodnoty pro každé číslo  $x$ , tedy i pro  $x = 1$ , což znamená, že platí

$$n = (1 - w)(1 - w^2) \dots (1 - w^{2n-2}), \quad \text{odkud} \quad n = |1 - w| \cdot |1 - w^2| \dots |1 - w^{2n-2}|$$

podle pravidla o absolutní hodnotě součinu několika komplexních čísel. V našem případě jednotliví činitelé mají hodnotu

$$|1 - w^{2k}| = |w^{-k}(w^k - w^{-k})| = |w^k - w^{-k}| = \left| 2i \sin \frac{k\pi}{n} \right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n},$$

kde jsme opět výhodně využili pravidlo (6.4). Vynásobením posledních rovností pro  $k = 1, 2, \dots, n-1$  už zřejmě po snadné úpravě dostaneme dokazovanou rovnost.

Posledním důkazem jsme ukončili náš výběr ukázek užití goniometrického tvaru komplexních čísel podle učebního textu [12]. Přistoupíme proto nyní k výkladu námětů převzatých z jiných zdrojů.

■ **Příklad 6.2.1.** Předpokládejme, že reálná čísla  $\alpha, \beta, \gamma$  splňují rovnosti

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0.$$

Dokažte, že pak rovněž platí rovnosti<sup>35</sup>

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0.$$

*Řešení:* Sestavme tři komplexní jednotky

$$x = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad y = \cos \beta + i \sin \beta, \quad z = \cos \gamma + i \sin \gamma.$$

Podle předpokladu pro ně platí

$$\begin{aligned} x + y + z &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\cos \beta + i \sin \beta) + (\cos \gamma + i \sin \gamma) = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= (\cos \alpha - i \sin \alpha) + (\cos \beta - i \sin \beta) + (\cos \gamma - i \sin \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti díky úpravě

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + xz + yz}{xyz}$$

plyne  $xy + xz + yz = 0$ , což spolu s první rovností vede k závěru, že platí

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 0.$$

To podle Moivreovy věty znamená

$$(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + (\cos 2\beta + i \sin 2\beta) + (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma) = 0,$$

a proto reálná i imaginární část součtu na levé straně jsou rovny nule. Jinak řečeno, platí rovnosti, které jsme měli dokázat.

<sup>35</sup>[28], str. 70.

■ **Příklad 6.2.2.** Dokažte rovnost<sup>36</sup>

$$\frac{1}{\sin 24^\circ} + \frac{1}{\sin 48^\circ} + \frac{1}{\sin 96^\circ} = \frac{1}{\sin 12^\circ}.$$

*Řešení:* Zavedeme komplexní jednotku

$$z = \cos 12^\circ + i \sin 12^\circ,$$

pro kterou platí  $z^{15} = \cos 15 \cdot 12^\circ + i \sin 15 \cdot 12^\circ = -1$ . Z rozkladu

$$0 = z^{15} + 1^{15} = (z + 1)(z^{14} - z^{13} + z^{12} - z^{11} + \dots + z^2 - z + 1)$$

vzhledem k  $z + 1 \neq 0$  plyne rovnost

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{14} = z + z^3 + z^5 + \dots + z^{13},$$

na kterou dokazovanou rovnost ekvivalentně převedeme. Nejprve do ní dosadíme vyjádření

$$\begin{aligned} \sin 12^\circ &= \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz}, & \sin 24^\circ &= \frac{1}{2i} \left( z^2 - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{z^4 - 1}{2iz^2}, \\ \sin 48^\circ &= \frac{1}{2i} \left( z^4 - \frac{1}{z^4} \right) = \frac{z^8 - 1}{2iz^4}, & \sin 96^\circ &= \frac{1}{2i} \left( z^8 - \frac{1}{z^8} \right) = \frac{z^{16} - 1}{2iz^8}, \end{aligned}$$

kteřá platí podle vzorců (6.4). Dostaneme rovnost

$$\frac{2iz^2}{z^4 - 1} + \frac{2iz^4}{z^8 - 1} + \frac{2iz^8}{z^{16} - 1} = \frac{2iz}{z^2 - 1},$$

kteřou vydělením číslem  $2iz$  ekvivalentně upravíme na

$$\frac{z}{z^4 - 1} + \frac{z^3}{z^8 - 1} + \frac{z^7}{z^{16} - 1} = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Jmenovatelé čtyř zapsaných zlomků jsou jistě nenulová čísla (neboť nejmenší  $n \in \mathbb{N}$ , pro které platí  $z^n = 1$ , je zřejmě  $n = 30$ ). Proto poslední rovnost můžeme dát upravit tak, že ji vynásobíme číslem  $z^{16} - 1$ , které rovnou v každém zlomku částečně zkrátíme podle rozkladu

$$z^{16} - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1).$$

Dostaneme tak opět ekvivalentní rovnost

$$z(z^4 + 1)(z^8 + 1) + z^3(z^8 + 1) + z^7 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1).$$

Je snadné se přesvědčit, že na levé, resp. pravé straně obdržíme po roznásobení výrazy

$$z + z^3 + z^5 + \dots + z^{13}, \quad \text{resp. } 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{14},$$

kteřé se pro naše  $z = \cos 12^\circ + i \sin 12^\circ$  rovnají, jak jsme odvodili v úvodu řešení. Tím je důkaz hotov.

V posledních dvou příkladech se vrátíme ke dvěma výsledkům z kapitol 2 a 4, které jsme tam odvodili bez užití komplexních čísel. S jejich pomocí teď tyto výsledky znovu dokážeme, tentokrát poměrně „přímočarou“ cestou aritmetických výpočtů s mocninami dotyčné komplexní jednotky.

<sup>36</sup>[28], str. 192, upraveno zadání i řešení.

■ **Příklad 6.2.3.** Užitím komplexních čísel znovu dokažte rovnosti

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \quad \text{a} \quad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

odvozené dříve na str. 47–51 geometrickými úvahami o pravidelném pětiúhelníku a pravidelném desetiúhelníku.

*Řešení:* Pomocí komplexní jednotky

$$z = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ,$$

jež zřejmě splňuje rovnici  $z^5 = -1$ , mají zkoumané hodnoty kosinu podle pravidla (6.4) vyjádření

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{z} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{a} \quad \cos 72^\circ = \frac{1}{z} \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right).$$

Z rovnosti

$$0 = z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

s ohledem na  $z + 1 \neq 0$  vyplývá

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0,$$

což lze (po vydělení nenulovým číslem  $z^2$ ) zapsat jako

$$\left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1 = 0.$$

Pro hodnoty  $\cos 36^\circ$  a  $\cos 72^\circ$  to znamená závislost

$$2 \cos 72^\circ - 2 \cos 36^\circ + 1 = 0 \quad \text{neboli} \quad \cos 72^\circ = \cos 36^\circ - \frac{1}{2},$$

takže ze dvou dokazovaných rovností zřejmě stačí ověřit pouze vzorec pro  $\cos 36^\circ$ , tedy vlastně rovnost

$$z + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Všimněme si, že iracionální číslo na pravé straně je jediným kladným kořenem kvadratické rovnice  $x^2 - x - 1 = 0$ . Pro naše kladné číslo  $2 \cos 36^\circ = z + \frac{1}{z}$  podle výše odvozené rovnosti platí

$$0 = \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1 = \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 - \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1 = \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - \left( z + \frac{1}{z} \right) - 1,$$

takže je to skutečně kořen zmíněné rovnice. Důkaz je hotov.

■ **Příklad 6.2.4.** Užitím komplexních čísel znovu dokažte, že čísla

$$a = \sin 10^\circ, \quad b = \sin 50^\circ, \quad c = \sin 70^\circ$$

splňují rovnosti

$$a + b = c, \quad abc = \frac{1}{8} \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 6,$$

odvozené v příkladu 4.6.28 metodou sestavení kubické rovnice s kořeny  $a, b, -c$  na základě úvah o rovnici  $\sin 3x = \frac{1}{2}$  s využitím vzorce pro sinus trojnásobného argumentu.

*Řešení:* Pro výpočet bude výhodnější daná čísla  $a, b, c$  interpretovat jako hodnoty kosinu, tedy

$$a = \cos 80^\circ, \quad b = \cos 40^\circ, \quad c = \cos 20^\circ,$$

a zapsat je pomocí komplexní jednotky

$$z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$$

ve tvaru

$$a = \frac{1}{2} \left( z^4 + \frac{1}{z^4} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right), \quad c = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Před dosazením těchto vyjádření do dokazovaných rovností si povšimneme, že z rovnosti  $z^9 = -1$  a rozkladu

$$0 = z^9 + 1 = (z^3 + 1)(z^6 - z^3 + 1)$$

plyne  $z^6 - z^3 + 1 = 0$  (neboť  $z^3 + 1 \neq 0$ ). Kromě toho  $z^{10} = z^9 \cdot z = -z$ ,  $z^{11} = z^{10} \cdot z = -z^2$ ,  $z^{12} = -z^3$ , atd. Rovnost  $a + b = c$  dokážeme výpočtem výrazu  $a + b - c$ :

$$\begin{aligned} a + b - c &= \frac{z^8 + 1}{2z^4} + \frac{z^4 + 1}{2z^2} - \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{z^8 + 1 + z^6 + z^2 - z^5 - z^3}{2z^4} = \\ &= \frac{(z^6 - z^3 + 1) + z^2(z^6 - z^3 + 1)}{2z^4} = 0. \end{aligned}$$

Také výpočet součinu z druhé dokazované rovnosti je snadný:

$$\begin{aligned} abc &= \frac{z^8 + 1}{2z^4} \cdot \frac{z^4 + 1}{2z^2} \cdot \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{(z^8 + 1)(z^4 + 1)(z^2 + 1)}{8z^7} \cdot \frac{1 - z^2}{1 - z^2} = \\ &= \frac{1 - z^{16}}{8(z^7 - z^9)} = \frac{1 + z^7}{8(z^7 + 1)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Do třetí dokazované rovnosti upravené násobením  $abc$  do tvaru

$$c(a + b) = ab + 6abc$$

dosadíme již odvozené vztahy  $a + b = c$  a  $abc = \frac{1}{8}$ . Dostaneme rovnost

$$c^2 = ab + \frac{3}{4},$$

kterou nyní ověříme výpočtem rozdílu  $c^2 - ab$ :

$$\begin{aligned} c^2 - ab &= \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2} - \frac{(z^8 + 1)(z^4 + 1)}{4z^6} = \frac{z^4(z^2 + 1)^2 - (z^8 + 1)(z^4 + 1)}{4z^6} = \\ &= \frac{2z^6 + (z^3 - 1)}{4z^6} = \frac{2z^6 + z^6}{4z^6} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

## 6.3 Z matematické kartografie

Vědní obor, který se zabývá vytvářením map a ve svých výpočtech často používá goniometrické funkce, se nazývá *kartografie*. V této podkapitole pojednáme nejdříve něco málo o tomto oboru samotném a následně nahlédneme do historie zrodu prvních map, který by se bez funkcí sinus, kosinus, tangens a kotanges neobešel.<sup>37</sup> Při výkladu mírně přebročíme rámec elementární matematiky, když využijeme některé základní pojmy a poznatky z diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné (v rozsahu gymnaziálního úvodu do této oblasti matematické analýzy).

<sup>37</sup>Hlavní inspirací pro tento text nám byla 13. kapitola knihy [25].

Země, Měsíc, ale i ostatní planety nemají matematicky popsatelný pravidelný tvar. Tato tělesa jsou proto v kartografii nahrazována tzv. referenčními tělesy, nejčastěji referenčním elipsoidem a koulí. Jejich povrchy nazýváme *referenčními plochami*, na nichž jsou definovány souřadnice zeměpisná šířka ( $\phi$ ) a zeměpisná délka ( $\lambda$ ). Výslednou mapu kreslíme do roviny, které říkáme *zobrazovací rovina* a v níž polohu bodů určujeme buď polárními souřadnicemi ( $\rho, \varepsilon$ ), nebo kartézskými souřadnicemi ( $x, y$ ), jejichž vzájemné vztahy jsou vyjádřeny rovnostmi

$$x = \rho \cos \varepsilon, \quad y = \rho \sin \varepsilon.$$

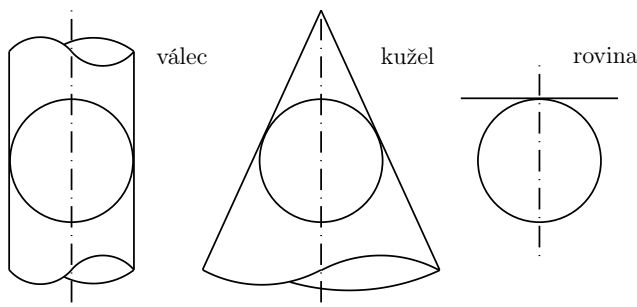
Základním úkolem matematické kartografie je teoretické i praktické vyřešení přenosu různých bodů a čar z referenční plochy do zobrazovací roviny. Tento přenos je nazýván kartografickým zobrazováním referenční plochy do zobrazovací roviny.

V rovinném obrazu referenčních ploch jsou vždy zobrazeny vzájemné polohy bodů i tvary čar. Zkreslení obecně roste s rozměry zobrazeného území. Matematická kartografie se proto rovněž zabývá vlastnostmi zkreslení rovinného mapového obrazu při zvoleném kartografickém zobrazení. Taková zkreslení však mohou být z některých hledisek příznivá, nazývají se pak *ekvidistantní* (nezkreslují vzdálenosti podél určitého systému čar), *konformní* (věrně zobrazují úhly mezi křivkami) nebo *ekvivalentní* (zachovávají poměry obsahů ploch).

Kartografické zobrazení může být definováno *geometrickou* nebo *matematickou* cestou. Zobrazení definovaná geometricky jsou zaváděna pomocí tzv. perspektivní projekce<sup>38</sup> referenčních těles na plochy rozvinutelné do zobrazovací roviny. Jsou proto často stručně označovány jako *projekce*. Matematicky definovaná zobrazení jsou mnohem rozšířenější. Jsou zadána dvojicí funkcí o jedné nebo dvou proměnných, které vyjadřují, jak souřadnice v zobrazovací rovině (polární, resp. kartézské) závisí na souřadnicích na ploše referenční (kterými jsou zeměpisná šířka a délka). Můžeme je tedy obecně zapsat vztahy

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda), \quad \varepsilon = g_1(\varphi, \lambda) \quad \text{resp.} \quad x = f_2(\varphi, \lambda), \quad y = g_2(\varphi, \lambda).$$

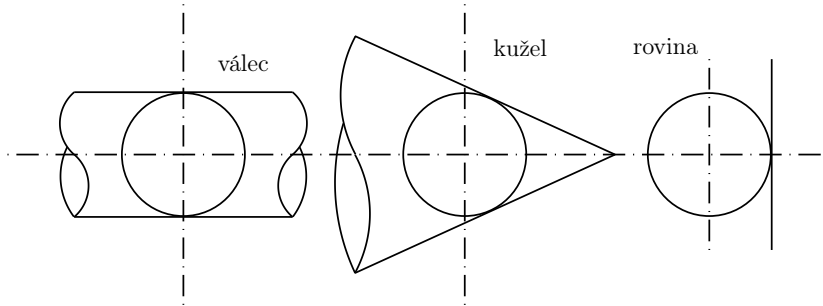
Velmi významnou skupinu zde tvoří zobrazení jednoduchá, u kterých platí, že každá z obou sou-



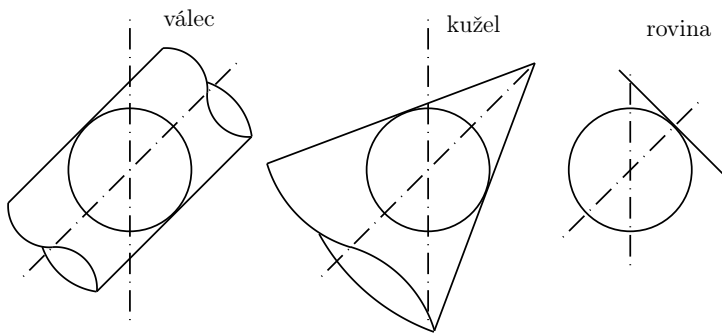
Obrázek 6.2: Pólová zobrazení

řadnic v zobrazovací rovině je funkcí pouze jedné ze dvou souřadnic na ploše referenční.

<sup>38</sup>Promítání ze středu referenčního tělesa nebo z bodu na povrchu referenčního tělesa, většinou z jižního či severního pólu.



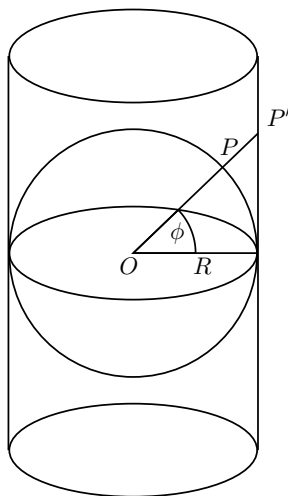
Obrázek 6.3: Rovníková zobrazení



Obrázek 6.4: Šikmá zobrazení

Jednoduchá kartografická zobrazení, která jsou projekcemi, se člení do skupin podle druhu zobrazovací plochy, která se při jejich realizaci rozvíjí do roviny. Podle toho se rozlišují zobrazení *válcová* (*cylindrická*), *kuželová* (*konická*) a *azimutální*. U válcového zobrazení jsou poledníky a rovnoběžky znázorněny soustavou vzájemně ortogonálních přímek. U kuželového zobrazení tvoří poledníky osnovu přímek vycházejících z jednoho bodu, který je současně společným středem kružnic znázorňujících jednotlivé rovnoběžky. Kuželová zobrazení mohou být řešena s jednou nebo se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami – zvolíme-li k referenční ploše tečný kužel nebo sečný kužel. Azimutální zobrazení je mezním případem zobrazení kuželového, kdy úhel při vrcholu kužele dosáhne  $180^\circ$  a kužel přejde přímo v zobrazovací rovinu, tečnou k referenční ploše. Podle polohy zobrazovací roviny vůči ploše referenční se pak jednoduchá zobrazení, která jsou projekcemi, dělí na *pólová*, *rovníková* a *šikmá* (obr. 6.2, 6.3 a 6.4).

Věnujme se nyní projekcím, tedy kartografickým zobrazením s geometrickou podstatou, konkrétněji. Nejjednodušší z nich je pólová projekce cylindrická. Představme si, že Zemi zastupuje jako referenční těleso kulový glóbus o poloměru  $R$ , který ovíneme válcem, a to takovým způsobem, že se válec dotýká glóbu na rovníku (obr. 6.5). Dále si představme, že paprsky světla vyzařují ze středu



Obrázek 6.5: Glóbus ve válci.

glóbu všemi směry. Paprsek, procházející bodem  $P$  na glóbu, vyznačí na válci bod  $P'$ , který nazveme obrazem bodu  $P$ . Když potom válec podle některé přímky rozstříháme a rozvineme, obdržíme rovinnou mapu celého světa. Téměř celého... Severní a jižní pól, body na glóbu, které leží na ose válce, mají svůj obraz v nekonečnu.

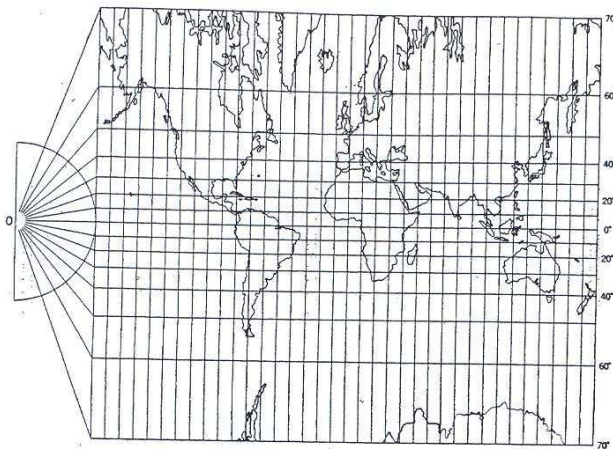
Je jasné, že popsaná cylindrická projekce zobrazuje všechny kružnice bodů téže zeměpisné délky  $\lambda$  (poledníky) na navzájem rovnoběžné svislé přímky, zatímco rovnoběžky (kružnice bodů téže zeměpisné šířky  $\phi$ ) se jeví na mapě jako vodorovné úsečky, jejichž rozestupy se při rovnoměrném zvyšování hodnot  $\phi$  zvětšují. Abychom našli matematický vztah mezi bodem  $P$  a jeho obrazem  $P'$ , musíme vyjádřit kartézské souřadnice  $(x, y)$  bodu  $P'$  jako funkce souřadnic  $(\lambda, \phi)$  bodu  $P$ . Zvolíme-li souřadnice  $x$  a  $y$  tak, aby bod na rovníku a hlavním poledníku (tedy bod se souřadnicemi  $\lambda = 0$  a  $\phi = 0$ ) byl počátkem, aby obrazem rovníku byla osa  $x$  a aby body severní polokoule měly kladnou  $y$ -ovou souřadnici, dostaneme zřejmá souřadnicová vyjádření

$$x = R\lambda, \quad y = R \operatorname{tg} \phi, \quad \lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle, \quad \phi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle.$$

Nejnápadnějším znakem cylindrické projekce je nadměrné tzv. severo-jívní prodlužování v oblastech blízkých severnímu a jižnímu pólu a z toho plynoucí drastické zkřivení tvaru kontinentů v těchto oblastech (obr. 6.6). Způsobuje to průběh funkce  $\operatorname{tg} \phi$  v okolí bodů  $\pm 90^\circ$ , v nichž má nevlastní limity. Cylindrická projekce je v praxi někdy zaměňována s Mercatorovou projekcí, které se na první pohled podobá. Nicméně kromě faktu, že obě projekce mají obdélníkovou síť poledníků a rovnoběžek, jsou obě zobrazení stavěna na zcela odlišných principech, jak ostatně za chvíli uvidíme.

Nejen kartografové využívají další promítání, tzv. stereografickou projekci. Znal ji již Hypparchus a je jednou z azimutálních projekcí, kdy promítáme povrch referenční koule na tečnou zobrazovací rovinu. Položíme glóbus na list papíru, který se stane mapou, aby se glóbu dotýkal v jižním pólu  $S$  (obr. 6.7). Každý bod  $P$  na glóbu spojíme pomocí polopřímky vycházející z bodu  $N$ , který značí severní pól na glóbu. Průsečík  $P'$  této polopřímky s listem papíru je obrazem bodu  $P$  v zobrazení, které jsme chtěli popsat.





Obrázek 6.6: Cylindrická projekce.

Stereografická projekce zobrazuje všechny poledníky jako polopřímky vycházející z jižního pólu  $S$ , zatímco kružnice zeměpisné šířky se zobrazují soustřednými kružnicemi se středem  $S$ . Kružnice  $e$ , obraz rovníku, můžeme považovat za kružnici jednotkovou. (Jak za chvíli uvidíme, odpovídá to tomu, že průměr glóbu je jednotkový.) Tím stanovíme jednotku délky pro polární souřadnici  $\rho$  v soustavě zobrazovací roviny, za jejíž počátek vybereme bod  $S$ .

Celá severní polokoule se zobrazí na vnějšek zmíněné kružnice  $e$  a jižní polokoule na její vnitřek. Čím je bod  $P$  blíže k severnímu pólu, tím dále bude jeho obraz  $P'$  na mapě od středu  $S$  kružnice  $e$ . Pouze jeden bod na glóbu nebude mít svůj obraz. Je to severní pól, jehož obraz je v nekonečnu.

Uvažujme nyní na glóbu bod  $P$  se zeměpisnou šířkou  $\phi$  a zeměpisnou délkou  $\lambda$ . Přejeme si určit polohu jeho obrazu  $P'$  v polárních souřadnicích  $(\rho, \varepsilon)$  na mapě. Protože jsme za počátek zvolili bod  $S$ , bude platit  $\rho = |SP'|$ , polární úhel  $\varepsilon$  můžeme zavést tak, aby platilo  $\varepsilon = \lambda$ . Délku úsečky  $SP'$  určíme z obrázku 6.8, na kterém vidíme řez glóbu rovinou  $NOP$ , kde  $O$  je střed glóbu. Kromě bodů  $P$  a  $P'$  jsme znázornili ještě bod  $E$  na rovníku a jeho obraz  $E'$ . Pravoúhlý trojúhelník  $ONE$ , a tedy i pravoúhlý trojúhelník  $SNE'$ , jsou rovnoramenné, takže platí  $|\angle ONE| = 45^\circ$  a podle volby jednotky  $|SN| = |SE'| = 1$ . Dále platí  $|\angle EOP| = \phi$  a  $|\angle ENP| = \frac{\phi}{2}$  (obvodový úhel nad obloukem  $EP$  rovný polovině středového úhlu  $\phi$ ). Proto  $|\angle ONP| = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$ , a tudíž bod  $P'$  leží ve vzdálenosti

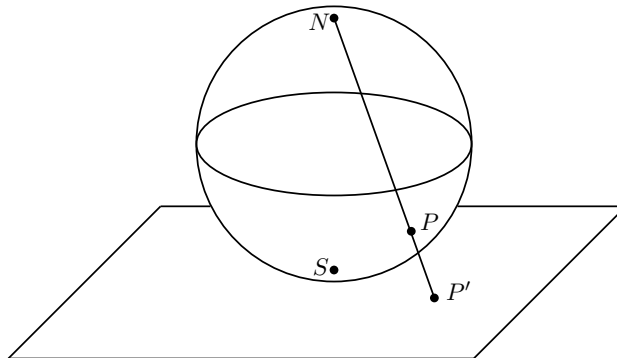
$$\rho = |SP'| = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$$

od jižního pólu  $S$  na mapě.

Odvozená rovnice vede k zajímavému výsledku. Necht'  $P(\lambda, \phi)$  a  $Q(\lambda, -\phi)$  jsou dva body na glóbu se stejnou zeměpisnou délkou, avšak opačnou zeměpisnou šířkou. Jakou budou mít jejich obrazy  $P'$  a  $Q'$  vzájemnou polohu? Podle odvozené rovnice obdržíme

$$|SQ'| = \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)} = \frac{1}{|SP'|}.$$

Platí tedy  $|SP'| \cdot |SQ'| = 1$  a navíc body  $P'$  a  $Q'$  leží na téže polopřímce s počátkem  $S$ , neboť oba mají stejnou polární souřadnici  $\varepsilon = \lambda$ . Každé dva body s těmito vlastnostmi se nazývají *sdrúženými*



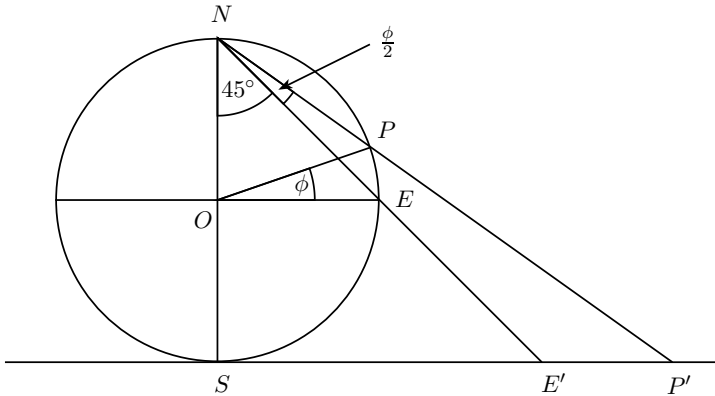
Obrázek 6.7: Stereografická projekce.

v kruhové inverzi určené jednotkovou kružnicí  $e$ . Toto geometrické zobrazení v rovině má řadu významných vlastností, které jsou tudíž vlastní i stereografické projekci. Je např. známo, že úhel mezi dvěma protínajícími se křivkami je stejný jako úhel mezi dvěma křivkami, které jsou obrazy původních křivek ve stejné kruhové inverzi. Z tohoto faktu ihned plyne, že stereografická projekce je izogonální zobrazení. Což znamená, že malá území na glóbu zachovávají svůj tvar na mapě. Na obrázku 6.9 vidíme severní polokouli ve stereografické projekci, při níž se ovšem glóbus dotýká zobrazovací roviny severním pólem a ne jižním. Je zřetelné, že tvary kontinentů na mapě jsou blízké těm na glóbu.

Představme si nyní, že jsme navigátory lodi, která má vyplout z přístavu určitým směrem. Nastavíme svůj kompas na zvolený směr, řekněme  $45^\circ$  severovýchodně, a potom jej pevně sledujeme. Pro zjednodušení si představme, že v naší cestě není žádná překážka, jako jsou ostrovy i pevniny. Jakou dráhou pak budeme plout? Dlouhá léta bylo v povědomí lidí, že dráha cesty s konstantním směrem (tedy křivka protínající všechny poledníky pod stejným úhlem – loxodroma) je obloukem kružnice, to znamená rovinnou křivkou (obr. 6.10). V šestnáctém století však Portugalec Pedro Nuňes ukázal, že loxodroma je ve skutečnosti spirálovitá křivka, která se nekonečně blíží k oběma pólům (obr. 6.11).

Kartografové v šestnáctém století byli postaveni před velkou výzvou: navrhnout takové zobrazení, aby se všechny loxodromy na mapě jevily jako přímé čáry. Taková mapa by umožnila navigátorovi spojit body startu a kýženého cíle pomocí úsečky, před vyplutím změřit na mapě úhel mezi touto dráhou a poledníkem a během celé plavby zjištěný směr stále dodržovat. Na všech dosud sestrojenných mapách přímé čáry neodpovídaly loxodromám na moři, takže navigace byla velmi složitým a riskantním úkolem.

Zmíněnému úkolu se začal usilovně věnovat jeden vlámský kartograf, který se pod jménem Gerardus Mercator stal později nejslavnějším kartografem novodobé historie. Narodil se 5. března 1512 jako Gerhard Kremer ve vlámském městě Rupelmonde (dnes v Belgii, v té době části Holandska). Bylo to dvacet let poté, co Kryštof Kolumbus podnikl svoji historickou plavbu do Nového Světa, která podnítila touhu mladého Kremera po vlastních nových zeměpisných objevech. V roce 1530 se přihlásil na Univerzitu v Louvainu a po absolvování se vypracoval do postavení jednoho z hlavních



Obrázek 6.8: Stereografická projekce.

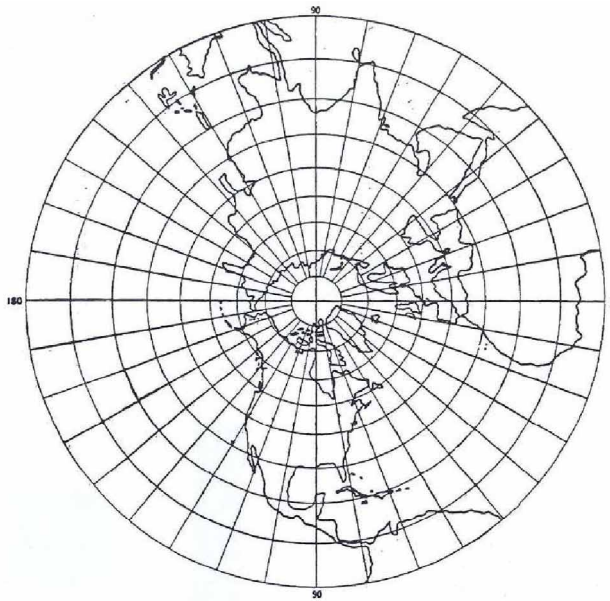
evropských kartografů a projektantů. V té době bylo obvyklé, že studovaní mužové užívali i latinské verze svých jmen. Tak Gerhard Kremer změnil své jméno na Gerardus Mercator (holandské „kramer“ a latinské „merchant“ znamenají česky nejspíš „kupec“ nebo „obchodník“).

Z života tohoto kartografa uveďme osudovou událost z roku 1544, kdy byl zatčen pro kacířství, neboť prosazoval protestantství v katolicky spravované oblasti. S velkým úsilím si zachránil holý život a následně uprchl do sousedního Duisburgu (v dnešním Německu), kde zůstal až do konce svého života.

Před Mercatorem zdobili kartografové své mapy nereálnými mytologickými figurkami a fiktivními zeměmi. Tyto mapy byly proto spíše uměleckým výtvozem než pravdivým zobrazením světa. Mercator byl jedním z prvních, který své mapy zakládal výlučně na exaktních údajích, získaných na základě přesných měření. Tím převedl kartografii z oblasti umění mezi skutečné vědecké disciplíny. Mercator byl rovněž první kartograf, který vytvořil ucelenou kolekci samostatných map, jakou dnes nazýváme *atlasem* na počest legendární bájně antické postavy.

Jak jsme již naznačili, Mercator se v roce 1568 pevně vnitřně rozhodl, že bude svůj čas a veškeré úsilí věnovat nalezení nové metody kreslení map, které by lépe odpovídaly námořnickým potřebám. Uvědomil si, že žádná jediná mapa nemůže současně zachovávat vzdálenost, tvar i směr. Maje na mysli potřeby navigace, Mercator se rozhodl obětovat vzdálenost a tvar, aby zachoval na mapě to, co je pro plavbu nejdůležitější, totiž směr. Proto za výchozí přijal Mercator dva principy: rovnoběžky a poledníky se na mapě musí zobrazit do obdélníkové sítě, v nichž obrazy všech bodů téže zeměpisné šířky budou navzájem rovnoběžné a shodné úsečky (jedna z nich bude obrazem rovníku); podle druhého principu by mapa měla být izogonální (tj. věrně zobrazující úhly mezi křivkami).

Posuďme nejdříve, co první princip znamená pro kružnice bodů téže zeměpisné šířky, obvykle zvané rovnoběžky. Ty zmenšují svoji délku, když se příslušná zeměpisná šířka zvětšuje, a to až dosáhnou nulové hodnoty v obou pólech. Protože na Mercatorově mapě mají být tyto kružnice znázorněny vodorovnými úsečkami o stejné délce jako rovník, musí být každá rovnoběžka roztažena s jistým koeficientem závislým na příslušné zeměpisné šířce. Na obr. 6.14 vidíme kružnici se zeměpisnou šířkou  $\phi$ . Její poloměr je označen  $r$ , takže její obvod je  $2\pi r = 2\pi R \cos \phi$  na glóbu, zatímco délka rovníku na glóbu je  $2\pi R$ . Kružnice bude tedy roztažena na mapě s koeficientem  $\frac{2\pi R}{2\pi R \cos \phi} = \sec \phi$ . Tímto jsme vyjádřili koeficient roztažení jako funkci proměnné  $\phi$ . Čím větší je zeměpisná šířka, tím



Obrázek 6.9: Severní polokoule.

větší koeficient roztažení, jak ostatně ukazuje tabulka.

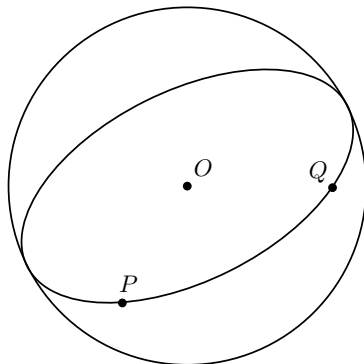
$\phi$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	85°	87°	89°	90°
sec $\phi$	1,00	1,04	1,15	1,41	2,00	3,86	5,76	11,47	19,11	57,30	$\infty$

Aby byla mapa izogonální, s roztažením rovnoběžek, které jsme právě popsali, musíme současně zajistit i vhodné zvětšování vzdáleností mezi sousedními rovnoběžkami v jejich síti, již kreslíme od rovníku k oběma pólům s pravidelným krokem např. 1°, 5° nebo 10° (obr. 6.15). Jak toho přesně Mercator dosáhl, není známo a stále se o tom vedou debaty mezi historiky kartografie. Sám Mercator o tom nezanechal žádný písemný záznam, až na následující poznámku, vytištěnou v doprovodném textu k jeho mapě:<sup>39</sup>

*Při znázorňování světa musíme rozvinout povrch koule do roviny, a to takovým způsobem, aby se polohy míst na všech stranách navzájem shodovaly ve skutečném směru a ve skutečné vzdálenosti. . . S tímto úmyslem musíme použít nové proporce a nové sestavení poledníků s přihlédnutím k rovnoběžkám. . . Kvůli tomuto důvodu jsme postupně zvětšovali stupně zeměpisné šířky směrem k jednotlivým pólům přímo úměrně s prodlužováním rovnoběžek do délky rovníku.*

I přes toto nejasné vysvětlení je nepochybné, že Mercator musel objevit správnou matematickou metodu, aby vyhověl oběma principům, které vzal za základ při konstrukci své mapy. Když vytvořil síť rovnoběžek a poledníků, zbývalo mu už jen položit „kůži na kostru“ neboli překrýt tuto síť obrysy kontinentů, jež byly známy v jeho době. V roce 1569 publikoval svoji mapu světa pod názvem *Nový a vylepšený popis zemí ve světě, upraveno a určeno pro užívání navigátorů*. Byla to

<sup>39</sup>Tento i další citáty uvádíme v překladu podle knihy [25].



Obrázek 6.10: Oblouk na hlavní kružnici.

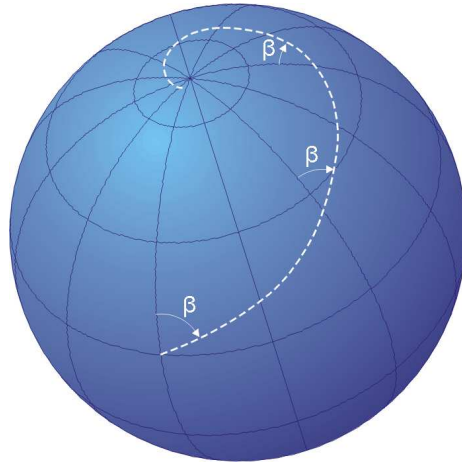
svým rozsahem obrovská mapa, jež proto byla pro vytištění rozdělena na 21 částí, neboť celkově měřila 137,16 x 210,82 cm<sup>2</sup>. Tak vzniklo jedno z nejvzácnějších děl v celé kartografické historii. Do současnosti se zachovaly pouze tři jeho exempláře.

Mapa, která přinesla Mercatorovi věčnou slávu, nebyla zprvu přijata ani kartografy, ani námořní komunitou. Lidé zpočátku nedokázali pochopit překvapivou změnu tvaru kontinentů, pro kterou ostatně Mercator nepodal vysvětlení, proč a jak vlastně zvětšoval vzdálenosti mezi sousedními rovnoběžkami. Tím dočasně způsobil i zmatek v myslích kartografů, kteří na jeho dílo chtěli navázat.

Přesné vysvětlení metody, která umožňuje sestavit Mercatorovu mapu vyhovující dvěma stanoveným a výše popsaným principům, podal až jeden anglický matematik. Žil v letech 1560 – 1615 a jmenoval se Edward Wright. Ve své práci s názvem *Konkrétní chyby v navigaci*, která byla publikována v Londýně roku 1599, napsal:

*Části poledníků v každém bodě zeměpisné šířky se musí zvětšovat se stejnou mírou, jako se zvětšují sekanty. Neustálým přičítáním sekant odpovídajících zeměpisným šířkám jednotlivých rovnoběžek... vytvoříme tabulku, která pravdivě ukáže hodnoty zeměpisné šířky na polednících námořnické mapy.*

Jazykem dnešní matematiky řečeno, Wright použil numerickou integraci, aby vyčíslil  $\int_0^\phi \sec t \, dt$  pro potřebnou škálu hodnot  $\phi$  z intervalu  $\langle 0, 90^\circ \rangle$ . Následujme jeho postup a použijme přitom současnou symboliku. Obrázek 6.16 ukazuje malý sférický obdélník na glóbu vymezený pomocí kružnic zeměpisné délky  $\lambda$  a  $\lambda + \Delta\lambda$  a pomocí kružnic zeměpisné šířky  $\phi$  a  $\phi + \Delta\phi$ , kde úhly  $\lambda$  a  $\phi$  od tohoto okamžiku budeme měřit v radiánech, protože to přinese výhodu při vyjadřování délek oblouků kružnic. (Jelikož na volbě nultého poledníku nezáleží, je na obrázku vyznačen pouze přírůstek  $\Delta\lambda$  zeměpisné délky.) Strany zmíněného obdélníku mají délky  $(R \cos \phi)\Delta\lambda$  a  $R\Delta\phi$ . Nechť bod  $P(\lambda, \phi)$  na glóbu přejde do bodu  $P'(x, y)$  na mapě s kartézskou soustavou souřadnic, jejíž osa  $x$  je obrazem rovníku. Potom se sférický obdélník zobrazí na rovinný obdélník omezený přímkami znázorněnými na obr. 6.17. Zatímco přírůstek souřadnice  $x$  má známou hodnotu  $\Delta x = R\Delta\lambda$ , přírůstek  $\Delta y$  je



Obrázek 6.11: Loxodroma.



Obrázek 6.12: Gerardus Mercator.

nutné určit tak, aby mapa byla izogonální, neboli aby dva zmíněné obdélníky byly podobné. Právě to bude znamenat, že směr z bodu  $P(\lambda, \phi)$  do bodu  $Q(\lambda + \Delta\lambda, \phi + \Delta\phi)$  je stejný jako směr mezi body  $P'(x, y)$  a  $Q'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ , které jsou jejich obrazy na mapě. To nás přivádí k rovnici

$$\frac{R\Delta\phi}{R\cos\phi\Delta\lambda} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{neboli} \quad \Delta y = (R \sec \phi)\Delta\phi.$$

Rovnici  $\Delta y = (R \sec \phi)\Delta\phi$  v moderní terminologii nazýváme diferenční rovnicí. Numericky může být řešena rekurentním postupem. Položíme  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , a stanovíme pevný přírůstek  $\Delta\phi$ . Pro  $\phi = 0$  zvolíme počáteční hodnotu  $y_0 = 0$  (odpovídající obrazu rovníku, kterým



Obrázek 6.13: Mercatorova mapa Evropy.

má být osa  $x$ ). Další hodnoty  $y_1, y_2, \dots$  budeme postupně počítat ze vztahů

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_1 = 0 + R \cdot \sec 0 \cdot \Delta \phi, \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_2 = y_1 + R \cdot \sec \Delta \phi \cdot \Delta \phi, \\ y_3 &= y_2 + \Delta y_3 = y_2 + R \cdot \sec 2\Delta \phi \cdot \Delta \phi, \\ &\vdots \\ y_N &= y_{N-1} + \Delta y_N = y_{N-1} + R \cdot \sec(N-1)\Delta \phi \cdot \Delta \phi. \end{aligned}$$

Výpočet jsme ukončili dosažením křivené hodnoty  $N \cdot \Delta \phi$  zeměpisné šířky. Tato numerická integrace byla náročná a pracná zejména v dobách „ručních“ výpočtů bez kalkulaček a počítačů. Přesto se Wrightovi podařilo celý postup realizovat s dostatečně malým přírůstkem  $\Delta \phi$  rovným 1 minutě (ve stupňové míře). Výsledky svých výpočtů pro zeměpisnou šířku od  $0^\circ$  do  $75^\circ$  zveřejnil v tabulkách „poledníkových částí“. Tím se nakonec metoda konstrukce Mercatorovy mapy stala obecně známou.

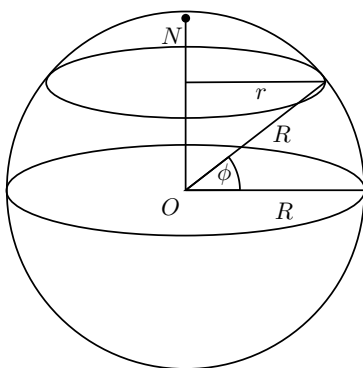
Dnes bychom odvozenou rovnici  $\Delta y = (R \sec \phi) \Delta \phi$  přepsali jako rovnici diferenciální pro „neko-  
nečně malé“ hodnoty  $\Delta \phi$  a  $\Delta y$ , jež bude tvaru

$$\frac{dy}{d\phi} = R \sec \phi.$$

Její řešení  $y = y(\phi)$  s počáteční hodnotou  $y(0) = 0$  zapíšeme určitým integrálem

$$y(\phi) = R \int_0^\phi \sec t \, dt.$$

Dnes je tento integrál zadáván studentům ve cvičení k základnímu kurzu matematické analýzy. Avšak Wrightova kniha se objevila asi 70 let před Newtonem a Leibnizem, kteří teprve integrální počet vytvořili, takže samotný Wright nemohl použít techniku neurčitých integrálů. Nezbyvalo mu

Obrázek 6.14: Kružnice se zeměpisnou šířkou  $\phi$ .

tedy nic jiného, než použít výše popsanou numerickou integraci.

Jako učenec napsal Wright svou knihu pro matematicky erudované čtenáře. Jeho teoretická vysvětlení obyčejným námořníkům říkala velmi málo. Proto Wright též navrhl jednoduchý myšlenkový pokus, který měl konstrukci Mercatorovy mapy vysvětlit. Představme si, že glóbus obalíme válcovou plochou tak, aby se dotýkala glóbu na rovníku. Začněme glóbus nafukováním zvětšovat. Přitom každý bod na roztaženém glóbu přijde do kontaktu s válcem a zanechá na něm svou stopu, která bude obrazem původního bodu glóbu na Mercatorově mapě. Tu dostaneme, když nakonec válcovou plochu s obrazy bodů rozvineme do roviny.

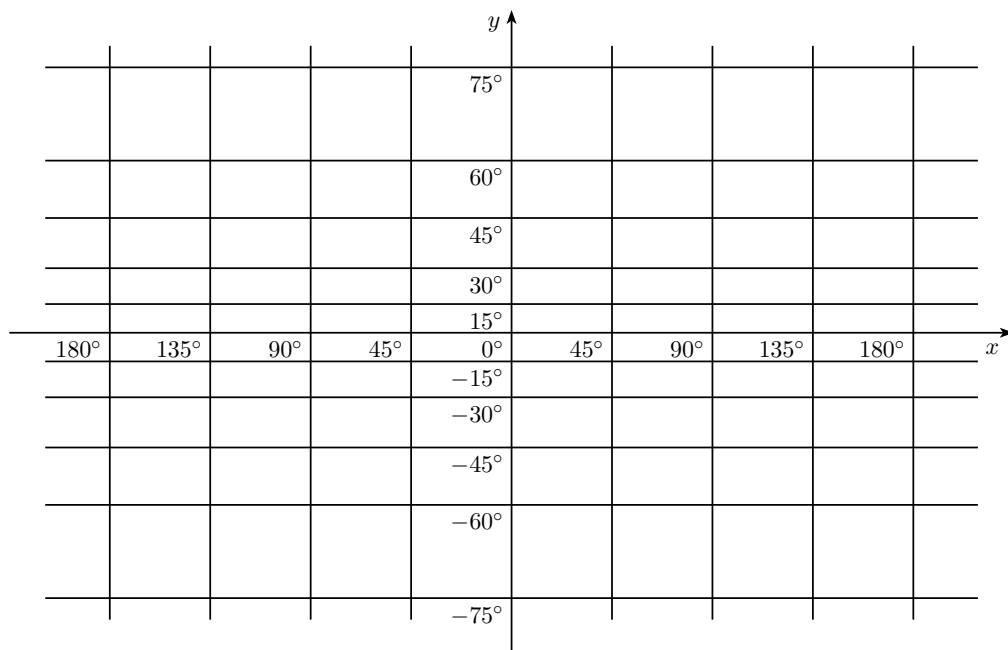
Popsaný Wrightův model se bohužel stal (ne však chybou samotného autora) zdrojem přežívajícího mýtu, že Mercatorovu mapu obdržíme promítáním paprsků světla ze středu glóbu obaleného válcem (čímž ovšem získáme odlišnou cylindrickou projekci, o které jsme pojednali dříve). Důsledně vzato Mercatorova projekce vlastně není projekcí, alespoň ne v geometrickém významu tohoto pojmu. Může být popsána pouze matematickými vzorci pro převod souřadnic z glóbu do souřadnic na mapě, které v závěru našeho textu odvodíme. Sám Mercator nikdy model s válcem ke svým výpočtům nepoužíval. Jeho zobrazení – až na vnější podobnost – nemá s cylindrickou projekcí nic společného. Avšak jednou stvořené mýty umírají pomalu a ještě dnes se můžeme setkat s chybnými výroky o Mercatorově projekci v mnoha zeměpisných knihách.

Jak jsme již uvedli, k prvotním výhradám vůči Mercatorovým mapám přispělo zejména zkreslení pevnin ve vysokých zeměpisných šířkách: např. Grónsko je na mapě větší než Jižní Amerika, ačkoli jsou jejich skutečné rozlohy přibližně v poměru 1 : 9.<sup>40</sup> Navíc přímá čára spojující dva body na mapě (loxodroma) neodpovídá nejkratší čáře (ortodromě) mezi těmito body na glóbu, neleží-li oba body na rovníku nebo na stejném poledníku (obr. 6.18). Za tento nedostatek byla Mercatorova mapa často kritizována. Jeden Wrightův příznivec, evidentně uražený touto nespravedlivou kritikou, si vybil zlost těmito řádky:

*Ať se nikdo neodvází hanit Mercatorovo jméno za špatný způsob zobrazování. Ať je ta hanba smyta docela a ostuda nechť padne na ty, kteří špatně jeho myšlenky popisovali, používali nebo přednášeli.*

<sup>40</sup>Kvůli nadměrnému severo-jížnímu roztažení je Mercatorova mapa obvykle omezena pouze na zeměpisné šířky od 75° severně do 60° jižně (viz obr. 6.19).



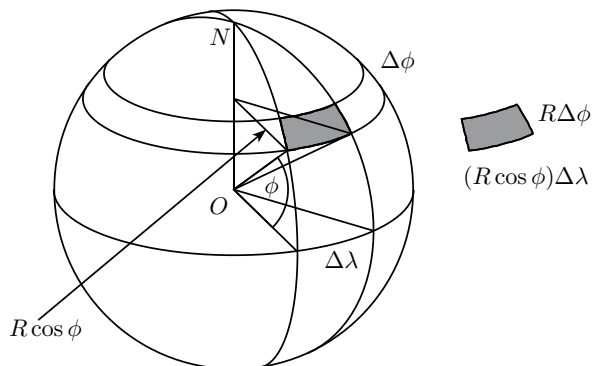


Obrázek 6.15: Roztažení vzdáleností mezi rovnoběžkami.

Wrightova kniha se objevila v roce 1599, třicet let poté, co Mercator publikoval svoji novou mapu světa. Námořní komunita pomalu začala oceňovat její velkou důležitost a v pravý čas se tato mapa stala celosvětově uznávanou. Významnost si udržela do našich dní. Když NASA začala průzkumy vesmíru v 60. letech 20. století, velká Mercatorova mapa, na které byly neustále sledovány dráhy satelitů, vévodila řídicímu centru v Houstonu ve státě Texas. A první mapy měsíců Jupitera a Saturna byly rovněž vyhotoveny Mercatorovou metodou.

Vraťme se do 17. století. V roce 1614 John Napier (1550-1617) ze Skotska objevil logaritmy, které se staly nejdůležitější pomůckou ve výpočetní matematice od dob středověku, kdy byla přinesena do Evropy indicko-arabská početní soustava. Sám Napier publikoval tabulky logaritmů sinů. Krátce nato anglický matematik a kněz Edmund Gunter (1581-1626) vydal tiskem tabulky logaritmů tangent (1620). Kolem roku 1645 Henry Bond, učitel matematiky a velká autorita přes navigaci, porovnal tyto tabulky s Wrightovými poledníkovými tabulkami a ke svému překvapení zjistil, že se tyto tabulky shodují za předpokladu, že úhel v Gunterově tabulce má hodnotu  $45^\circ + \frac{\phi}{2}$ , kde  $\phi$  je úhel z Wrightovy tabulky. Bond tak usoudil, že určitý integrál  $\int_0^\phi \sec t \, dt$  je roven  $\ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ , avšak sám to nemohl dokázat. Brzy se tato jeho domněnka stala jedním z nejvýznamnějších matematických problémů 50. let 17. století. Pod nezdařilé pokusy o jeho řešení se podepsali mimo jiné John Collins, Nicolaus Mercator (bez vztahu k G. Mercatorovi), Edmond Halley. Byli to vrstevníci Isaaca Newtona a aktivní účastníci vývoje, který vedl ke zrodu matematické analýzy.

Teprve v roce 1668 James Gregory uspěl v dokazování domněnky, kterou vyslovil Bond. Jeho důkaz byl však natolik obtížný, že sám Halley ho kritizoval za příliš mnoho „komplikačí“. Štěstí přálo až Isaacu Barrowovi (1630-1677), který podal elegantní důkaz Bondovy domněnky v roce 1670. Tento profesor matematiky na Univerzitě v Cambridge byl zdá se prvním matematikem, který (nejen při



Obrázek 6.16: Sférický obdélník.

zmíněném důkazu) používal techniku rozkladu funkcí na parciální zlomky, jež je, jak dnes dobře víme, efektivním prostředkem výpočtu mnohých integrálů.

Gregoryův důkaz Bondovy domněnky nyní předvedeme. Začneme úpravou

$$\begin{aligned} \sec \phi &= \frac{1}{\cos \phi} = \frac{\cos \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{\cos \phi}{1 - \sin^2 \phi} = \\ &= \frac{\cos \phi}{(1 + \sin \phi)(1 - \sin \phi)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} + \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \right), \end{aligned}$$

podle které

$$\int \sec \phi \, d\phi = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} + \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \right) d\phi.$$

První výraz v závorce, který integrujeme, je ve tvaru zlomku, jehož čítelek je derivací jmenovatele, a druhý zlomek v závorce je ve tvaru, jehož čítelek je  $(-1)$ -násobkem derivace jmenovatele. Platí tedy

$$\int \sec \phi \, d\phi = \frac{1}{2} (\ln |1 + \sin \phi| - \ln |1 - \sin \phi|) + C.$$

S využitím dobře známé vlastnosti logaritmů můžeme výsledek přepsat na

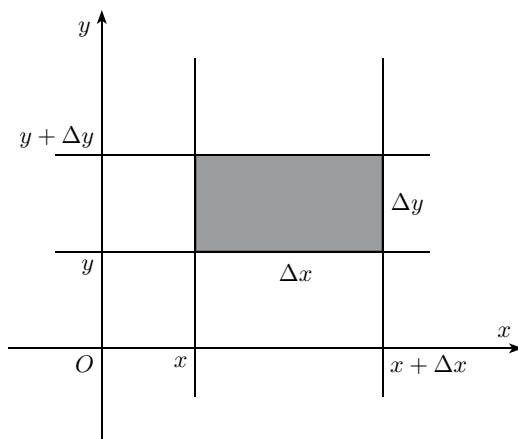
$$\frac{1}{2} (\ln |1 + \sin \phi| - \ln |1 - \sin \phi|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right| + C.$$

Rozšířením zlomku uvnitř logaritmu obdržíme

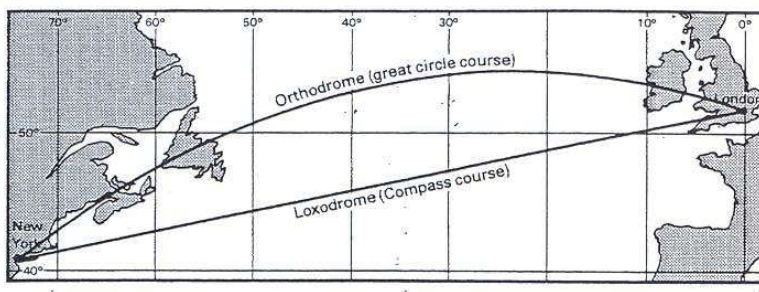
$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \cdot \frac{1 + \sin \phi}{1 + \sin \phi} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin \phi)^2}{\cos^2 \phi} + C.$$

Jelikož argument logaritmu je druhou mocninou, zapíšeme výsledek jako

$$\ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} \right| + C,$$



Obrázek 6.17: Rovinný obdélník.



Obrázek 6.18: Loxodróna a nejkratší vzdálenost.

pomocí goniometrických vzorců dále upravíme

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{1 + 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right| + C &= \ln \left| \frac{(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2})^2}{(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2})(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Nakonec čítec i jmenovatel v argumentu logaritmu vydělíme výrazem  $\cos \frac{\phi}{2}$ :

$$\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| + C.$$

Pro zkoumaný integrál tak dostáváme potvrzení Bondovy domněnky

$$\int_0^{\phi} \sec t \, dt = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right),$$

neboť  $\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \ln 1 = 0$ . V posledním vzorci jsme vynechali absolutní hodnotu, protože v intervalu, kde zeměpisné šířky uvažujeme,  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ , je  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$  kladné číslo. Dodejme, že v dnešních

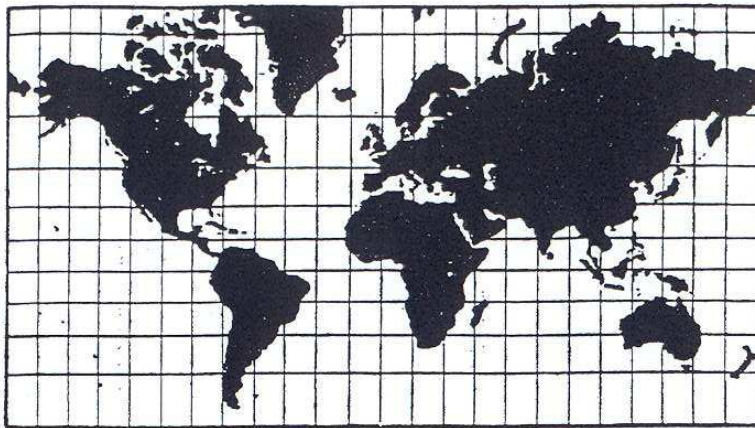
kurzech analýzy je integrál z funkce sekans řešen pomocí substituce  $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ ,  $du = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} dt$ .

Nyní jsme schopni vyjádřit souřadnice  $(x, y)$  bodu  $P'$  na Mercatorově mapě pomocí zeměpisné délky  $\lambda$  a zeměpisné šířky  $\phi$ , které odpovídají bodu  $P$  na glóbu. Diferenční rovnice  $\Delta x = R \Delta \lambda$  má zřejmé řešení  $x = R\lambda$  a integrál  $y = R \int_0^\phi \sec t dt$  je roven výrazu  $R \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ . Tudíž máme

$$x = R\lambda, \quad y = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right).$$

Tím jsme splnili úkol, který jsme si předsevzali – našli jsme matematické vyjádření Mercatorova kartografického zobrazení.

Všimněme si, že výraz  $\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$  uvnitř logaritmu v rovnici  $y = R \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$  je stejný



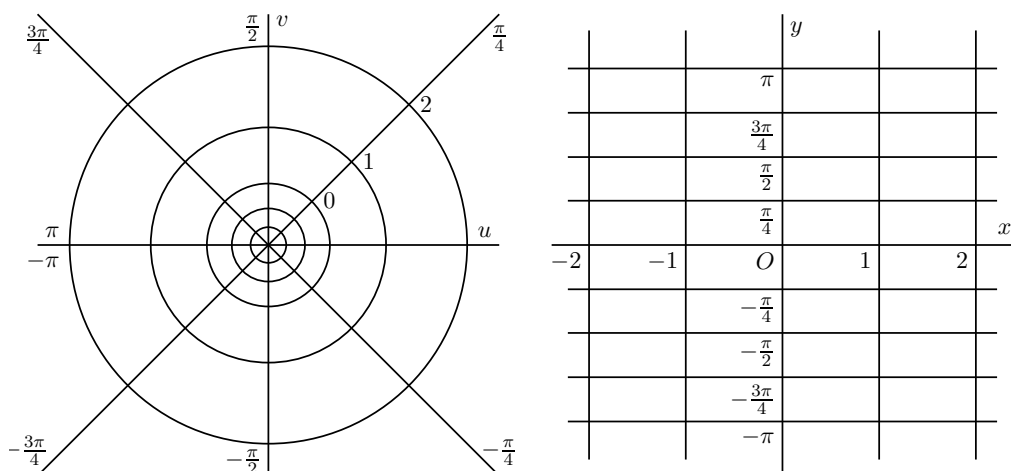
Obrázek 6.19: Svět podle Mercatora.

jako v rovnici  $|SP'| = \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$  uvedené při výkladu o stereografické projekci. To není náhoda! Dříve než to vysvětlíme, poznamenáme obecněji, že jedním z velkých úspěchů matematiky osmáctého století bylo účelné rozšíření definičního oboru obvyklých funkcí jako např.  $\sin x$ ,  $e^x$  a  $\ln x$  o komplexní hodnoty proměnné  $x$ . Jak jsme podrobně popsali v podkapitole 1.4, na začátku tohoto vývoje stál Euler a jeho vrcholu bylo dosaženo v devatenáctém století vytvořením teorie analytických funkcí komplexních proměnných.

Nás však zajímá pouze funkce  $w = \ln z$ , kde jak hodnoty  $z$ , tak i hodnoty  $w$  jsou komplexní čísla, která je dána předpisem

$$w = \ln |z| + i \cdot \arg z.$$

Právě tohle konformní zobrazení aplikované při stereografické projekci nám dává Mercatorovo zobrazení až na to, že horizontální a vertikální přímky jsou navzájem vyměněny. Můžeme to opravit rotací souřadnicového systému o  $90^\circ$ , což odpovídá vynásobení hodnoty funkce komplexní jednotkou  $i$ . Mercatorovu projekci si tedy můžeme představit jako výsledek složení dvou zobrazení: první z nich je stereografická projekce glóbu na komplexní rovinu  $z$ , druhé je zobrazení této roviny  $z$  do roviny  $w$  (obr. 6.20) pomocí funkce  $w = i \cdot \ln z$ . Jak jsme dříve odvodili, při prvním zobrazení se bod  $P(\lambda, \phi)$  glóbu zobrazí na komplexní číslo  $z$  s absolutní hodnotou  $\rho = \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$  a argumentem

Obrázek 6.20: Rovina  $z$  a rovina  $w$ .

$\varepsilon = \lambda$ , takže po aplikaci druhého zobrazení dostaneme komplexní číslo

$$w = i \ln z = i [\ln \varrho + i\varepsilon] = -\lambda + i \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right),$$

které při zápisu  $w = x + iy$  skutečně odpovídá bodu  $P'[x, y]$  na Mercatorově mapě (při hodnotě  $R = 1$  a pozměněné orientaci osy  $x$ ). Tento výsledek, jako každé složení dvou konformních zobrazení, je opět konformní zobrazení. Tímto konstatováním naše exkurze za goniometrickými funkcemi do světa matematické kartografie končí.

# Závěr

Poslední řádky textu publikace jsou osobním vyznáním autorky o vývoji jejího vztahu ke goniometrii. Autorka doufá, že bude přijato se sympatiemi, a to zejména u těch čtenářů, kteří zasvětili svou pracovní kariéru službě matematice v kantorském hávu.

S goniometrickými funkcemi v oboru reálných čísel jsem se seznámila v hodinách matematiky na gymnáziu, když prvotní vědomosti o funkcích ostrých úhlů jsem získala již na základní škole. Tyto poznatky jsem si doplnila na fakultě spolu s ostatními posluchači učitelské matematiky, a to v základním kurzu matematické analýzy, ve kterém jsme goniometrické funkce a funkce z nich odvozené zkoumali prostředky diferenciálního a integrálního počtu. Bohužel se mi během magisterského studia nedostalo příležitosti k hlubšímu osvojení trigonometrie či dalších oblastí elementární matematiky, ve kterých goniometrické funkce nalézají účinné uplatnění. Proto jsem se v prvních letech doktorského studia s velkým zájmem věnovala četbě rozličných zdrojů k zadané problematice, porovnávala rozličné přístupy ke zpracování jednotlivých dílčích otázek. Pomalu ve mně uzrávala představa, jakou strukturu by moje chystaná práce mohla mít, v jaké návaznosti bych poznatky o goniometrických funkcích mohla postupně rozšiřovat a jaké druhy aplikací budu schopna v textu práce uvést. Vytvořenou koncepci jsem v dalším období svého doktorského studia naplňovala psaním jednotlivých částí finálního textu, při kterém jsem ocenila rozsáhlé množství rešeršních poznámek, jež jsem v průběhu studia veškeré dostupné literatury nashromáždila.

Protože jsem obsahovou stránku jednotlivých kapitol práce popsala v její úvodní části, pokusím se nyní pouze zhodnotit, jaký přínos by vytvořené dílo ve svých částech i celkově mohlo mít. Na relativně malém prostoru jsou zde koncentrovány nejen základní a dobře známé poznatky, ale také hlubší výsledky i řada drobných, méně známých ukázek důmyslné práce s goniometrickými funkcemi. Metodický význam má i dosažený postup postupného odvozování teoretických výsledků s důrazem na výchozí trigonometrické věty o průmětech, postup, který je sice kombinací obrátů většinou převzatých z literatury, ve svém celku však může být označen za původní (odnikud nepřevzat je například způsob rozšíření součtových vzorců z oboru  $(0, \pi)$  na obor  $\mathbb{R}$  (str. 96–98), značná část výkladu o goniometrických rovnicích a nerovnicích (str. 102–117) nebo námět a řešení příkladu 4.5.13 ze str. 127. Nejvyšší rys původnosti sebou nese osobitý výklad celé kapitoly 5, ve které užitím vyvinutých odvozovacích pravidel odvozují efektivní cestou desítky trigonometrických identit a nerovností, z nichž některé (v málo přehledné příkladové literatuře) patrně ještě nebyly publikovány.

V souladu s historickým vývojem disciplíny i tradicemi školské výuky větší části 20. století výklad v mém textu směřuje od trigonometrie k teorii goniometrických funkcí reálné proměnné, a tím se odlišuje od současného gymnaziálního pojetí, v němž je ono směřování opačné (viz učebnici [14]). Přestože pro tuto změnu existovaly pádné argumenty (zejména nárůst významu funkcionální problematiky a celkové omezení hodinové dotace předmětu), postavení geometrie ve školské matematice tím bohužel utrpělo. Lepší povědomí o trigonometrii by proto měli získávat alespoň středoškolsktí učitelé, kterým by text naší práce mohl být v tomto nápomocen, ať už v průběhu jejich studia na fakultě, nebo v budoucí školské praxi. Věřím, že právě takto moje práce o goniometrických funkcích nalezne praktického uplatnění.

# Literatura

## Historické práce

- [1] Boyer Carl B. *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.
- [2] Braunmühl Anton von. *Geschichte der Trigonometrie*. Teubner, Leipzig, 1900.
- [3] Grattan-Guinness Ivor. *The Rainbow of Mathematics*. Fontana Press, London, 1997.
- [4] Heath Thomas. *A History of Greek Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1921.
- [5] Juškevič Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha, 1977.
- [6] Katz Victor J. *A History of Mathematics*. Addison Wesley, Menlo Park, New York, Harlow, Don Mills, Sydney, Mexico City, Madrid, Amsterdam, 1998.
- [7] Kolman Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Academia, Praha, 1968.

## Učebnice

- [8] Andreescu Titu, Andrica D. *Complex Numbers from A to Z*. Birkhauser, Boston, 2006.
- [9] Calda Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. Prometheus, Praha, 1996.
- [10] Gelfand Izrail Mojsejevič, Saul Mark. *Trigonometry*. Birkhauser, New York, 2001.
- [11] Herman Jiří, Chrápavá Vítězslava, Jančovičová Eva, Šimša Jaromír. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Podobnost a funkce úhlu*. Prometheus, Praha, 2000.
- [12] Herman Jiří, Kučera Radan, Šimša Jaromír. *Metody řešení matematických úloh I*. Masarykova univerzita v Brně, 1996.
- [13] Hruša Karel, Kraemer Emil, Sedláček Jiří, Vyšín Jan, Zelinka Rudolf. *Přehled elementární matematiky*. SNTL, Praha, 1964.
- [14] Odvárko Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. Prometheus, Praha, 2007.
- [15] Šmakal Stanislav, Budinský Bruno. *Goniometrické funkce*. Mladá fronta, Praha, 1968.
- [16] Veselý Jiří. *Matematická analýza pro učitele*. Matfyzpress, Praha, 1997.
- [17] Vojtěch Jan. *Geometrie pro VI. třídu gymnasií všech typů*. Prometheus, Praha, 1935.

**Knihy o matematice a geometrii**

- [18] Andreescu Titu, Savchev Svetoslav. *Mathematical Miniatures*. The Mathematical Association of America, Washington, 2003.
- [19] Kourliandtchik Lev. *Impresje liczbove (Od cyfry do szeregu)*. Tutor, Totuń, 2001.
- [20] Kuřina František. *Umění vidět v matematice*. SPN, Praha, 1989.
- [21] Nelsen Roger B. *Proofs Without Words*. The Mathematical Association of America, 1993.
- [22] Ponarin Jakov Petrovič. *Elementarnaja geometrija, díl I*. MCNMO, Moskva, 2004.

**Knihy o trigonometrii**

- [23] Bottema Oene, Djordjevic R. Ž., Janic R. R., Mitrinovic D. S., Vasic P. M. *Geometric inequalities*. Wolters – Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1969.
- [24] Kožeurov Pavel Jakovlevič. *Trigonometrie*. SNTL, Praha, 1955.
- [25] Maor Eli. *Trigonometric delights*. Princeton University Press, Princeton, 1998.
- [26] Novoselov Sergej Josifovič. *Specialnyj kurs trigonometrii*. Sovětskaja nauka, Moskva, 1957.
- [27] Švrček Jaroslav, Vanžura Jiří. *Geometrie trojúhelníka*. SNTL a Práce, Praha, 1988.

**Sbírky úloh**

- [28] Andreescu Titu, Enescu Bogdan. *Mathematical Olympiad Treasures*. Birkhauser, Boston, 2004.
- [29] Andreescu Titu, Feng Zuming. *103 Trigonometry Problems*. Birkhauser, Boston, 2005.
- [30] Andreescu Titu, Gelca Răzvan. *Putnam and Beyond*. Springer Science+Business media, LLC, 2007.
- [31] Andreescu Titu, Gelca Răzvan. *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhauser, Boston, 2000.
- [32] Barbeau Edward J., Klamkin Murray S., Moser William O. J. *Five Hundred Mathematical Challenges*. The Mathematical Association of America, Washington, 1995.
- [33] Horák Stanislav. *Nerovnosti v trojúhelníku*. ÚV Matematické Olympiády, Mladá Fronta, Praha, 1986.
- [34] Krečmar Vasilij Avgustovič. *Zadačnik po algebre*. Nauka, Moskva, 1972.
- [35] Kurlyandchik Lev. *Kącik olimpijski, Czėść III – Nierówności*. Aksjomat, Toruń, 2007.
- [36] Lidskij Viktor Borisovič a kol. *Zadači po elementarnej matematike*. Fizmatgiz, Moskva, 1962.



## Diplomové a disertační práce

- [37] Červený Martin. *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích*. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.
- [38] Přinosil Miloš. *Důkazy nerovností prostředky matematické analýzy*. Disertační práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2011.

## Články a příspěvky ze sborníků

- [39] Smýkalová Radka. *Čtyři trigonometrické nerovnosti*. Rozhledy matematicko-fyzikální, str. 1–7. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha, Ročník 83 (2008), číslo 4.
- [40] Švrček Jaroslav. *O důkazech zajímavých číselných rovností*. Rozhledy matematicko-fyzikální, str. 7–13. Jednota českých matematiků a fyziků, Praha, Ročník 83 (2008), číslo 1.
- [41] Bokiński Zbigniew, Świątek Adela, Mačys Jozef. *O liczbach niewymiernych*. In *Miniatury Matematyczne*, str. 41–67, Aksjomat, Toruń, 2003.

## Internetové zdroje

- [42] Bogomolny Alexander. *Ptolemy's Theorem from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*.  
<http://www.cut-the-knot.org/proofs/ptolemy.shtml>.
- [43] Elert Glenn. *Ptolemy's Table of Chords*.  
<http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml#table1>.
- [44] Hojoo Lee. *Topics in Inequalities – Theorems and Techniques*.  
<http://www.imomath.com/index.php>.
- [45] Hrábek Martin, Beran Květoslav. *Osobnosti*.  
<http://www.geneze.info/jmena/osobnosti.htm>.
- [46] Mildorf Thomas J. *Olympiad Inequalities*.  
<http://www.artofproblemsolving.com/Resources/articles.php>.
- [47] O'Connor John. J., Robertson Edmund. F. *The Trigonometric Functions*.  
[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric\\_functions.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html).
- [48] Řihová Helena. *Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník*.  
<http://dagles.klenot.cz/rihova/pravnuhel.pdf>.
- [49] Smýkalová Radka. *Metody a užití goniometrických funkcí v elementární matematice*.  
[http://is.muni.cz/th/44284/prif\\_d?info=1;zpet=%2Fvyhledavani%2F%3Fsearch%3Dmetody%20a%20uziti%20goniometrick%C3%BDch%20funkc%C3%AD%26start%3D1](http://is.muni.cz/th/44284/prif_d?info=1;zpet=%2Fvyhledavani%2F%3Fsearch%3Dmetody%20a%20uziti%20goniometrick%C3%BDch%20funkc%C3%AD%26start%3D1).
- [50] *Úlohy MO*.  
<http://math.muni.cz/mo>.

- [51] Weisstein Eric W. *Napierian Logarithm*.  
<http://mathworld.wolfram.com/NapierianLogarithm.html>.
- [52] *Wikipedie Otevřená encyklopedie*.  
[http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD\\_strana](http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_strana).